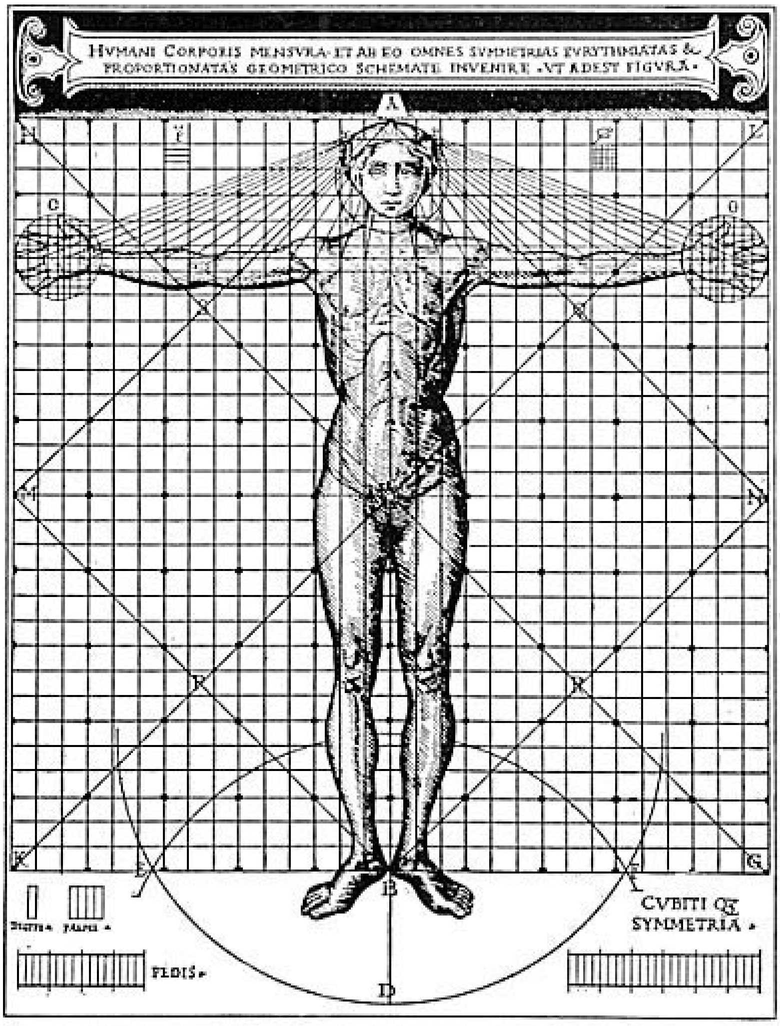
“İnsan Oranları”, *Cesare Ceasariano*, 1521

***MQ*, 29.10. 2010, 15:27:43-03.11.2010, 22:52:24.**



Resim 1. M.Ö. 30’da Romalı mimar ve mühendis ***Vitruvius*** tarafından ***“De Architectura”*** adlı yapıtta verilen **“Mükemmel Adam”**ın ***Cesar Cesariano*** tarafından 1521’de yapılan bir çizimi.

Milanolu ***Cesare Ceasariano Vitruvius***’un tanımladığı insan vücudunun oranlarına göre ***Da Vinci***’ninkinden farklı bir çizim yapmaya çalıştı; ancak yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi çizimi analitik ve adamın her parçasını bu analitik düzlemde tanımlamaya çalıştığı için, adamın ellerini ve ayaklarını normalden büyük yapmak zorunda kaldı.

Ceasariano’nun Kullandığı Kübit: Yeni Mısır Kraliyet Kübiti

Ceasariano, **“Vitruvius Adamı”**nı bir kenarı 30 Birim olan kare içinde çizerken, çizimin altındaki dikdörtgen boşlukta kullandığı kübit ve alt birimlerini εφεε. O, sağ alt köşede kübiti ***Da Vinci*** gibi,

$$(1)\quad 1 \text{ Kübit} = 6 \text{ El} = 24 \text{ Parmak}$$

şeklinde tanımlar ve sol alt köşede ise 1 El = 4 Parmak ve 1 Parmak ölçüleriyle birlikte, Latince **"FEDIS"** yazan yerde çizimdeki birim kareler için

$$(2) \quad 4\ \text{El} = 5\ \text{Birim}$$

eşitliğini tanımlar. Buna göre adamın boyu 30 Birim = 24 El = 4 Kübit demektir.

Peki ***Ceasariano*** bu kübiti nereden biliyordu?

Bilindiği gibi ***Herodot***, M.Ö. 450'de Giza Piramitleri'ne gidip oradaki Rahiplerden aldığı bilgileri **"Tarih"** adlı kitabına aktarmış ve bu kitapta *"4 El 1 Ayak, 6 El bir dirsektir (yani 1 Kübit'tir)"* diyerek yeni kübitin tanımını vermişti. Örneğin **Kitap I: Klio**, **Bölüm 60**'daki kadının boyu 4 dirsekten 3 Parmak eksik, (ki $1\ \text{Parmak} = \frac{1}{16}\ \text{Ayak} = 0.0185\ \text{Metre'dir}$) $4\ \text{Dirsek} - 3\ \text{Parmak} = 4 \times 24\ \text{Parmak} - 3\ \text{Parmak} = 93\ \text{Parmak} = 1.7205\ \text{Metre'dir}$.

Demek ki kadının boyu $4\ \text{Dirsek} - 3\ \text{Parmak} = 4\ \text{Kübit} - 3 \times \frac{1}{24}\ \text{Kübit} = \left(4 - \frac{3}{24}\right)\ \text{Kübit} = 3\frac{7}{8}\ \text{Kübit}$ olup, Büyük Piramit'teki Kraliçe odasındaki kapının $3\frac{3}{11}\ \text{RC} = \frac{36}{11} \times \frac{11}{21}\ \text{Metre} = \frac{12}{7}\ \text{Metre} = 1\frac{5}{7}\ \text{Metre} = 1.\overline{714285}\ \text{Metre'lik}$ boyundan biraz fazla imiş. Yani bu piramitlerdeki kübitler eskiydi ve yalnızca dirsekteki el sayısı değişik (7 El) idi.

İşte Mısır Metrolojisi'ne göre ***Da Vinci*** de kendi çiziminde ***Herodot*** tarafından aktarılan bu yeni kübiti kullanmış ve ***Ceasariano*** da ***Da Vinci***'den 29 yıl sonra aynı çizimi yaptığından aynı kübiti kullanmış idi!

Ceasariano'nun Çizimi

Ceasariano, **"Vitruvius Adamı"**nı kendi çiziminde M.Ö. 30'da Romalı mühendis ve mimar ***Vitruvius***'un **"De Architectura"** adlı yapıtındaki gibi çizerken, eni 24.5 El ve boyu 32 El olan bir dikdörtgen çerçeve içinde (ki bu dikdörtgenin alanından bir kenarı $\sqrt{24.5 \times 32} = 28$ El olan kare sözkonusu olmaktadır. Ayrıca burada dikkat edilirse 32 El − 24.5 El = 7.5 El = 30 Parmak'tır) bir kenarı 24 El olan karenin içine çizdi. Bu nedenle her ne kadar ***Ceasariano*** ve ***Da Vinci***'nin çizimlerindeki **"Vitruvius Adamı"**na ait parçaların uzunlukları aynı gibi görünse de ufak tefek farklılıklar vardır.

Örneğin adamın parçalarından biri için ***Vitruvius*** şu maddeyi verir:

1. Tam el uzunluğu, adamın yüksekliğinin 10'da 1'idir.

Ceasariano, adamın tam el uzunluğunu $\frac{x_1\ \text{Br}}{30\ \text{Br}} = \frac{1}{10}$ eşitliğine göre $x_1 = 3\ \text{Br} = 2.4\ \text{El}$ olarak verir ki bu, yukarıdaki şekilde açıkça görülmektedir. ***Da Vinci*** ise çiziminde doğrudan bu kübiti kullandığından $\frac{x_2\ \text{El}}{24\ \text{El}} = \frac{1}{10}$ eşitliğine göre adamın el uzunluğunu $x_2 = 2.4$ El olarak verir. Fakat bu değeri ***Da Vinci***'nin çiziminden okumak zordur. Çünkü çizimin altındaki cetvelden bu değer okunamamaktadır. Yani ***Da Vinci***'nin cetvelinde ***Ceasariano***'nundaki gibi bu değeri okumaya imkan yoktur; iyi bir ölçümle ancak hissedebilirseniz.

Not 1. ***Ceasariano***, adamın tam ellerini birer çember içine alarak, adamın el ve parmaklarının bölümleri hakkında ***Da Vinci***'den daha fazla bilgi veriyor. O da ***Da Vinci*** gibi adamın sağ ve sol eli hakkında farklı detaylar üzerinde durur. Yani adamın sağ ve sol eli birbirinden farklıdır.

Ona göre adamın eli tam açıkken, tıpkı adamın göbeğinde olduğu gibi, parmak uçları bir çember çiziyormuş. Bu çemberin yarıçapı $r = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}\left(\cong \sqrt{3}\right)\ \mathrm{Br} = 1.4$ El'dir.

Ceasariano, ***Vitruvius*** tarafından verildiği söylenilen

2. 1 Ayak (Foot) 4 El genişliğindedir.

maddesine sadık kalmamıştır. Çünkü adamın topuklarının birleşimi olan B noktası merkez olacak şekilde $r = 4\ \mathrm{Br} = 3.2$ El yarıçapında bir çember çizerseniz, adamın sağ ayak orta parmağının ucundan geçtiğini görürsünüz. ***Da Vinci*** ise kare içindeki adamın sol ayak uzunluğunu 3.5 El olarak verir.

Yine ***Vitruvius***'a göre,

3. Kafa üzeri ile saç kökleri arasındaki mesafe, adamın yüksekliğinin 40'ta 1'idir.

Da Vinci, bu sonuç için günlük olarak kullandığı defterlerden birine şu notu düşmüştü:

"Saçının köklerinden çenesinin altına kadar olan mesafe, adamın yüksekliğinin 10'da 1'idir; çenesinin altından başının üzerine kadar olan mesafe, yüksekliğinin 8'de 1'idir.", *The Notebooks of Leonardo da Vinci, Vol. 1* (of a 2 vol. set in paperback) pp. 182-3, Dover, ISBN 0-486-22572-0.

Ceasariano'nun çiziminde ***Da Vinci***'nin notundaki bu maddeler aynen doğru olup şu şekilde çözülmektedir:

3.1. Saç köklerinden çene altına olan mesafe, adamın yüksekliğinin 10'da 1'idir.

Çözüm: AB simetri ekseni üzerindeki çene altının ve saç köklerinin yerden yükseklikleri $26\frac{1}{4}$ Br ve $29\frac{1}{4}$ Br olup, saç kökleri ile çene altı arasındaki uzaklık (ya da adamın yüz uzunluğu), $29\frac{1}{4} - 26\frac{1}{4} = 3\ \mathrm{Br} = 2.4$ El'dir. Bu da adamın yüksekliğinin $\frac{3\ \mathrm{Br}}{30\ \mathrm{Br}} = \frac{1}{10}$'u demektir.

3.2. Kafa üzerinden çene altına kadar olan uzaklık, adamın yüksekliğinin 8'de 1'idir.

Çözüm: AB simetri ekseni üzerindeki kafa üzerinden çene altına kadar olan uzaklık, $30 - 26\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$ Br ve bunun adamın yüksekliğine oranı, $\frac{3\frac{3}{4}\ \mathrm{Br}}{30\ \mathrm{Br}} = \frac{1}{8}$ olur.

Şu halde bu sonuçlara göre

$$(3)\quad \frac{h'}{h} = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{40}$$

eşitliği gerçeklenmiş olur. Fakat bunun en kısa çözümü, kafa üzeri ile saç kökleri arasındaki uzaklık, $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ Br olduğundan $\frac{h'}{h}=\frac{\frac{3}{4}\text{Br}}{30\text{ Br}}=\frac{1}{40}$ şeklinde bulunmasıdır.

Not 2. ***Da Vinci***, aynı günlük defterinde yukarıdaki notun sonunda şunu söylemişti:

"Çene altından buruna kadar mesafe ve saç köklerinden kaşlara kadar, herbiri aynı durumda, ve kulak gibi, yüzün 3'te 1'idir.", *The Notebooks of Leonardo da Vinci, Vol. 1* (of a 2 vol. set in paperback) pp. 182-3, Dover, ISBN 0-486-22572-0.

Ceasariano, kendi çiziminde bu detayları ***Da Vinci***'ninki gibi kesin bir şekilde veremese de adamın yüzünün tam olarak oturduğu bir kare ve bu karenin köşelerinden geçen bir çember çizmiştir. Buna göre karenin bir kenar uzunluğu adamın yüz uzunluğu olduğundan 3 Br ve çevrel çemberin merkezinin AB simetri ekseni üzerinde, A noktasından uzaklığı $\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=2\frac{1}{4}$ Br ve yarıçapı $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ Br'dir.

Diğer taraftan, E ve F noktalarından geçen üstteki çember yayı tamamlanıp tam bir çember çizilir ve pergelin ayakları değiştirilmeden bu çember ile AB simetri ekseninin kesim noktasını (bu nokta karenin kögenlerinin kesim noktası ile adamın göbek noktasının orta noktasının $11+\frac{5\sqrt{5}}{2}-16\frac{1}{2}=0.090169944$ Br kadar üzerindedir) merkez alan bir çember daha çizilirse, bu son çemberin AB simetri eksenini kestiği noktanın A noktasına uzaklığı

$$(4)\quad 30-\left(22+\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)=8-\frac{5\sqrt{5}}{2}=2.40983006\text{ Br}$$

ve bu da karenin çevrel çemberinin merkezine yakındır. Çünkü aralarındaki fark,

$$(5)\quad 8-\frac{5\sqrt{5}}{2}-2\frac{1}{4}=0.159830056\text{ Br}$$

dir.

Sonuçta ***Ceasariano***'nun çiziminde bundan sonra ***Da Vinci***'nin çizimindeki gibi aynı bilgileri vermek yerine, farklı olan bilgileri vermenin daha doğru olduğunu düşünüyorum.

***Ceasariano*'nun Çemberleri**

Da Vinci'den 29 yıl sonra aynı çizimi yapan ***Ceasariano***, yukarıdaki şekilde adamın ayaklarını içine alan bir çift simetrik çember yaylarıyla şekilde görünmeyen esas çemberi işaret etmiştir. Sözkonusu bu görünmeyen çember ***Da Vinci***'ninkiyle aynı görevi görür. Fakat her ikisi de **"Dairenin Karelenmesi"** metoduna dayalı piramitlerdeki **"Mükemmel İnsan"** tasvirlerinden habersizdir. Onlar bu tasvirlerden uzak, ***Vitruvius***'un tanımladığı insan vücudunun oranlarına göre çalıştılar. Zaten bu piramitlerdeki kübitten habersiz olan bu kişilerin piramitlerdeki mükemmel insan tasvirlerinden haberdar olmaları beklenemez.

Ceasariano, şekildeki simetrik çember yaylarını

$$(6)\quad \mathrm{r} = 11\ \mathrm{Br} = 8.8\ \mathrm{El}$$

yarıçapına göre çizmiştir. Bunlardan ilkini şöyle çiziyor: Merkezi D noktası ve yarıçapı $r = 11$ Br olan bir çemberi AB simetri ekseniyle kesiştiriyor; kesim noktası üst çember yayının biraz ötesinde olmak üzere aynı birim karenin içinde kalıyor. ***Ceasariano***, bu kesim noktasını alt çemberin merkezi olarak alıyor ve pergelin ayaklarını değiştirmeden (yani $r = 11$ Br yarıçapında) merkezi bu kesim noktası olan bir çember çiziyor. Bu çemberin bir parçası şekildeki alt çember yayı olarak görülüyor.

İkincisini de şöyle çiziyor: Bu simetrik çember yaylarının merkezleri arasındaki uzaklığı şekildeki birim karelere göre,

$$(7)\quad |\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2| = \sqrt{r^2+2^2} = \sqrt{2^2+11^2}\left(=\sqrt{5^2+10^2}\right) = 5\sqrt{5}\ \mathrm{Br} = 8.94427191\ \mathrm{El} \cong 9\ \mathrm{El} = 1.5\ \mathrm{Kübit}$$

(yani pergeli dik kenarları 2 Br ve 11 Br olan bir dik üçgenin hipotenüsünün uç noktalarına koymak suretiyle) alıyor ve pergelin sabit ayağını alt çemberin merkezi olan O_1 noktasına koyduktan sonra bir çember çizerek AB simetri ekseniyle kesiştiriyor. Bu kesim noktası O_2 olmak üzere üst çemberin merkezidir. Şimdi merkezi O_2 ve yarıçapı $r = 11$ Br olan çember çizerseniz, bu, size üst çember yayını verecektir.

Şu halde bu simetrik çember yaylarının merkezleri arasındaki uzaklığa $5\sqrt{5}\ \mathrm{Br} = |\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2| = r + y$ dersek; $y = 2u$ için bu eşitlikten

$$(8)\quad u(u+r) = 1$$

denklemi elde edilir. Bu denklem, her iki çembere göre bir kuvvet ifadesini gösterir. Bu denklemin çözümünden

$$(9)\quad u = \frac{-r+\sqrt{r^2+2^2}}{2}$$

Br elde edilir. Burada u, ϕ altın oranına göre

$$u = \frac{-11+5\sqrt{5}}{2} = \frac{-11+5(2\phi-1)}{2} = \frac{10\phi-16}{2} = 5\phi-8 = \phi^{-5}$$

eşitliklerinden

$$(10)\quad u = \phi^{-5}$$

Br'dir. Dolayısıyla buradan (8)'deki $u + r = \phi^5$ Br ve ikiz çemberlerin yarıçapları da

$$(11)\quad r = \phi^5 - \phi^{-5}$$

Br olur. Çünkü $\phi^5 = 5\phi + 3$ ve $\phi^{-5} = 5\phi - 8$ nedeniyle bu eşitlik kolayca gerçeklenir.

Rönesans Dönemi'nde Altın Oranın Gerçek Değeri Bilinmiyordu!

Fakat ***Ceasariano***'nun 1521'de bu bağıntıları görmesine imkan yoktu. Çünkü Rönesans döneminde

$$(12) \quad \phi^2 = \phi + 1$$

denkleminin çözümünden elde edilen altın oranın

$$(13) \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

şeklindeki gerçek değeri bilinmiyordu. Örneğin ***Ceasariano***'ndan çok sonra, "**Daire-Çap İlişkileri**" adlı çalışmalarda 1586'da Alman matematikçi ***Ludolf Van Ceulen***,

$$(14) \quad \pi = \sqrt{\sqrt{320} - 8}\left(= \frac{4}{\sqrt{\phi}}\right)$$

ve 1593'te de Fransız matematikçi ***Françoise Vieta***,

$$(15) \quad \pi = \frac{18+\sqrt{180}}{10}\left(= \frac{6}{5}\phi^2\right)$$

değerlerini altın oranın gerçek değerini bilmeden, kareköklü ifadeler olarak vermişlerdir. Yani bugün siz bu sonuçları verseniz, eğer bir test sınavındaysanız cevap şıklarında bulamazsınız veya eğer bir yazılı yoklamadaysanız eksik puan alırsınız. Çünkü bu sınavlarda sizden en sade sonuç istenir.

Ceasariano'nun Altın Oranları

Rönesans ve önceki dönemlerde ϕ altın oranı (13)'teki gerçek değeriyle değil örnekleriyle biliniyordu. ***Ceasariano*** da, çiziminde adamın boyundaki altın oranları ardışık 2, 3, 5, 8, 13 Fibonacci sayılarına göre örneklendirmiştir.

1. **Roma'daki Altın Oran Anlayışına Göre:** ***Ceasariano***, adamın göbeğinin (ki simetri ekseni üzerindeki göbek noktasına T diyelim) yerden yüksekliğinin, kafa üzerinden göbeğe kadar uzaklığa oranını,

$$(16) \quad \frac{|TB|}{|AT|} = \frac{18 \text{ Br}}{12 \text{ Br}} = \frac{3}{2}$$

ve adamın kafasının üzerinin yerden yüksekliğinin, göbeğinin yerden yüksekliğine oranını,

$$(17) \quad \frac{|AB|}{|TB|} = \frac{30 \text{ Br}}{18 \text{ Br}} = \frac{5}{3}$$

olarak veriyor.

2. **Eski Mısır'daki Altın Oran Anlayışına Göre:** Bu anlayışa göre de ***Ceasariano***, adamdaki altın oranları şöyle veriyor: Adamın göbeğinin yerden yüksekliğinin, saç kökünün göbeğe kadar olan uzaklığa oranı (ki burada da simetri ekseni ile saç kökü hizasının kesim noktasına U diyelim),

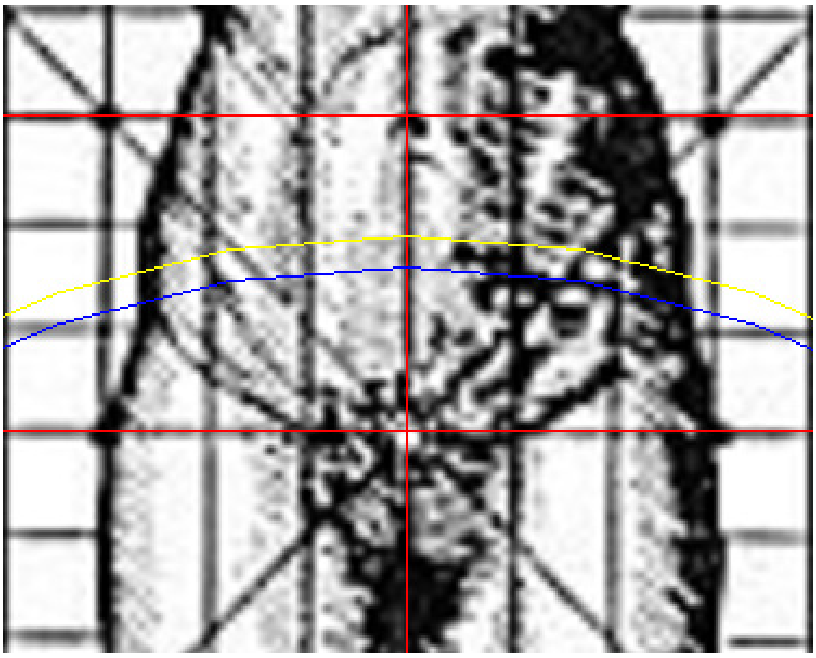
$$(18)\quad \frac{|TB|}{|UT|}=\frac{18\ \text{Br}}{11\frac{1}{4}\ \text{Br}}=\frac{8}{5}$$

ve adamın saç kökünün yerden yüksekliğinin, göbeğinin yerden yüksekliğine oranı,

$$(19)\quad \frac{|UB|}{|TB|}=\frac{29\frac{1}{4}\ \text{Br}}{18\ \text{Br}}=\frac{13}{8}$$

dir.

Not 3. Adamın göbeğinin orta noktası simetri ekseni üzerinde B noktasından 18 Br uzaklıkta olması gerekiyor ama ***Ceasariano***, adamın göbeğinin biraz aşağıda çizmiş. ***Ceasariano***'nun adamın göbeğinin neden böyle çizmiş olduğunu araştırınca,



Resim 2. ***Ceasariano***, AutoCAD 2009'daki çizime göre, adamın göbeğini 18 Br = 14.4 El'deki (bu ***Da Vinci***'de 14.5 El'dir) üst kırmızı çizginin biraz aşağısında çizmiş. Fakat aynı hatayı adamın üreme organının yerini gösteren beyaz nokta da yapmış. Bunlar ihmal edilebilir çok küçük hatalardır.

aynı hatayı karenin köşegenlerinin kesim noktasındaki adamın üreme organının yerini işaret eden beyaz nokta da yaptığı görülüyor. Fakat bu hatalar, ihmal edilebilecek türden çok küçük hatalardır.

Burada adamın üreme organı üzerinde biraz durmak gerekiyor. Çünkü ***Ceasariano***, resimde görüldüğü üzere, adamın üreme organını herhalde ayıp olmasın diye çizmemiş; karenin köşegenlerinin kesim noktasında beyaz bir noktayla yerini işaret etmiştir. Oysa ***Da Vinci***, kare ve çember içindeki her iki adamın da üreme organını ölçüsüyle birlikte detaylı bir şekilde resmetmiş idi. Bu durum, ***Da Vinci***'nin kadavralarda yaptığı uzun çalışmaların bir getirisini gösterir. ***Da Vinci***'ye göre kare içindeki adamın sönük haldeki üreme organının boyu 1 El'dir.

Şimdi konuya kaldığımız yerden devam edersek; adamın ayaklarının içinde kaldığı simetrik çember yaylarının [KG] üzerinde kestiği noktalar, B noktası orijin olmak üzere üstteki ve alttaki çemberlerin denklemleri $x^2 + \left(y - \frac{r+2u}{2}\right)^2 = r^2$ ve $x^2 + \left(y + \frac{r+2u}{2}\right)^2 = r^2$ olup, bu denklemlerin ortak çözümünden $x = \mp\frac{\sqrt{359}}{2} \cong 9.5$ Br dir.

2. Yol (B noktasına göre alt (veya üst) çembere göre kuvvet hesabından): Dikkat edilirse (8)'deki bağıntı da bir kuvvet hesabını göstermektedir. Dolayısıyla çemberlerin E ve F kesim noktalarının bulunmasında en kolay çözüm yolu bu olmaktadır. Çünkü $|BD| = \frac{r-2u}{2}$ ve çap üzerindeki diğer parçanın uzunluğu $2r - \frac{r-2u}{2} = \frac{3r+2u}{2}$ olduğundan alt çemberde B noktasına göre kuvvetten

$$x^2 = \frac{r-2u}{2}.\frac{3r+2u}{2}$$

olur. Burada u ve r (10) ve (11)'deki altın oran değerlerine göre alınırsa, çemberlerin GK doğrusu üzerindeki E ve F kesim noktaları

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{r-2u}{2}.\frac{3r+2u}{2} = \frac{\phi^5 - \phi^{-5} - 2\phi^{-5}}{2}.\frac{3(\phi^5 - \phi^{-5}) + 2\phi^{-5}}{2} = \frac{\phi^5 - 3\phi^{-5}}{2}.\frac{3\phi^5 - \phi^{-5}}{2} \\ &= \frac{3(\phi^{10} + \phi^{-10}) - 10}{4} = \frac{3[(\phi^5 - \phi^{-5})^2 + 2] - 10}{4} = \frac{3r^2 - 4}{4} = \frac{3 \times 11^2 - 4}{4} \\ &= \frac{359}{4} \Rightarrow x = \mp\frac{\sqrt{359}}{2} \end{aligned}$$

ya da (8)'deki kuvvet bağıntısına göre

$$x^2 = \frac{r-2u}{2}.\frac{3r+2u}{2} = \frac{3r^2 - 4u(u+r)}{4} = \frac{3r^2 - 4}{4} = \frac{3 \times 11^2 - 4}{4} = \frac{359}{4} \Rightarrow x = \mp\frac{\sqrt{359}}{2}$$

olarak bulunur.

Acaba *Ceasariano* bu çemberi görmüş müydü?

Şu halde EBD dik üçgeninin hipotenüsünün uzunluğu, bu çemberlerin r yarıçapı ile çemberler arasında kalan $|DD'| = r - 2u$ uzunluğundaki düşey parçanın geometrik ortalaması olduğundan (ki bu durumda ***Ceasariano*** için yeni bir çember daha sözkonusu olur),

$$(20) \quad |ED| = \sqrt{r(r-2u)} = \sqrt{11\left(22 - 5\sqrt{5}\right)} = 10.90945742 \text{ Br}$$

değerinin bu çemberlerin $r = 11$ Br'lik yarıçapına ve ***Ceasariano***'nun görüp görmediği belli olmayan çemberin $\frac{r+r-2u}{2} = r - u = \frac{33-5\sqrt{5}}{2} = 10.90983006$ Br'lik yarıçapının da $|ED|$'ye çok yakın olması (ki burada $GO \lesssim AO$ ilişkisi vardır), bu çizime yüzeysel inceleyen kişileri şaşırtır. Çünkü çemberlerin E ve F kesim noktaları tam olarak [KG] üzerinde değildir. Bunlar yine ***Ceasariano***'nun küçük hatalar olup, ***Ceasariano***, E ve F kesim noktalarını [KG]'nın biraz üzerinde, aynı seviyeye koymuştur. Dolayısıyla bu hatalarla $|ED| = |FD| \cong r = 11$ Br olması, sizi şaşırtabilir.

Şimdi tam burada yukarıdaki soru nedeniyle biraz durmamız gerekiyor. Çünkü $|ED|$'nin bulunmasında **2. Yol**'daki bir durum, dolayısıyla yeni bir çember daha sözkonusu olur ki ***Ceasariano***'nun bu ilişkiyi görüp görmediğinin çok iyi bir şekilde analiz edilmesi gerekmektedir. Sözkonusu bu çemberin AB simetri ekseni üzerindeki çapının bir ucu D noktası, yarıçapı $\frac{r+r-2u}{2} = r - u = \frac{33-5\sqrt{5}}{2} = 10.90983006$ Br olup merkezinin B noktasından uzaklığının $r - u - \frac{r-2u}{2} = \frac{r}{2} = 5.5$ Br olması, bana ***Ceasariano***'nun bu çemberi, dolayısıyla (20)'deki geometrik ilişkiyi görmüş olabileceğini düşündürttürüyor. Yani siz, AB simetri ekseni üzerinde B noktasından 5.5 Br olan noktayı merkez ve bu merkezi D noktasına birleştiren doğru parçasını yarıçap kabul eden bir çember çizerseniz, üst çember yayının AB eksenini kestiği nokta (ki bu, D' noktası olsun) ile E (veya F) noktasını birleştirip [D'E]'nı yatay hale getirdiğinizde, derhal (20)'deki geometrik ortalama bağıntısı karşınıza çıkar. Peki ***Ceasariano*** bu çemberi yani ilişkiyi görmüş müydü? İşte orası karanlık!

Bilindiği gibi Türk İslam bilginleri **"Heron Formülü"**nü **Kırık Kiriş"** olarak adlandırmışlardır ve bu yüzden ***Arşimet***'in bu formülü bildiğini iddia ederler. Bu formülün **"Kırık Kiriş"**e göre ispatında ***Arşimet***'in herhangi bir trigonometrik anlam görüp görmediği bilinmiyor!

Not 4 (Şaşırtıcı Yaklaşımlar). Şekildeki simetrik çemberler üzerinde bir pergelle çalışan bir kimse, EBD dik üçgeninin $(30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$ olduğunu, dolayısıyla EDFV dörtgenini bu dik üçgene kurulmuş bir eşkenar dörtgen zannedebilir (V noktası, üst çember yayı ile AB simetrik eksenin kesim noktasıdır). Bu durumda $|ED| = 2a$ Br için $|BD| = a$ Br ve $|EB| = a\sqrt{3}$ Br uzunluklarına göre ölçümle $a\sqrt{3} - a \cong 4$ Br olması ve buradan $a \cong \frac{4}{\sqrt{3}-1} = 2(\sqrt{3}+1)$ Br ile birlikte $2a \cong 11$ Br yaklaşımı gözönüne alınırsa, $\sqrt{3}$ için $\sqrt{3} \cong \frac{7}{4}$ rasyonel yaklaşımı söz konusu olur.

Söz konusu bu ve burada dile getirmediğim diğer yaklaşımlar çizimi pergelle inceleyen herkesi şaşırtacak ve ham olanlar için yanıltacak sonuçlardır. Çünkü gerçekte

$$(21) \quad |EB| - |BD| = \frac{\sqrt{359} + 5\sqrt{5}}{2} - 11 = 4.063817605 \text{ Br}$$

olup, diğerleri de birer yaklaşım olmaktan öteye gitmez.

Görünmeyen Çemberler

Merkez göbek noktası olmak üzere karenin üst köşelerinden geçen bir çember çizilirse, bu çemberin yarıçapı $r_1 = \sqrt{12^2 + 15^2} = 3\sqrt{4^2 + 5^2} = 3\sqrt{41} = 19.20937271$ Br olur. Dikkat edilirse karekök içindeki 41 sayısı bir 2-kare toplamıdır ve $4k + 1$ formundadır. Fransız matematikçisi ***Pierre De Fermat***'a göre, bu formdaki sayıların 2 kare toplamı şeklinde birden fazla gösterimi vardır. Fakat 41 sayısının 2 kare toplamı karekök içindeki gibi olup tek türlüdür. Dolayısıyla bu çember alttaki birim karelerden geçerken göbek noktası hipotenüsün bir köşesi olmak üzere dik kenarları (12,15) ve (15,12) olan dik üçgenlerin diğer köşelerinden geçer.

İkinci olarak, merkezi göbek noktası olan ve karenin alt köşelerinden geçen bir çember çizilirse, bu çemberin yarıçapı ise $r_2 = \sqrt{15^2 + 18^2} = 3\sqrt{5^2 + 6^2} = 3\sqrt{61} = 23.43074903$ Br olur ve buradaki 61 sayısı $4k + 1$ formunda değildir. Fakat bu çember AB simetri ekseninden geçerken D noktasının çok yakınından geçer. Çünkü göbek ile D noktası arasındaki uzaklık, $29 - \frac{5\sqrt{5}}{2} = 23.40983006$ Br dir. Demek ki ***Ceasariano***, ***Da Vinci***'yi hatırlatırcasına bu çemberle 1 ondalık doğrulukla bir yaklaşımda bulunmuş!

Bilindiği üzere ***Da Vinci***, kendi çiziminde mimari bir metot kullanarak çemberini çizerken, karenin alt kenarına teğet olacak şekilde çizmişti. ***Ceasariano*** ise, ***Da Vinci***'den aşağı kalmamak, hatta daha üstün olduğunu göstermek için dahiyane bir metotla bu görünmeyen çemberi AB ekseni üzerinde alttaki çember yayıyla kesiştirmek değil de (ki geometrik olarak bu mümkün değil), ona mümkün olduğu kadar yaklaştırmıştır. Bu yaklaşım 1 ondalığa kadar doğrudur.

Adamın Vücudunun Bir Çember Çizmesi Olayı

Bu olay ***Vitruvius*** tarafından **"De Architectura"** adlı yapıtın bir bölümünde şöyle anlatılmaktadır:

"İnsan vücudunun merkez noktası doğal olarak göbeğidir. Çünkü bir adam elleri ve ayakları açık olarak arka üstü yattığı zaman el ve ayak parmaklarının uçları göbeğine yerleştirilen bir pergelin çizdiği dairenin çevresine değecektir. İnsan vücudundan dairesel bir şekil elde edildiği gibi kare bir şekil de çıkartılabilir. Çünkü ayak tabanının başın tepesine olan uzaklığını ölçer ve bu ölçüyü yana açılan kollara uygularsak, tıpkı tam kare düz yüzeylerde olduğu gibi genişliğin uzunluğa eşit olduğu görülecektir."

Da Vinci, kendi çiziminin ***Vitruvius***'un bu tarifine tıp tıp uyduğunu söyledi, ama çemberin çizimi doğru değildir. O, karenin üst kenarında adamın sağ elinin orta parmağının biraz gerisine bir nokta koymuş ve çemberin buradan geçmesi gerektiğini belirtmiş. Fakat sonradan ya unutmuş ya da çizimdeki maksimum hatayı belirtmek için çemberi bu noktanın biraz ilerisinde çizmiş. ***Ceasariano*** ise çiziminde bu çemberi çizmez, ama ***Vitruvius***'un tarifine uygun bir adam çizmeye çalıştığından bu olaya ilişkin bir yaklaşım sergilemiştir.

Adamın Vücudunun Bir Çember Çizmesi Olayı

***Da Vinci*'nin Çiziminde**	***Ceasariano*'nun Çiziminde**
Esas çember (1. çember) ile karenin üst kenarının kesim noktaları: Göbek noktası orijin olmak üzere, $x^2 + y^2 = \left(14\frac{1}{2}\right)^2$ çemberi ile $y = 9\frac{1}{2}$ doğrusunun kesim noktaları $A\left(-2\sqrt{30}, 9\frac{1}{2}\right)$ ve $A'\left(2\sqrt{30}, 9\frac{1}{2}\right)$ dir. **Yardımcı çember (2. çember) ile karenin üst kenarının kesim noktaları:** Adamın orta parmak uçlarının üzerinde bulunduğu nokta-	**Esas çember ile karenin üst kenarının kesim noktaları:** Yine göbek noktası orijin olmak üzere, $x^2 + y^2 = 18^2$ çemberi ile $y = 12$ doğrusunun kesim noktaları $A\left(-6\sqrt{5}, 12\right)$ ve $A'\left(6\sqrt{5}, 12\right)$ dir. **Yardımcı çember ile karenin üst kenarının kesim noktaları:** Adamın orta parmak uçlarının üzerinde bulunduğu noktalar $B\left(-15, 6\frac{1}{2}\right)$

lar B $\left(-12{,}5\frac{1}{2}\right)$ ve B′ $\left(12{,}5\frac{1}{2}\right)$ dir ve adam kollarını bir pergel gibi yukarıya doğru hareket ettirdiğinde, adamın orta parmak uçlarının çizdiği çemberin merkezi M $\left(0{,}4\frac{1}{2}\right)$ ve yarıçapı

$$r = |MB| = \sqrt{145} = 12.04159458 \text{ El}$$

dir. O halde bu çemberin denklemi

$$x^2 + \left(y - 4\frac{1}{2}\right)^2 = 145$$

olup, A ve A’ noktaları da bu çemberin üzerinde olur.

Sonuç: ***Da Vinci***, çiziminin ***Vitruvius***’un tarifine tıpa tıp uygun olduğunu şu sözlerle belirtmiştir: *“İnsan bedeninin merkezi göbektir. Eğer bir insan sırtüstü yatıp ellerini ve ayaklarını ileri uzatırsa göbeğini merkez alan bir pergelle daire çizildiğinde el ve ayak parmaklarının ucu bu daireye değecektir. Aynı şekilde göbeği bir karenin köşegenlerinin kesişme noktasında kalacaktır.”* Yani ona göre, kare içindeki adam kollarını yukarı doğru ve ayaklarını yana doğru bir pergel gibi hareket ettirdiğinde, adamın vücudu göbek merkez olmak üzere bir çember çizermiş. Söz konusu bu çember şekildeki çember olup, bu çemberin karenin üst kenarını kestiği A ve A’ noktaları ***Da Vinci*** tarafından doğru olarak verilmemiş; bu noktalardan yalnızca biri ***Da Vinci*** tarafından adamın sağ el orta parmağının biraz gerisine nokta konulmak suretiyle A noktası olarak gösterilmiştir.

ve B′ $\left(15{,}6\frac{1}{2}\right)$ dir ve adam kollarını bir pergel gibi yukarıya doğru hareket ettirdiğinde, adamın orta parmak uçlarının çizdiği çemberin merkezi M $\left(0{,}5\frac{3}{4}\right)$ ve yarıçapı

$$r = |MB| = \frac{3}{4}\sqrt{401} \text{ Br} = 12.01499064 \text{ El}$$

dir. O halde bu çemberin denklemi

$$x^2 + \left(y - 5\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3609}{16}$$

olup, A ve A’ noktaları bu çemberin üzerinde değildir.

Sonuç: ***Ceasariano*** da ***Da Vinci*** gibi ***Vitruvius***’un tarifine tıpa tıp uygun mükemmel bir adam çizmeye çalıştı. Fakat onun çiziminde adamın ayaklarının çizdiği çember karenin üst kenarını A ve A’ noktalarında keserken, bu noktalar adamın ellerinin çizdiği çember üzerinde değildir. Dolayısıyla ***Ceasariano***’nun çizimi ***Vitruvius***’un tarifine bir yaklaşım gösterir.

Not 5 (Ölçümler). Her iki çizimde adamın köprücük kemikleri arasındaki çizgi ile meme başlarından geçen çizgi arasındaki uzaklık 2 El’dir. Aynı şekilde, adamın köprücük kemiklerinden geçen çizginin karenin üst kenarına uzaklığı her ikisinde de 4 El’dir. Çünkü bu uzaklık ***Da Vinci***’ninkinde 4 El iken ***Ceasariano***’nunkinde 5 Br = 4 El dir.

Fakat kare içindeki adamın orta parmak uçlarının karenin üst kenarına uzaklığı ***Da Vinci***’nin çiziminde (ki ***Da Vinci*** burada yalnızca adamın sağ el orta parmağı göstermekle birlikte, bu parmağı adamın köprücük kemiklerinden geçen çizgiyle aynı seviyede bir tutmuştur) 4 El iken ***Ceasariano***’nunkinde $5\frac{1}{2}$ Br $= 4\frac{2}{5}$ El dir. Bu durumda adamın kareye değen orta parmak uçlarının göbekten seviyesi ***Da Vinci***’de $9\frac{1}{2}$ El $-$ 4 El $= 5\frac{1}{2}$ El ve ***Ceasariano***’da 12 Br $- 5\frac{1}{2}$ Br $= 6\frac{1}{2}$ Br olup, adamın parmak uçlarının yerini gösteren B ve B’ noktalarının koordinatları ***Da Vinci***’de B $\left(-12{,}5\frac{1}{2}\right)$ ve B′ $\left(12{,}5\frac{1}{2}\right)$ ve ***Ceasariano***’da $\left(-15{,}6\frac{1}{2}\right)$ ve B′ $\left(15{,}6\frac{1}{2}\right)$ olur.

İkinci olarak, her iki çizimdeki adamın kollarının çizdiği çemberin merkezi, simetri ekseni üzerinde adamın köprücük kemikleri ile meme başlarından geçen çizgilerin orta noktası olduğundan, bu, her ikisinde $4\text{ El}+1\text{ El}=5\text{ El}$ demektir. O halde göbek noktası orijin olmak üzere bu merkez ***Da Vinci***'de $9\frac{1}{2}-5=4\frac{1}{2}$ El nedeniyle $\mathrm{M}\left(0,4\frac{1}{2}\right)$ ve ***Ceasariano***'da $12\text{ Br}-5\text{ El}=12\text{ Br}-6\frac{1}{4}\text{ Br}=5\frac{3}{4}$ El nedeniyle $\mathrm{M}\left(0,5\frac{3}{4}\right)$ noktası olur. Buna göre ***Ceasariano***'nun çiziminde MAH ve MAL dik üçgenleri "El" cindinden (5,12,13) olur ki bu, ***Da Vinci***'nin çiziminde çember ile kare arasındaki ilişkiyi verir.

Kenarları Rasyonel Olan Dik Üçgenler

Her iki çizimde El cinsinden (3,4,5) ve (5,12,13) ortak dik üçgenleri vardır.