1. Trapez Metodu. Genel olarak $\forall p \in \mathbb{N}$ için $q|p$ ya da $q = 1, \cdots, p$ bölenlerine göre aralığın $h = b - a$ boyu için

$$(1)\quad T_q = h\overline{\sum_{k=0}^{q-1} f_{\frac{p}{q}k}} = \frac{h}{q}\sum_{k=0}^{q-1} f_{\frac{p}{q}k}\,, U_q = h\overline{\sum_{k=0}^{q-1} f_{f_{\frac{p}{q}\left(k+\frac{1}{2}\right)}}} = \frac{h}{q}\sum_{k=0}^{q-1} f_{\frac{p}{q}\left(k+\frac{1}{2}\right)}$$

şeklinde T_q trapez formülü ve U_q orta nokta formülü vardır. Bu formüller, ***Werner Romberg***'in 1955 tarihli "*Vereinfachte numerische Integration (Basitleştirilmiş Sayısal İntegral)*" [1] tezinde kullandığı formüllerdir ve başka hiçbir kaynakta görülmez. Ama bana öyle görünüyor ki, trapez yöntemi Almanya'da 20. yy'ın başında (ve muhtemelen Nazi döneminde de) ***Romberg*** tarafından verilen bu formüllerle anlaşılıyordu. ***Romberg*** tezinde bu formülleri $p = 8$'in $q = 1,2,4,8$ bölenlerine göre yalnızca ana hatlarıyla verdi, dolayısıyla yöntem anlaşılamadığından hemen terk edildi ve (1)'dekine eşit olan (3)'teki trapez formülü kullanılmaya başlandı. Günümüzde de yalnızca (3)'teki ilk formül olan trapez formülü kullanılmaktadır!

Şimdi ***Romberg***'in anlaşılamayan bu formüllerini günümüzdekine dönüştürürsem şu sonuçlar çıkar: Eğer (1)'deki toplamlardaki fonksiyonlarda

$$(2)\quad f_{\frac{p}{q}k} = f\left(a + \frac{p}{q}k.\frac{h}{p}\right) = f\left(a + k.\frac{h}{q}\right) =: f_k, f_{\frac{p}{q}\left(k+\frac{1}{2}\right)} = f\left(a + \frac{p}{q}\left(k+\frac{1}{2}\right).\frac{h}{p}\right) = f\left(a + \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{q}\right) =: f_{k+\frac{1}{2}}$$

dönüşümlerini kullanırsam trapez ve orta nokta formüllerini

$$(3)\quad T_q = \frac{h}{q}\sum_{k=0}^{q-1} f_k\,, U_q = \frac{h}{q}\sum_{k=0}^{q-1} f_{k+\frac{1}{2}}$$

şeklinde günümüzdeki gibi yazmış olurum. Bu formüller Prof. ***Byrnjulf Owren*** (Norveç Bilim ve Teknoloji Üniversitesi) tarafından 2011 tarihli "*Werner Romberg: Vereinfachte numerische Integration*" tezinin 4. (dergide 152) sayfasında verildi. Ayrıca bu formülleri ***Romberg***'in tezindeki formüllerinden nasıl elde edildiğini RİK 3'ün 5-10. sayfalarında yer alan "*1.6. Romberg'in Orijinal Metodu*"nda 3 dönüşümle vermiştim ama şimdiki en kısa şekilde oldu!

Romberg'e göre bu formüller için

$$(4)\quad T_{2q} = \frac{T_q + U_q}{2}$$

aritmetik ortalaması mevcuttur. Bu özellik 19. yy'da yakınsaklık hızı bu yaklaşıklıkların ağırlıklı ortalamalarıyla arttırılırken (ekstrapolasyonelleştirilirken) es geçilmiş ve günümüzde de terk edilmiştir, çünkü (3)'teki trapez formülünün Richardson ekstrapolasyonu altında çalışması yeterli görülmektedir. Fakat ***Romberg***'in 2-trapez yaklaşıklığı için verdiği bu özellik son derece önemlidir, çünkü bu özelliği 2018'de p-trapez yaklaşıklığı için genelleştirdim!

Şu hâlde ***Romberg***'in bu metodu tezinde nasıl kullandığına geçebiliriz.

1.1. *Romberg*'in Örneği. Metoda göre $p = 8$'in $q = 1,2,4,8$ bölenlerine göre T_q trapez formülü ve U_q orta nokta formülü şu şekilde olurlar:

$$(5)\quad \begin{aligned}
T_1 &= h\overline{\sum_{k=0}^{0} f_{8k}} = h\sum_{k=0}^{0} f_{8k} = hf_0, & U_1 &= h\overline{\sum_{k=0}^{0} f_{8k+4}} = h\sum_{k=0}^{0} f_{8k+4} = hf_4,\\
T_2 &= h\overline{\sum_{k=0}^{1} f_{4k}} = \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{1} f_{4k} = \frac{h}{2}(f_0 + f_4), & U_2 &= h\overline{\sum_{k=0}^{1} f_{4k+2}} = \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{1} f_{4k+2} = \frac{h}{2}(f_2 + f_6),\\
T_4 &= h\overline{\sum_{k=0}^{3} f_{2k}} = \frac{h}{4}\sum_{k=0}^{3} f_{2k} = \frac{h}{4}(f_0 + f_2 + f_4 + f_6), & U_4 &= h\overline{\sum_{k=0}^{3} f_{2k+1}} = \frac{h}{4}\sum_{k=0}^{3} f_{2k+1} = \frac{h}{4}(f_1 + f_3 + f_5 + f_7),\\
T_8 &= h\overline{\sum_{k=0}^{7} f_k} = \frac{h}{8}\sum_{k=0}^{7} f_k = \frac{h}{8}(f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7), & U_8 &= h\overline{\sum_{k=0}^{7} f_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{h}{8}\sum_{k=0}^{7} f_{k+\frac{1}{2}} = \frac{h}{8}\left(f_{\frac{1}{2}} + f_{\frac{3}{2}} + f_{\frac{5}{2}} + f_{\frac{7}{2}} + f_{\frac{9}{2}} + f_{\frac{11}{2}} + f_{\frac{13}{2}} + f_{\frac{15}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Bu yaklaşıklıklardaki h farkları için şuna dikkat etmek gerekir: Toplamların dışında $h = b - a$ iken fonksiyonların içlerinde $h = \frac{b-a}{8}$ yani $r = 0,1,2,3,4,5,6,7,\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{9}{2},\frac{11}{2},\frac{13}{2},\frac{15}{2}$ için $f_r = f\left(a + r.\frac{h}{8}\right)$'dir. Yani bu yaklaşıklıkları h farklarına göre bu şekilde hesapladığınız zaman ***Romberg***'in hesapladığı gibi hesaplamış olursunuz ki bunları nasıl deşifre ettiğimi RİK 3'teki S. 8-10'daki "*1.6.1. Romberg'in Metodu'nun Deşifrasyonu*" ve RİK 4'teki S. 23-24'teki "*1.2.1. Romberg Metodu Hakkındaki İlk Gözlemim*" göstermiştim. Tek bir kusurum var (ki bu aslında bir hata değil ***Romberg***'in uygulamasından elde edilen sonuçtur): (1.31) ve

[1] ***Romberg***'in orijinal tezi "*Vereinfachte numerische Integration, Det Konglige Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger, Bind 28, 1955, Nr. 7*"dedir. Bu orijinal makaleyi 23.12.2018, 19:03'te bana gönderen Prof. Dr. ***Byrnjulf Owren***'e en içten teşekkürlerimi iletirim, çünkü bu teze ulaşabilmek kolay değildi. Araştırmalarıma göre bu tez 3 yerde geçiyordu (Bkz. "*1.6.4. Romberg'in Orijinal Makalesi Peşinde!*", S. 12). Hepsiyle temas kurdum: İlkin uzun bir zamanımı alan 3. yerdeki ResearchGate'te olmadığı açıktı. Orada sadece bir link vardı ama makalenin kendisi yoktu. İnanmazsanız orada verdiğim linkten bu durumu kontrol edebilirsiniz. 2. yerdeki Heidelberg Üniversitesi Kütüphanesi ile bazı yazışmalarım oldu ve kütüphaneye gelmemi teklif ettiler. Türkiye'den aradığımı ve makaleyi ücreti mukabilinde pdf olarak gönderilmesini istediğim halde bu çağda bu inanılmaz teklifi yaptılar. Büyükbabası Alman olan (bkz. "*Ailesi ve kökeni*") ***Trump***'a göre "*AB bizi soyuyor. Avrupa dost gibi görünüyor ama öyle değil*". ***Trump***'ı destekleyen Rus asıllı Amerikalı aktör ve yazar ***Denis Danilov*** (ki filmleri arasında "*Büyük Soygun (2014)*" da var), X'teki hesabında 3.4.2025 tarihli mesajında ABD'nin ülkelere yeni tarifelerini verdikten sonra altına ***Trump***'ın şu sözlerini aktardı: "*Bütçelerini destekledik, ordularının masraflarını karşıladık. Şimdi bu sona erecek. Geçen yıl **Biden**'ın döneminde, ticaret açığı 1.2 trilyon dolara ulaştı, bu eşi benzeri görülmemiş bir durum. Son 50 yıldır birçok ülke bizi soyuyor. Bu bugün sona eriyor ve bir daha asla olmayacak. ABD'nin altın çağı başlıyor. Bugün tarihimizdeki en önemli günlerden biri. Bize kötü davranan tüm ülkeleri sorumlu tutacağız…*". Son olarak NTNU'ya başvurmak zorunda kaldım ve 2011'de ***Romberg***'in makalesi hakkında bir makale yazan ***Byrnjulf Owren***'den 23.12.2018, 04:10'da (Trondheim/Norveç'te 02:10) orijinal makaleyi istedim. Ne oldu biliyor musunuz? Hiç abartısız anlatıyorum: ***Owren Romberg***'in orijinal makalesini Heidelberg Üniversitesi Kütüphanesi'ndeki gibi NTNU'daki kütüphanedeki muhtemelen tozlu anılan basılı (dijital değil fiziksel) dergiden alıp pdf'ye çevirdi (ki 2011'deki makalesinde sadece ilk sayfasını almıştı) ve 09:11 (Trondheim'da 07:11) bana gönderdi. ***Owren***, e-postadaki mesajında makalenin ekte olduğunu söyleyerek en iyi dileklerini sunuyordu. Kendisine buradan bir kez daha teşekkür ederim. Çünkü ***Romberg***'in makalesini dijital olarak bulmak mümkün değildi. Bu nedenle web sitemde yayımladığım ***Romberg***'in orijinal makalesi ve yeniden düzenlediğim şekli dijital olarak ilk baskılardır!

(1.42)'deki toplamların dışındaki kesirlerin paylarında 1 yerine $h = b - a$ yazılması gerekiyordu ama o yaklaşıklıkları f fonksiyonlarına göre çözerken ***Romberg***'in örneğinde $h = 1 - 0 = 1$ idi ve şimdi bu hatayı (5)'te düzelttim!

İşte bu yaklaşıklıklar arasında (4)'e göre $q = 1,2,4,8$ için

$$(6)\quad T_{2q} = \frac{T_q + U_q}{2}$$

aritmetik ortalama bağıntısı vardır. Bunun için ***Romberg*** tezinde ilkin T_1 ve U_1'i hesapladıktan sonra bu bağıntıya göre T_2'yi hesaplar ve sonra U_2'yi hesapladıktan sonra T_4'ü ve sonunda U_4'ü hesapladıktan sonra T_8'i hep bu bağıntıya göre hesaplar. Sonra bu yaklaşıkları tablonun ilk sütununa sıralı bir şekilde yazar ve bunlara Richardson ekstrapolasyonunu uygulayarak tablodaki 2-4. sütunlardaki değerleri elde eder!

1.1.1. E-ATA Ekstrapolasyonunun Uygulanması. Buna göre ilkin ***Huygens***'in 1654'teki algoritmasını ya da (2.50)'deki Richardson ekstrapolasyonunu $k = 1$ için trapez yaklaşıklıklarına

$$(7)\quad S_2 = T_2 + \frac{T_2 - T_1}{2^2 - 1} = \frac{4T_2 - T_1}{3}, S_4 = T_4 + \frac{T_4 - T_2}{2^2 - 1} = \frac{4T_4 - T_2}{3}, S_8 = T_8 + \frac{T_8 - T_4}{2^2 - 1} = \frac{4T_8 - T_4}{3}$$

ve orta nokta yaklaşıklıklarına

$$(8)\quad V_2 = U_2 + \frac{U_2 - U_1}{2^2 - 1} = \frac{4U_2 - U_1}{3}, V_4 = U_4 + \frac{U_4 - U_2}{2^2 - 1} = \frac{4U_4 - U_2}{3}$$

şeklinde uygular.

İkinci olarak yakınsaklığı hızlandırılmış ya da bu ilk ekstrapolasyonik trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarına da Richardson ekstrapolasyonunu $k = 2$ için

$$(9)\quad R_4 = S_4 + \frac{S_4 - S_2}{2^4 - 1} = \frac{16S_4 - S_2}{15}, R_8 = S_8 + \frac{S_8 - S_4}{2^4 - 1} = \frac{16S_8 - S_4}{15}, W_4 = V_4 + \frac{V_4 - V_2}{2^4 - 1} = \frac{16V_4 - V_2}{15}$$

ve üçüncü olarak bu ikinci ekstrapolasyonik trapez yaklaşık çiftine Richardson ekstrapolasyonunu $k = 3$ için

$$(10)\quad Q_8 = R_8 + \frac{R_8 - R_4}{2^6 - 1} = \frac{64S_4 - S_2}{63}$$

şeklinde uygular. Fakat ***Romberg*** (5)'teki trapez ve orta nokta yaklaşıklıklarına (2.50)'deki Richardson ekstrapolasyonunu ortak bir şekilde değil S, V, R ve Q değişkenlerini trapezin T'sinden itibaren trapez yaklaşıklarında T, S, R, Q ve orta nokta yaklaşıklıklarında U, V, W, (X) şeklinde alfabetik olarak atayarak yapar.

Bu yaklaşık değerler aşağıdaki tabloda listelenmiştir:

Artan Sıralı Yaklaşık Değerler Tablosu (Tabelle der Näherungswerte wachsender Ordnung)				
Aralık Uzunluğu (Intervall-Länge)	**Kalan Terim (Rest Prop.)**			
	h^2	h^4	h^6	h^8
8h	$T_1 = 0{,}785398163$			
	$U_1 = 1{,}110720735$			
4h	$T_2 = 0{,}948059449$	$S_2 = 1{,}002279878$		
	$U_2 = 1{,}026172153$	$V_2 = 0{,}997989293$		
2h	$T_4 = 0{,}987115801$	$S_4 = 1{,}000134584$	$R_4 = 0{,}999991566$	
	$U_4 = 1{,}006454543$	$V_4 = 0{,}999882006$	$W_4 = 1{,}000008187$	
h	$T_8 = 0{,}996785172$	$S_8 = 1{,}000008296$	$R_8 = 0{,}999999876$	$Q_8 = 1{,}000000008$
	$U_8 = 1.001608189$	$V_8 = 0.999992737$	$W_8 = 1.000000120$	$X_8 = 0.999999991$

Tablo 1. ***Romberg***'in tablosu. Bu tabloda ***Romberg*** $I = 1$'e eriştiği ilk değer olan Q_8'de tabloyu durdurur. Oysa X_8'i de hesaplaması gerekiyordu, çünkü aralık uzunluğu sütunundaki her satır bir çift T trapez ve U orta nokta yaklaşıklıklarından oluşuyordu. Yani h'de 1 satır eksiktir ve bunun için son satırı ekledim. Tablodaki değerler MADAS ATG-20 adlı 10 basamaklı, dolayısıyla sondaki rakamlar yuvarlatılmış bir hesap makinesinde hesaplanmıştır (Bkz. "*Romberg'in MADAS ATG-20'si*", S. 38). Buna göre tablodaki ilk sütundaki aralık uzunluğu $8h = 1$'dir ve h^2, h^4, h^6 ve h^8 ifadeleri Richardson ekstrapolasyonundaki katsayıları sıfırlamaya dayanan eliminasyon yöntemine göre kalanları gösterir.

Romberg, 2. tablonun altında şu açıklamaları yapar: "*Q_8'in 8 ondalık doğrulukla $I = 1$'e (ve **Ole Amble**'ın dış noktalardan oluşan yaklaşıklıkları için 2. tablodaki $\hat{Q}_8$'in 10 ondalık doğrulukla bile $I = 1$'e) karşılık geldiğini görebiliriz. Hangi yöntemi kullanacağınız tamamen f_k'nın nasıl hesaplanabileceğine bağlıdır. Eğer bulmaları kolaysa, daha ince bir bölme kullanmak daha iyidir. Sayısal hesaplamaları çok fazla çalışma gerektiriyorsa, burada belirttiğimiz gibi yüksek yaklaşımlı bir yöntem önerilir.*"

Eğer ***Romberg***'in bu son uyarısı gereğince 14.5.2003'te (ki bu tarih ***Romberg***'in 5.2.2003'teki ölümünden itibaren 68. günü gösterir) keşfettiğim (2.39)'daki E-ATA ekstrapolasyonundan $m = 2$ için elde edilen (2.51)'deki ekstrapolasyonumuzu kullanırsak Tablo 1'dekinden daha iyi yaklaşık değerler elde ederiz:

Artan Sıralı Yaklaşık Değerler Tablosu				
Aralık Uzunluğu	**Kalan Terim**			
	h^2	h^4	h^6	h^8
64h	$T_1 = 0.78539816339744830961 \ldots$			
	$U_1 = 1.1107207345395915617 \ldots$			
32h	$T_4 = 0.98711580097277541227 \ldots$	$S_4 = 1.0005636434777972191 \ldots$		
	$U_4 = 1.0064545427995639 32 \ldots$	$V_4 = 0.99950346335022875672 \ldots$		
16h	$T_{16} = 0.99919668048507229329 \ldots$	$S_{16} = 1.0000020724525587 52 \ldots$	$R_{16} = 0.99999987021324409137 \ldots$	
	$U_{16} = 1.0004017081549652956 \ldots$	$V_{16} = 0.99999818584532538658 \ldots$	$W_{16} = 1.0000001259335414518 \ldots$	
8h	$T_{64} = 0.99994980009210122621 \ldots$	$S_{64} = 1.0000000080659031 55 \ldots$	$R_{64} = 0.99999999997026921156 \ldots$	$Q_{64} = 1.0000000000019559087 \ldots$
	$U_{64} = 1.0000251001429512867 \ldots$	$V_{64} = 0.99999999294215035 28 \ldots$	$W_{64} = 1.0000000000288045683 \ldots$	$X_{64} = 0.99999999999805860086 \ldots$

Tablo 2. Bu yeni tablodaki aralık uzunluğu $64h = 1$'dir ve h^2, h^4, h^6 ve h^8 ifadeleri (2.51)'deki ekstrapolasyondaki katsayıları sıfırlamaya dayanan eliminasyon yöntemine göre kalanları gösterir. Buna göre R_{64}'ün 10 ondalığı 9 ve W_{64}'ün 10 ondalığı 0 iken Q_{64}'ün 11 ondalığı 1 ve X_{64}'ün 11 ondalığı 9'dur (Bkz. "*Romberg İntegrali 2: Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım*").

Fakat bu tabloyu oluşturabilmek için ***Romberg***'in Tablo 1'de hesaba katmadığı T_{16}, T_{64} trapez ve U_{16} orta nokta yaklaşıklıklarının da hesaplanması gerekir. Ayrıca trapez ve orta nokta yaklaşıklıkları için ***Romberg***'in belirttiği gibi Tablo 1 ve 2'dekinden daha yüksek bir yaklaşım yöntemi olarak E-ATA ekstrapolasyonumuzda m'nin değerleri arttırılarak elde edilen ekstrapolasyonları verebiliriz!

1.2. *Romberg*'in Diğer Örnekleri. ***Romberg*** tezinde yukarıdaki örnekten hareketle nasıl genelleştirilebileceğini de gösterdi. Tezinde $[a,b]$ aralığını 8n eşit parçaya bölerek $h = \frac{b-a}{8n}$ farkına göre $s = 1,2,\cdots,8n-1$ için $s = f(a+sh)$ fonksiyon değerlerinin mevcut olduğunu ve $n = 1$ için bu fonksiyon değerlerine göre (5)'teki T_q trapez ve U_q orta nokta formüllerini verdi. Bu ise $p = 8n = 2^m$'ye karşılık $q = 1,2,4,8,\cdots,2^m$ bölenleri demekti ve ***Romberg*** n sayısını bu şekilde yani hep 2'nin kuvvetleri olarak düşünüyordu. Yani ona göre bir sonraki örnek $m = 4$, ondan sonraki örnek $m = 5$ olacak ve bu böyle devam edecekti.

Şu hâlde bu işleme göre $\forall m \epsilon \mathbb{N}$ için $p = 2^m$ ve $i = 0,1,\cdots m$ için $q = 2^i$ bölenleriyle (1)'den

$$(11)\quad T_{2^i} = h\overline{\sum_{k=0}^{2^i-1} f_{2^{m-i}k}} = \frac{h}{2^i}\sum_{k=0}^{2^i-1} f_{2^{m-i}k}\,, U_{2^i} = h\overline{\sum_{k=0}^{2^i-1} f_{f_{\frac{p}{q}\left(k+\frac{1}{2}\right)}}} = \frac{h}{2^i}\sum_{k=0}^{2^i-1} f_{2^{m-i}\left(k+\frac{1}{2}\right)}$$

formülleri elde edilir ki bu toplamlardaki farkları

$$(12)\quad \frac{h}{2^i} = \frac{b-a}{2^i} = h_i$$

şeklinde ortaklaştırırsak (ki böylece $T_{2^i} = T_i$ ve $U_{2^i} = U_i$ şeklinde yazabiliriz) (2)'ye göre

$$(13)\quad f_{2^{m-i}k} = f\left(a + \frac{2^m}{2^i}k.\frac{h}{2^m}\right) = f\left(a + k.\frac{h}{2^i}\right) = f(a+kh_i) = f_k, f_{2^{m-i}\left(k+\frac{1}{2}\right)} = f\left(a + \frac{2^m}{2^i}\left(k+\frac{1}{2}\right).\frac{h}{2^m}\right) = f\left(a + \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2^i}\right) = f\left(a + \left(k+\frac{1}{2}\right)h_i\right) = f_{k+\frac{1}{2}}$$

Resim 1. ***Werner Romberg***'in *"Vereinfachte numerische Integration"* adlı makaleyle amacı, standart bir sayısal integral yöntemi olan trapez kuralının yakınsama hızını artırmaktı. ***Lewis Fry Richardson*** 1927'de bugün "Richardson Ekstrapolasyonu" olarak adlandırılan yöntemin özel bir durumunu ortaya koyduğu için bu amaca sahip ilk kişi o değildi. Ancak, burada söz konusu olan temel fikirler bundan çok daha eskiye dayanmaktadır; zira ***Colin Maclaurin*** 1742'de benzer fikirleri kullanmıştı ve hatta bundan önce ***Christiaan Huygens*** 1654'te *"De Circuli Magnitudine Inventa"*adlı eserinde π'yi hesaplama yöntemlerinde temel olarak Richardson ekstrapolasyonunu kullanmıştı.

fonksiyonlarını aynı farka göre yazmış olur ve böylece trapez ve orta nokta formüllerini en sade şekilde şöyle bulmuş oluruz:

$$(14)\quad T_i = h_i\sum_{k=0}^{2^i-1} f_k\,, U_i = h_i\sum_{k=0}^{2^i-1} f_{k+\frac{1}{2}}.$$

Bunlar RİK 3'teki (1.43)'teki formüllerdir. Bu yaklaşıklıklardan sadece trapezdeki ilk değer $k = 0$ için $f_0 = f(a+0.h_i) = f(a)$ alınamaz, çünkü trapez metoduna göre

$$(15)\quad f_0 = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

şeklinde alınmak zorundadır. ***Romberg*** tezinde bunu söylemeden uygulamasını yapar ama ***Owren*** makalesinde bunun böyle olduğunu söyler! Benim anlamadığım şey şu: 17. yy'da ***Kepler*** (1615), ***Cavalieri*** (1639) ve daha sonra ***Gregory***, 18. yy'da ***Simpson***, ***Newton-Cotes***, ***Euler-Maclaurin***, 19. yy'da ***Milne***, ***Weddle***, ***Piobert***, ***Parmentier***, ***Sheppard***, 20. yy'da ***Richardson***, ***Ole Amble*** (ki hepsini saymadım ve Norveçli ***Ole Amble Piobert***, ***Parmantier*** ve ***Sheppard***'ın en son uzantısı olup en mükemmel yaklaşıklıkları vermişti. Bkz. *"Genelleştirilmiş Piobert-Parmentier Metodu"*, *"Genelleştirilmiş Ole Amble Algoritması"*, *"Piobert-Parmentier Metodunun Q Üzerinde Genelleştirilmesi"*) hep aynı şekilde, günümüzdeki gibi modern şekilde verirlerken ***Romberg*** neden bu yaklaşıklıkları hesabı zorlayıcı şekilde verdi. Bana göre bu durum ***Romberg***'den kaynaklanmıyor; Heidelberg'de aldığı eğimden geliyordu. O orada 1928-1933'te matematik ve fizik eğitimi almıştı ve işte bu, benim takıntım ve Almanların çözmesi bir problem. Çünkü ***Romberg***'in kullandığı yöntem yeni bir yazım şeklinden çok, bir ekolün ürünü olarak gözükür ve o da bunu Heidelberg'de öğrenciyken almıştı. Ama bu ekol Nazi döneminden sonra ortadan kayboldu!

Romberg 1933'te Münih Üniversitesi'nde ***Arnold Sommerfeld***'in danışmanlığında doktorasını tamamladı; tezi *"Zur Polarisation des Kanalstrahllichtes (Kanal Işık Işınlarının Polarizasyonu Hakkında)"* başlığını taşıyordu. Münih'te diğerlerinin yanı sıra ***Oskar Perron*** ve ***Constantin Carathéodory*** ile matematik çalıştı. 1933'te uzaktan Yahudi kökenli olan ***Romberg***, Almanya'nın yeni Nasyonal Sosyalist hükümetinin terminolojisinde "yarı-Yahudi" olarak sınıflandırıldı (Bkz. *"Yahudi Matematikçilerin Listesi"*. ***Romberg***'in Yahudi kökenli olduğunu Wikipedia'daki 28.03.2025, 21:34 (UTC) tarihinde güncellenen "***Romberg***" sayfasından öğreniyorum. Yahudi matematikçiler listesine gelince, bence bir yakıştırmadan ibaret ve benzer bir listeyi Wikiwand'da da bulabilirsiniz. Araştırmalarıma göre ***Romberg***'e Almanya'dayken "Yarı Yahudi" denildiğini *"Nazi Almanya'sından Kaçan Matematikçiler"* kitabının yazarı ***Reinhard Siegmund-Schultze***'nin anılarından biliyoruz. ***Siegmund-Schultze*** onu 58 kişilik göçmen bilim adamları listesinde 26. sıraya yerleştirir ve ***Romberg***'in *"SPD ve KPD'nin Nazilere karşı ortak mücadelesini destekleyen SAP'a yakındım. Yaklaşık 10-20 öğrenciydik ve bu yüzden Naziler tarafından tanınıyorduk"* kritik açıklamasını ilk ağızdan duydu (Bkz. *"1.6. Romberg'in Orijinal Metodu"*, S. 5-6). 1996'da ***Seiji Fujino***'nun kendisiyle yaptığı röportajda da benzer ifadelere rastlanır: *"Norveç'in Trondheim şehrinde yaşayan bir tanıdığımdan gelen e-postaya göre, Romberg İntegrali'ni bulan **W. Romberg** şu anda Almanya'nın Heidelberg şehrindeymiş ve onun meşhur tezinin Trondheim dergisinde yayınlanmasının sebebi Alman Sosyal Demokrat Partisi'ne (SPD) üye olduğu için Nazi Almanya'sı döneminde Norveç'e kaçmasıymış"* (Bkz. *"Fujino'nun Röportajından Bir Kesit"*, S. 10). Yani ***Romberg*** bir Yahudi değildi solcuydu ve Naziler kendilerine muhalif olan herkesi karalardı. 2021'de Trondheim'daki Prof. ***Byrnjulf Owren*** ile bazı yazışmalarım oldu ve bana ***Romberg*** hakkında yardımcı olmasını istemiştim. İnanır mısınız bu mesajı attıktan sonra Norveç akademi dünyası ayağa kalktı. O sırada Agder Üniversitesi'nde bulunan yazar ***Reinhard Siegmund-Schultze*** ***Werner Romberg***'in oğlu ***Hans Romberg*** ile en son 2005'te bağlantı kurduğunu ve 3 tane e-posta adresini verdikten sonra 60'lı yaşların başında olması gerektiğini söyledi. E-posta adreslerinden anlaşıldığı kadarıyla ***Hans Romberg*** Almanya'da yaşıyor ve doktormuş. Aynı üniversitedeki Prof. ***Rolf Thomas Nossum*** da bunlara ek olarak ***Hans Romberg***'in web sitesi adresini verdi ama sadece telefon numarasının görüntülendiğini bildirdi. ***Hans Romberg***'e soracağım ama ***Romberg***'in Yahudi olmadığı açıktır. Çünkü o iflah olmaz bir solcuydu). Bu nedenle Sovyetler Birliği'ne göç etmek istedi ve 1933 yazında Münih'ten kaçtı, 1934'ten 1937'ye kadar Dnipro (o zamanki adıyla Dnipropetrovsk) Üniversitesi'nde teorik fizikçi olarak çalıştı. 1938'de Prag'daki Astrofizik Enstitüsü aracılığıyla Norveç'e gitti ve Oslo Üniversitesi'nde ***Egil Hylleraas***'ın asistanı oldu. Ayrıca kısa bir süre Trondheim Teknik Üniversitesi'nde, orada bir Van de Graaff jeneratörü inşa etmekte olan ***Johan Holtsmark*** ile birlikte çalıştı. Almanların Norveç'i işgal etmesiyle İsveç'teki Uppsala'ya kaçtı. 1941'de Nazi Almanyası tarafından Alman vatandaşlığından çıkarıldı ve 1943'te doktorasının denkliği iptal edildi. 1947'de Norveç vatandaşı oldu ve küçük bir şehir olan Trondheim onu bağrına bastı!

II. Dünya Savaşı'ndan sonra, 1949'dan 1968'e kadar Trondheim'da profesörlük yaptı ve bu sırada, 1955'te anılan *"Vereinfachte numerische Integration (Basitleştirilmiş Sayısal İntegral)"* tezini yazdı. Bu tezdeki trapez ve orta nokta formüllerinin yazım şekli Heidelberg Üniversitesi'nde matematik eğitimi alırken aynen öğrendiği gibiydi. Yani bu onun kafasından çıkan yeni bir yazım şeklinden çok, Heidelberg Üniversitesi'nin matematik ekolünden geliyordu ve ***Romberg*** onu kafasında taşıdığı için 1955'teki tezine yansıttı. Aynı yazım şeklini Trondheim'daki ***Ole Amble***'ın *"A Set of Formulas for Numerical Integration, DKNVS, BD. 25, 1952 NR. 10, 517.61"* adlı tezindeki yöntemde de kullandı (Bkz. *"Nihayet Ole Amble'ın tezini bulduk!"*).

Bu satırları yazdıktan sonra ***Hans Romberg***'e 17:24, 17:25 ve 17:26'da 3 tane e-posta gönderdim ve biri dolu olduğundan geri döndü:

*"Sayın **Hans Romberg**, e-posta adreslerinizi babanız **Werner Romberg** ile röportaj yapan Agder Üniversitesi'ndeki **Reinhard Siegmund-Schultze**'den aldım. Çünkü o sırada oradaydı. Bundan önce Trondheim'da çalışan Prof. **Byrnjulf Owren**'den **Werner Romberg**'in 1955 tarihli tezini istemiştim ve kütüphanedeki kitaptan tarayarak PDF formatında bana gönderdi. Bu konuda rombergintegrali.org'da bir proje yürütüyorum ve Prof. **Byrnjulf Owren**'den 2018'de **Werner Romberg** ile 2021'de **Ole Amble**'ın tezlerini aldım. Yine Agder Üniversitesi'nden Prof. **Rolf Thomas Nossum**, Prof. **Byrnjulf Owren** ve **Reinhard Siegmund-Schultze** ile yazışmalarım ve konunun dikkatini çekmesi nedeniyle dahil oldu. 'Nazi Almanyası'ndan Kaçan Matematikçiler (Mathematicians Fleeing from NAZI Germany)' kitabının yazarı **Reinhard Siegmund-Schultze** **Werner Romberg**'in oğlu olduğunuzu söyleyerek sizin 3 tane e-posta adresinizi verdi ve hemen ardından Prof. **Rolf Thomas Nossum** ek olarak web sitenizin adresini verdi ama sayfada sadece bir telefon numarası vardı.*

Şimdi beni ilgilendiren soruları doğrudan size sormak istiyorum.

*1. İnternetteki birçok yayın babanız **Werner Romberg**'in Yahudi olduğunu iddia ediyor, ancak ben hiçbir makalemde bundan bahsetmedim. Çünkü babanız öğrencilik yıllarından beri solcu olduğu ve Nazilere karşı çıktığı için Münih'ten Dnipro'ya kaçmış gözükür. Buna göre babanız Münih'ten 1933 yazında mı Dnipro'ya kaçtı? Kaçışının nedeni solcu görüşleri miydi yoksa çevrimiçi kaynaklarda belirtildiği gibi Yahudi kökeni miydi? Eğer babanız Yahudi kökenli ise, gizliliğinin (ketum) nedeni bu muydu?*

2. Babanız hakkında fazla bilgi bulamadım. Mümkünse bana babanızın 1933 yazında Münih'ten Dnipro'ya, 1938'de oradan Prag'a, 20 Kasım 1938'de Prag'dan Oslo'ya uçakla ve son olarak 1949'da Trondheim'a kaçışının tam bir hikayesini verebilir misiniz?

3. Babanızın 1928-1933 yılları arasında Heidelberg Üniversitesi'nde matematik ve fizik eğitimi aldığını ve 1933 yılında Münih'te fizik doktorasını tamamladığını biliyoruz. Babanızın tezinde kullandığı trapez yöntemi Heidelberg Üniversitesi kaynaklı mıydı yoksa kendi buluşu muydu? Bu çok önemli, çünkü trapez yöntemini başka bir şekilde uygulamak bana oldukça anlamsız geliyor.

4. Mümkünse bana babanızın hiç yayınlanmamış fotoğraflarını gönderin, ben de bunları makalelerimde kullanayım.

Babanızla ilgili sadece birkaç kaynak olduğu için şimdilik bu kadar. Ama takıldığım bir yer olursa size geri dönerim.

Saygılarımla, Derya PAMUKTULUM".

Eğer ***Hans Romberg***'ten bana yanıt gelirse web sitemde seve seve yayınlarım!

Burada son olarak (14)'teki T_i trapez ve U_i orta nokta yaklaşıklıkları için lineer ekstrapolasyonların

1. Romberg İntegrali: Mathematica'da Tablolamayla Sembolik Bir Yaklaşım, 11.6.2023,
2. Romberg İntegrali 2: Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım, 16.6.2023,
3. Romberg İntegrali 3: Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım, 17.6.2023,
4. Romberg İntegrali m: Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım, 17.6.2023

ve yüksek mertebeden ekstrapolasyonların

5. Mathematica İle Kuartik Dışkestirim Üzerindeki Trapez Yaklaşıklıklığına Sembolik Bir Yaklaşım, 23.6.2023,
6. Mathematica İle Nonik Dışkestirim Üzerindeki Trapez Yaklaşıklıklığına Sembolik Bir Yaklaşım, 24.6.2023,
7. Mathematica İle p^2-inci Mertebeden Dışkestirim Üzerindeki Trapez Yaklaşıklıklığına Sembolik Bir Yaklaşım, 24.6.2023

linklerini verebilirim (Bkz. https://rombergintegrali.org adlı web sitemin ana sayfasındaki "Programlar" menüsüne). Fakat bunlar ***Romberg***'in tezinde "*Eğer bulmaları kolaysa, daha ince bir bölme kullanmak daha iyidir. Sayısal hesaplamaları çok fazla çalışma gerektiriyorsa, burada belirttiğimiz gibi yüksek yaklaşımlı bir yöntem önerilir (Sind sie leicht zu finden, teilt man besser feiner ein. Erfordert ihre numerische Berechnung viel Arbeit, dann empfiehlt sich eine Methode hoher Näherung, wie wir sie hier angegeben haben)."* şeklinde ileri sürdüğü türden ama onun tahmin etmediği ekstrapolasyonlardır. Çünkü eğer öyle bir şey olsaydı ***Romberg*** bu ekstrapolasyonları kendi tezinde söylerdi. Kaldı ki *"ANHANG (EK)"*'te ***Ole Amble***'ın yönteminden daha iyi bir yöntem vermeye ve böylece daha yüksek yaklaşımları önermişti. Fakat önerdiği bu yeni yaklaşıklıklarda yine aynı ekstrapolasyonu (Richardson ekstrapolasyonu) kullandı. Yani ***Romberg***'in aklından yukarıdaki maddelerdeki ekstrapolasyonlardan (1.'si hariç) hiçbirisi geçmedi. Aynı durum sonrakiler için de geçerlidir!

1.3. *Romberg*'in Yeni Yaklaşıklıkları. ***Romberg*** "EK (ANHANG)" başlığının altında "Kalan Terim Serisini Hesaplamak İçin (Zur Berechnung der Restglied-Reihen)" yazarak şu açıklamaları yapar ve bu açıklamaları biraz açarsam şu sonuçlar geçerli olur: Uzunluğu 8h olan n aralıktan birini seçiyoruz ve 0 koordinat noktasını $x = 8hn - 4hz$ ile aralığın orta noktasına dönüştürüyoruz. 8h uzunluğundaki bu alt aralık üzerindeki I integralinin yaklaşık değerlerini küçük harflerle ve $F(x) = f(z)$ ile gösteriyoruz. Çünkü $f(z)$ fonksiyonunun kuvvet serisine açılımı Maclaurin açılımına göre

$$(16)\quad f(z)=\sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(0).\frac{z^m}{m!}$$

olduğundan

$$(17)\quad I=\int_{-4h}^{4h} f(z)dz=8h\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(2m)}(0)}{(2m+1)!}.(4h)^m$$

için

$$(18)\quad t_1=\frac{8h}{2}(f_{4h}+f_{-4h})=8h\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!}.(4h)^m$$

yaklaşıklıklığına göre t_1 trapez yaklaşıklığı için

$$(19)\quad I=t_1+r(t_1)=t_1-8h\sum_{m=0}^{\infty} f^{(2m)}(0)\frac{(4h)^m}{(2m+1)!}(2m)$$

yeni trapez yaklaşılıklığı ve u_1 orta nokta yaklaşıklığı için (ki $u_1=8hf_0$'dır)

$$(20)\quad I=u_1+r(u_1)=u_1+8h\sum_{m=0}^{\infty} f^{(2m)}(0)\frac{(4h)^m}{(2m+1)!}$$

yeni orta nokta yaklaşılıklığı mevcuttur. Bunlar ***Ole Amble***'ın yöntemindeki $\widehat{T_1},\widehat{T_2},\widehat{T_4},\widehat{T_8}$ trapez yaklaşıklıkları ve $\widehat{U_1},\widehat{U_2},\widehat{U_4},\widehat{U_8}$ orta nokta yaklaşıkları gibi ama yeni yaklaşıklıklardır.

Bunlar bize aşağıdaki tablodaki (yeşil tablo) katsayılara sahip formdaki serileri verir:

$$(21)\quad r=8h\left(f^{(2)}(0)\frac{h^2}{3!}a+f^{(4)}(0)\frac{h^4}{5!}b+f^{(6)}(0)\frac{h^6}{7!}c+f^{(8)}(0)\frac{h^8}{9!}d+\cdots\right)$$

Fakat anılan tablodaki katsayıları kullandığımda bu yeni yaklaşıklıklar bırakın ***Ole Amble***'ın turuncuyla gösterilen 2. tablodaki yaklaşık değerlerini geçmesini, ondan daha kötü sonuçlar üretir. Aşağıdaki tablo bunu gösterir:

Artan Sıralı Yaklaşık Değerler Tablosu				
Aralık Uzunluğu	Kalan Terim			
	h^2	h^4	h^6	h^8
8h	$\widetilde{T_1}=1.088890956$			
	$\widetilde{U_1}=0.954137974$			
4h	$\widetilde{T_2}=1.021514465$	$\widetilde{S_2}=0.999055635$		
	$\widetilde{U_2}=0.989159125$	$\widetilde{V_2}=1{,}000832842$		
2h	$\widetilde{T_4}=1.005336803$	$\widetilde{S_4}=0.999944249$	$\widetilde{R_4}=1.000003490$	
	$\widetilde{U_4}=0.997326443$	$\widetilde{V_4}=1{,}000048882$	$\widetilde{W_4}=0.999996618$	
h	$\widetilde{T_8}=1.001331623$	$\widetilde{S_8}=0.999996563$	$\widetilde{R_8}=1.000000051$	$\widetilde{Q_8}=0.999999996$

Tablo 3. *Romberg*'in yeni yaklaşıklıklarına göre tablosu. Bu tabloda yine aralık uzunluğu $8h=1$'dir ve h^2, h^4, h^6 ve h^8 ifadeleri Richardson ekstrapolasyonundaki katsayıları sıfırlamaya dayanan eliminasyon yöntemine göre kalanları gösterir. Tablodaki değerler $I=1$'e yaklaşım için doğruluk değerleri bakımından Tablo 1'dekilerle hemen hemen aynıdırlar.

Resim 2. Prens Claus Amsberg, 1986.

Romberg tablodaki bu sonuçlardan görüldüğü üzere T_1,T_2,T_4,T_8 trapez yaklaşıklıkları için $\widetilde{T_1},\widetilde{T_2},\widetilde{T_4},\widetilde{T_8}$ ve U_1,U_2,U_4,U_8 orta nokta yaklaşıklıkları için $\widetilde{U_1},\widetilde{U_2},\widetilde{U_4},\widetilde{U_8}$ şeklinde yeni yaklaşıklıklar önerir ama ***Ole Amble***'ın $\widehat{T_1},\widehat{T_2},\widehat{T_4},\widehat{T_8}$ ve $\widehat{U_1},\widehat{U_2},\widehat{U_4},\widehat{U_8}$ yaklaşıklıklarından daha iyi değildir. Daha iyi yaklaşıklıklar için (21)'deki terim sayısının 4'ten fazla olması ve Tablo 2'deki ekstrapolasyonik yaklaşıklıklara ulaşabilmek için de onlarca terim almanız gerekir. Buna göre bu son yaklaşıklıkların sayısal hesapları ***Romberg***'in dediği gibi "*Sayısal hesaplamaları çok fazla çalışma gerektirir (Erfordert ihre numerische Berechnung viel Arbeit)*". Fakat yukarıdaki 1-4. maddelerdeki lineer ekstrapolasyonları 14.05.2003'te ve 5-7. maddelerdeki yüksek mertebeden ekstrapolasyonları 19.2.2017'de keşfederek ***Romberg***'in düşündüğü bu yolu inanılmaz hızda kısalttım ve bunlar 10.2.2020 tarihli RİK 3'te ve 21.04.2021 tarihli RİK 4'te vermeden önce piyasada yoktu. Yani bu ekstrapolasyonları sadece ***Romberg*** değil hiç kimse tahmin edemedi ve eğer, 19.2.2017'deki keşfim olmasa 2.11.2016, 22:54'te başladığım makaleyi de 2003'te olduğu gibi bir kenara bırakacak, dolayısıyla unutup gidecektim. Beni bu çalışmaya döndüren ***Romberg***'in hayat hikâyesi oldu. Lütfen 24. sayfadaki "*1.3. Beklenmedik Bir Sürpriz!*" parçasını okuyunuz ve nelerle uğraştığıma şahit olunuz!

Moderatör ***Petra Stienen*** katılımcılara *"Peki ama Prens **Claus**'un fikirlerini bir sonraki nesle nasıl aktaracağız?"* diye sordu. AB Komisyon Üyesi ***Carlos Moedas***'ın bir önerisi vardı. Konuşmasında Prens ***Claus***'u zamanının ötesinde bir adam olarak tanımladı. *"Prens **Claus** bir keresinde şöyle demişti: 'Belirleyici faktör; kalkınma ve ilerlemenin ancak insanların kendileri tarafından, kendi kültürlerine, kendi dillerine ve kendi yaşam tarzlarına saygı duyulan bir ortamda gerçekleştirebileceğinin giderek daha iyi anlaşılmasıdır. Kişinin kendi kültür ve geleneklerine saygı ve güven duymadan ilerleme kaydetmesi zordur (The decisive factor is the growing realization that development and progress can be realized only by people themselves, in an environment where there is respect for one's own culture, own language and own lifestyle. Without respect and trust in one's own culture and traditions, progress is difficult to achieve)'"*, YILLIK RAPOR 2018 PRENS CLAUS SANDALYESİ, KÜRESEL GÜNEY'İN GELİŞİMİNDE FARK YARATAN GENÇ BİLİM İNSANLARI, S. 31.

Not 1. İnanır mısınız tam adı "Claus George Willem Otto Frederik Geert van Amsberg" ve şimdiki Hollanda Kralı'nın babası olan Prens ***Claus***'un bu sözünü ilk kez 2016'da anılan ilk makaleme çalışırken görmüştüm: Bu söz Prens Claus Fonu'nun ana sayfasının sol tarafında ve dikkat çekici bir büyüklükte ve onun da solunda Prens ***Claus***'un 28. ve 31. sayfadaki resmiyle birlikte "*Kültür temel ihtiyaçtır (Culture is a basic need)*" ilkesinin altında yer alıyordu. Daha sonra bu sözü web sitemin ilk kez kurduğum 2019'da ana sayfasındaki "Referanslar" bölümünde ilk söz olarak koymuştum ve hala aynı yerde yayınlanıyor (ki bu söz Prens Claus Fonu'nun ana sayfası yenilendiği için yerinden kaldırıldı. Yanılmıyorsam en son 2017'de görmüştüm).

1.4. Trapez ve Orta Nokta Formüllerinin Modifikasyonu. (14)'teki trapez formülü

$$T_i = h_i \sum_{k=0}^{2^i-1} f_k = h_i f_0 + h_i \sum_{k=1}^{2^i-1} f_k = K_0 + \sum_{k=1}^{2^i-1} f(a+kh_i)$$

eşitliklerine göre (ki $h_0 = \frac{b-a}{2^0} = b-a = h$ için $h_0 f_0 =: K_0$ dersek $h_i f_0 = \frac{b-a}{2^i} f_0 = \frac{(b-a)f_0}{2^i} = \frac{h_0 f_0}{2^i} = \frac{K_0}{2^i}$ olur)

$$(22)\quad T_i = \frac{K_0}{2^i} + \sum_{k=1}^{2^i-1} f(a+kh_i)$$

ve orta nokta formülü

$$U_i = h_i \sum_{k=0}^{2^i-1} f_{k+\frac{1}{2}} = h_i \sum_{k=1}^{2^i} f_{k-1+\frac{1}{2}} = h_i \sum_{k=1}^{2^i} f_{k-\frac{1}{2}} = h_i \sum_{k=1}^{2^i} f\left(a+\left(k-\frac{1}{2}\right)h_i\right) = h_i \sum_{k=1}^{2^i} f(a+(2k-1)h_{i+1})$$

eşitliklerine göre

$$(23)\quad U_i = h_i \sum_{k=1}^{2^i} f(a+(2k-1)h_{i+1})$$

şeklinde yazılabilir.

Bunlardan orta nokta formülü bu şekilde modifiye edilmişken trapez formülü ona bağlı olarak şu şekilde modifiye edilebilir: Bu yaklaşıklıklar arasında

$$(24)\quad T_{i+1} = \frac{T_i + U_i}{2}$$

aritmetik ortalaması mevcut olduğundan orta nokta formülünü

$$U_i = 2T_{i+1} - T_i$$

şeklinde yazabilir ve bunu (23)'te yerine koyar ve gerekli işlemleri yaparsak trapez formülünü

$$(25)\quad T_i = \frac{T_{i-1}}{2} + h_i \sum_{k=1}^{2^{i-1}} f(a+(2k-1)h_i)$$

şeklinde yazmış oluruz. Bu, trapez formülünün ilk indirgeme bağıntısıdır ve eğer bu indirgeme işlemine devam edilirse i. adımda (22) elde edilecektir (Bkz. "*1.6.3. K_n'nin K_0'a İndirgenmesi*", S. 10-11 ve "*Teorem 1.3*", S. 20-1). Yani (22)'deki indirgemelerden (25)'e göre

$$(26)\quad \sum_{k=1}^{i} \frac{U_{i-k}}{2^k} = \sum_{k=1}^{2^i-1} f(a+kh_i)$$

özdeşliği elde edilmektedir!

DERYA PAMUKTULUM

Dijital olarak imzalayan DERYA PAMUKTULUM
Tarih: 2025.04.12 15:50:05 +03'00'