

# RİKA

# TE

Evet, TUA'nın "29.10.2023'te AY'dayız!" profesini destekliyorum!

Bu konuda Sabiha Gökçen'in "ATATÜRK'ün İzinde Bir Ömür Böyle Geçti" kitabında ATATÜRK'ün şu veciz sözleri geçer:

"İstikbal göklerdedir. Göklerini koruyamayan uluslar, yarınlarından asla emin olamazlar.", ATATÜRK-1925.

"Kanatlı bir gençlik memleketin geleceği bakımından en büyük güvencedir. Bir gün Batılı ayaklar, Ay'da ayaklarının izlerini bırakacaklarsa, bunların arasında bir de Türk'ün bulunması için şimdiden çalışmalara girişmek, aşamalar kaydetmek gerekir.", ATATÜRK.

"Geleceğin en etkili silahı da, aracı da hiç kuşkunuz olmasın tayyaredir. Bir gün insanoglu, tayyaresiz de göklerde yürüyecek, gezegenlere gidecek; belki Ay'dan bile haber yollayacaktır. Bu mucizenin tahakkuku için 2000 yılını beklemeye gerek kalmayacaktır. Gelişen teknoloji, bize daha şimdiden bunu müjdeliyor. Bize düşen görevse Batı'dan bu konuda fazla geri kalmamayı temindir.", ATATÜRK-1936.

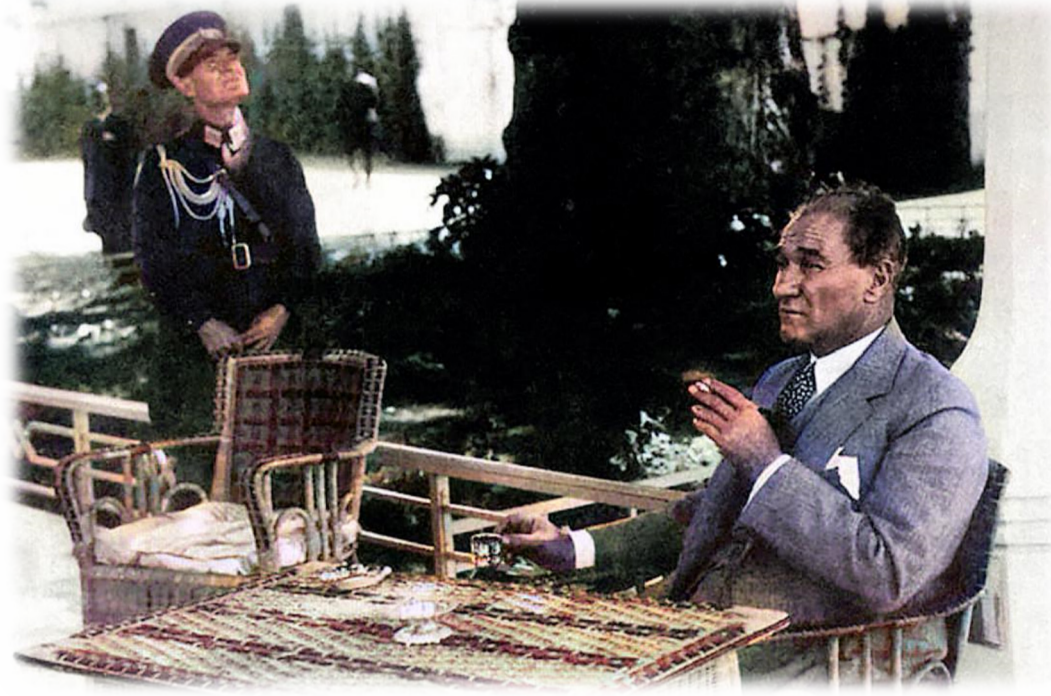
ONAYLANDI

Derya PAMUKTULUM 04:45, 21.4.21

## ATATÜRK KÖŞESİ

[“Bilim tercümeyle olmaz, incelemeye olur!”](#)

“19 Ağustos’ta Gazi’nin Yalova Köşkü’nde akşam yemeğine çağrıldım. [19/20 Ağustos 1932](#) tarihiydi. O gece Gazi, çok ciddi konulara temas etti. Çok heyecanlı konuştu.



Atatürk, Yalova Baltacı Çiftliği’nde yaveri (12.10.1932’de Başyaveri) [Celal Üner](#) ile birlikte, [31.07.1932](#).

Toplantıda bayan [Afet İnan](#)’dan başka [Yusuf Akçura](#), [Dr. Reşit Galip](#), [Celâl Sahir](#)... vardı. O tarihi gecede Gazi, [İstanbul Darülfünununun reformundan](#) bahsetti. [Birinci Türk Dili Kongresi](#)’ni ortaya attı. Bu işlerde [Dr. Reşit Galip](#)’in çalışacağını ihsas etti (sezdirdi).

Konuşmalar, memleket meseleleri üzerinde toplanmıştı. “**Türk vatandaşları ile daima temas etmenin kendisinin en büyük işi olduğunu**” söylüyordu. Konu hep millet ve memleket, ilim ve üniversite meseleleri idi. Birinci elden ilmin üzerinde duruyordu. Bir ara şu sözleri işittik:

-Ölmek isteyen bir milleti Gazi değil, hiçbir kuvvet kurtaramaz. Türk milleti ölmek istemez, o daima yaşayacaktır efendiler!

Birdenbire de eliyle beni göstererek:

-Üniversitede, Doktor Bey gibi birinci elden araştırma yapanları profesör görmek istiyorum, dedi.

Sözünü [Reşit Galip](#)’e yönelterek konuşmasını şöyle tamamladı:

-İlim, tercüme ile olmaz, tetkikle olur. Doktor Bey nasıl memleket malzemesini tetkik ederek ilim yapmışsa, ben de senden böyle ilim adamlarını almanı istiyorum.”

Herkesin kabul ettiği üzere bu toplantıdaki en önemli söz, [Atatürk](#)’ün şu sözü olmuştur: “[İlim tercüme ile olmaz, ilim tetkikle \(incelemeyle\) olur!](#)”. Bu, [Atatürk](#)’ün, eğer günümüze göre tercüme edersek, “Biz, ilhamlarımızı, düşüncelerimizi, projelerimizi, programlarımızı vs., özetle her şeyimizi donmuş ve kalıplaşmış bilgilerden değil doğrudan doğruya hayattan alıyoruz, [Atatürk’ün T.B.M.M. 5. Dönem-3. Yasama Yılı Meclis Açılış Konuşması, 1 Kasım 1937](#)” sözüne karşılık gelir. Çünkü “**tercüme**”, donmuş ve kalıplaşmış bilgileri (statik bilgiler) ve “**inceleme**” de, onların doğrudan doğruya hayattan alınmasını yani statik bilgilerin hayat içinde sınanmasını gösterir. Günümüzde bunların içinde başarıya ulaşmış bilgileri (dinamik bilgiler) sosyal bilimlerde “**teori**” ve ideal bilimlerde “**teorem**” olarak kullanıyoruz. Bunlar ise tercüme ile değil, ancak incelemeye olabilecek şeylerdir. Bu nedenle [Atatürk](#) hayatında sürekli tartışma ve eleştirel gözle dünyaya bakmayı önermiştir. Bu konudaki düşüncesi açıktır. “...En büyük gerçekler ve ilerlemeler, düşüncelerin serbestçe ortaya konması tartışılması ile ortaya çıkar ve yükselir...” [Atatürk](#)’e göre bilim, pozitivizmdeki gibi gerçeğin ta kendisi değil, gerçeğe götüren bir yol göstericidir. Burada gerçeklik daha keşfedilememiş bir gerçekliktir. Gerçekçi bir dünya görüşüne sahip olan [Atatürk](#), bilimsel anlayışın hayatın her alanına sahip olması gerektiği konusundaki görüşlerini güçlü bir ifadeyle topluma aktarır. Bursa’da 1922’de yaptığı konuşmanın devamında kendisini dinleyen öğretmenlere şöyle seslenir: “...Gözlerimizi kapayıp mücerret yaşadığımızı farz edemeyiz -Memleketimizi bir çember içine alıp cihan ile alâkasız yaşayamayız... Bilâkis müterakki, mütemeddin bir millet olarak medeniyet sahasının üzerinde yaşayacağız. Bu hayat ancak ilim ve fen ile olur. İlim ve fen nerede ise oradan alacağız ve her ferd-i milletin kafasına koyacağız, ilim ve fen için kayıt ve şart yoktur...” [Atatürk](#) yüksek medeniyet içerisinde var olmak isteyen toplumların, aklın ve bilimin hâkimiyetinden noksan bir anlayışla bunu gerçekleştiremeyeceğini özellikle vurgulamıştır. [Atatürk](#), 24.08.1925’te Kastamonu’da halka yaptığı bir konuşmada medeni toplumlar içerisinde yer almanın gerekliliğini şöyle ifade etmiştir: “...Medeniyet öyle kuvvetli bir ateştir ki, ona ilgisiz kalanları yok eder. Uygar olmayan insanlar ve toplumlar, daima uygar olanların altında kalmaya mahkûm olacaklardır...” Yukarıdaki parçada görüldüğü üzere 1932’de yaptığı bir konuşmada bilimin nasıl olması gerektiğini açık ve net olarak ortaya koymuştur: “...İlim tercüme ile olmaz, ilim tetkikle olur...” [Atatürk](#)’ün bilimsel, akılcı ve gerçekçi düşüncesi Türk toplumunun bütün alanlarına egemen kılma çabası en önemli özellikleri arasında yer almakta ve bütün uygulamalarında kendisini göstermektedir. Fakat [Atatürk](#) bize sadece bilimde değil, her alanda babalık yaptı!

Özetle [Atatürk](#)’ün “[Bilim tercümeyle olmaz, incelemeye olur!](#)” sözünden anlaşıldığı üzere, şimdi üniversitemizde “**Bileşik Yamuk Kuralı**” olarak okutulan yöntemi tercümeyle değil, inceleyerek eksikliklerini tamamlayabildim ve en mükemmel hale getirdim. Bu konuda sayısız kaynakla birlikte [Werner Romberg](#)’in 14.02.1955 tarihli “[Vereinfachte numerische Integration von Werner Romberg](#)” adlı orijinal tezini de inceledim. Buradan bu nadide tezi 23.12.2018, 09:11’de (Tröndheim’da 07:11) e-posta kutuma yollayan [NTNU](#)’daki matematik profesörü [Brynjulf Owren](#)’e en içten teşekkür ederim!

[Atatürk](#), Cumhuriyetimizin 10. yıl dönümünde Ankara Hipodromu’nda [Söylev](#)’inden önce kendisini şöyle tanıtıyordu: “Ben manevi miras olarak hiçbir nas-ı kati (değişmeyen söz), hiçbir dogma, hiçbir donmuş ve kalıplaşmış kural bırakmıyorum. Benim manevi mirasım ilim ve akıldır. Benden sonrakiler, bizim aşmak zorunda kaldığımız çetin ve köklü engeller önünde belki amaçlara tamamen ulaşamadığımızı, fakat asla taviz vermediğimizi, akıl ve ilmi rehber edindiğimizi onaylayacaklardır. Zaman süratle dönüyor, milletlerin, cemiyetlerin, fertlerin iyilik ve kötülük anlayışları bile değişiyor. Böyle bir dünyada asla değişmeyecek hükümler getirdiğini iddia etmek aklın ve ilmin gelişimini inkâr etmek olur. Benim Türk milleti için yapmak istediklerim ve başarmaya çalıştıklarım ortadadır. Benden sonra beni benimsemek isteyenler, bu temel eksen üzerinde aklın ve ilmin rehberliğini kabul ederlerse manevi mirasçılarım olurlar.”

O zaman ben, [Atatürk](#)’ün manevi mirasçısı ve [Romberg](#)’in de manevi oğlu oluyorum. [Bunları ileride anlayacaksınız!](#)

## İçindekiler

Önsöz .....	1
§1. Trapez Metodunun Geometrik Yorumu ve Sonuçları.....	16
1.1. Trapez Metodu .....	16
1.2. Romberg'in Orijinal Metodu.....	21
1.2.1. Romberg Metodu Hakkındaki İlk Gözlemim .....	23
1.3. Beklenmedik Bir Sürpriz.....	24
§2. Trapez Metodu İçin Ekstrapolasyonlar .....	25
2.1. Richardson Ekstrapolasyonu .....	25
2.1.1. Richardson Ekstrapolasyonu Uygulamaları .....	26
2.1.1.1. Aritmetik Ortalama Metodu.....	26
2.1.1.2. Snellius Algoritması .....	27
2.1.1.2.1. $\Pi$ 'de Huygens Algoritması.....	28
2.1.1.2.2. $\Pi$ 'de Snellius-Huygens Algoritmaları Arasındaki İlişki .....	28
2.1.1.2.3. Ekstrapolasyonda Snellius-Huygens Algoritmaları .....	29
2.1.1.2.3.1. Richardson Ekstrapolasyonu'nun Snell Formu .....	29
2.1.1.2.3.2. Aritmetik Ortalama-Snellius Bağlantısı Arasındaki İlişki .....	30
2.2. E-ATA 1 Algoritmaları'ndan Transferler .....	30
2.2.1. Kardinal Nikola Ekstrapolasyonu, 1458-2003, 2018 .....	31
2.2.2. Snellius Ekstrapolasyonu 1621-2002 .....	32
2.2.3. $h_{mn}^{2k}$ -ekstrapolasyonu .....	33
2.3. Lineer Ekstrapolasyonlar Hakkında.....	35
2.4. Yüksek Mertebeden Ekstrapolasyonlar Hakkında.....	39
2.4.1. $p^2$ -inci Mertebeden Ekstrapolasyon (Prototip).....	40
2.4.1.1. Kuartik Ekstrapolasyon.....	40
2.4.1.2. Nonik Ekstrapolasyon .....	41
§3. Mathematica Programları.....	45
§4. EKLER .....	48
EK 1: HERON'un "METRICA"da ARŞİMET'in $\pi$ İçin Verdiğini İddia Ettiği Sınırlar Hakkında.....	48
4.1. HEIBERG'in Tahmini .....	48
4.2. TANNERY'nin Tahmini .....	49
4.3. JOHANN-HARTMANN BEYER'den Şok Edici Sonuçlar .....	50
4.4. VAN CEULEN ve SNELLIUS'a Bir Saygı Ziyareti .....	50
4.5. ARŞİMET'e Bir Saygı Ziyareti.....	51
4.6. PTOLEMAEUS'a Bir Saygı Ziyareti.....	52
4.6.1. SAROS Döngüsünde $\Pi$ Çevrimi.....	53

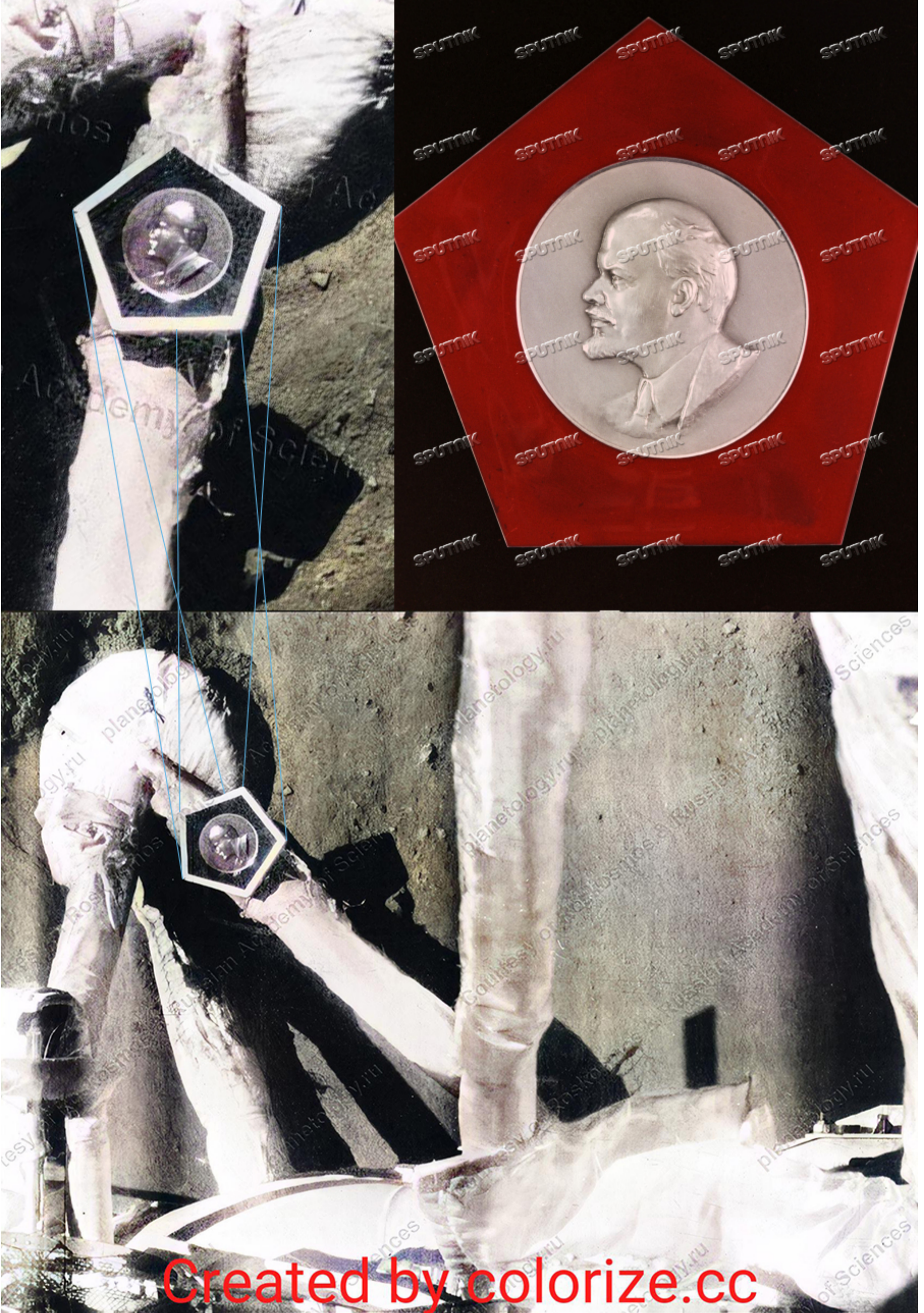
4.6.1.1. <i>VIETÆ</i> 'ya Bir Saygı Ziyareti .....	54
4.6.2. Dünya ve Ay'ın Yörünge Periyotlarının Oranı.....	54
4.7. <i>HERON</i> 'un "METRICA"sında $\pi$ İçin Verilen Sınırlar Hakkındaki Araştırma Sonuçlarım .....	54
4.7.1. <i>ARŞİMET</i> 'in Çember Ölçümü Hakkında.....	55
EK 2: Çağlar Boyunca Saros Döngüsündeki <i>PTOLEMY</i> 'nin $\Pi$ 'si.....	59
4.8. <i>PTOLEMY</i> 'nin $\Pi$ 'si Hakkında .....	60
4.9. <i>PTOLEMY</i> 'nin Çevrimi.....	62

## Önsöz

Önsöze başlamadan önce, acil bir gelişme nedeniyle önce Sovyetlerin 50. yıl dönümlerine ait Ay'daki çalışmalarına kısaca bir göz atacak, sonra Cumhuriyetimizin 100. yıl dönümü için Ay'daki faaliyetlerimize bir bakış atacağız!

50. Yıl Dönümde (50 ЛЕТ) Ay Harekâtı

## ÖN SONUÇLAR



Resim (Sovyet Güneşi LENİN). SSCB'nin 50. yıl dönümü nedeniyle Ay yüzeyine UTC'ye göre 15.01.1973'te inen [Luna 21](#)'deki (sol üstteki) ve 16.01.1973'te inen [Lunokhod 2](#)'deki (sağ üstteki) Lenin madalyonları. Bu madalyonlardan sol üsttekini "[Lunokhod 2: Lunation 1, Session 1, Panorama 1](#)"den aldım ve Photoshop'ta yoğunlaştırıp "[Let's Enhance: Image enhance-](#)

## Önsöz

[ment powered by AI](#) ile geliştirdikten sonra alttaki parçada görülen sitede renklendirdim. Söz konusu alttaki parça, Lunokhod 2'nin ilk çalıştırıldığı anda (16.01.1973) Luna 21'in üzerinden çektiği [6 parçalık ilk panoramik çekim](#)inin soldaki 2. parçasıdır. Açıkçası kalitesi son derece düşük bu siyah-beyaz TV resmin 2. parçasının renk vermesi beni gerçekten de şaşırttı. Çünkü soldaki ilk parçada Sovyet bayrağını ne yaparsam yapayım bir türlü renklendirememiştim; simsiyah görünüyordu. Ama 2. parçada öyle olmadı ve daha ilk renklendirmede beni ümitlendirdi. Eğer üzerine gidersem Lunokhod 2'nin yerine biz bakmış gibi olacaktık. Bu işin hastası olanlar var (bkz. "[Ford Mustang Fastback'in Restorasyonu](#)"). Bu konuda Netflix'te "[Rust Valley RESTORERS](#)" ve "[CAR MASTERS Rust to Riches](#)" dizileri vardır. Ama burada yaptığım iş, daha çok "[Vacheron Constantin Geneve](#)" saatinin restorasyonuna benzer) ve geçmiş söz konusu olunca Rusların nasıl bir reaksiyon verdiklerini "[Discoteka 80's](#)"den biliyordum. O zaman 2. parçayı en iyi şekilde renklendirmeliyim, dedim ve yukarıdaki resimdeki alttaki parçaya ulaştım (Y.N. Günümüzde her şeyde olduğu gibi bunların da ticareti yapılmaktadır. Yukarıdaki resimdeki parçaların üzerindeki soğuk damgalar bunu gösterir (Bkz. "[Photo #2525581](#)", "[Lunokhod 2: Lunation 1, Session 1, Panorama 1](#)"). Ancak Luna 21 üzerindeki Lenin madalyonu ellerinde yok; sadece yukarıdaki resimde mevcuttur).

Fakat yukarıdaki resmi elde edene kadar birçok imaj çalışmasında bulundum:

1. [Lenin 1](#) (396 KB, 11.02.2021/21:50), [Lenin 2](#) (422 KB, 11.02.2021/23:14), [Lenin 3](#) (447 KB, 12.02.2021/03:29), [Lenin 4](#) (407 KB, 13.02.2021/06:17), [Lenin 5](#) (444 KB, 24.02.2021/09:23). Bunlardan ilki "[Lunokhod 2: Lunation 1, Session 1, Panorama 2](#)"den alınma olup **Lenin**'i ilk kez gördüğüm resimdir (ki o sırada buradaki çıkartma, madalyon, bayrak vs. yoktu ama bu resimde güç-bela görünse de **Lenin**'i hemen tanıdım. Hani "[yerde ararken gökte buldum!](#)" derler ya, bende de öyle oldu ve **Lenin**'i Ay'da ilk kez burada görmüş, dolayısıyla ilk heyecanımı burada yaşamışım). Fakat sonra **Lenin**'in "[Lunokhod 2: Lunation 1, Session 1, Panorama 1](#)"de daha net bir resmini görünce ilkinden vazgeçtim ve tüm araştırmalarımı bunun üzerinde yapmaya başladım. Yani aşağıdaki tüm imaj çalışmalarımı bu çekim üzerinden yürüttüm!
2. [2. Parça-Photoshop](#) (4.76 MB, 21.02.2021/01:32).
3. [2. Parça-Enhance](#) (8.89 MB, 21.02.2021/01:49).
4. [2. Parça-2xEnhance](#) (9.53 MB, 24.02.2021/15:12).
5. [2. Parça-Enhance&Renkli](#) (605 KB, 24.02.2021/15:20).
6. [2. Parça-Enhance&Renkli](#) (594 KB, 26.02.2021/00:19).
7. [Kapak-Renkli&Enhance&Photoshop](#) (2.08 MB, 24.02.2021/15:30).
8. [2. Parçaya İlişkin Bir Kompozisyon](#) (0.98 MB, 24.02.2021/11:01).

İşte tüm bu imaj çalışmaları sonunda elde ettiğim yukarıdaki resimden şu sonuçlar ortaya çıktı (Bu arada, **Lenin**'e ait ne varsa her şeyin kaldırıldığı bugünlerde şunu gözden geçiriyoruz: **Lenin**'in naaşının [mumyalanması](#), [heykelleri](#) vs. ideolojik ya da turistik amaçla değil, Sovyet halkı çok sevdiği için yapıldı):

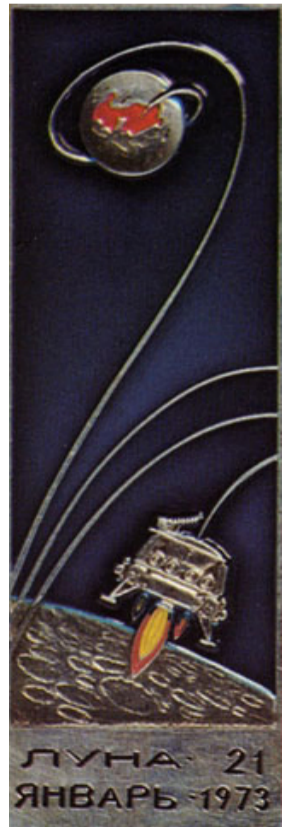
1. **Ay tozları:** Buna göre Luna 21'in bir bacağına üzerine monte edilmiş Lenin madalyonunun tıpkı sağ üstteki Lunokhod 2'deki madalyondaki gibi olduğu ortaya çıktı ve üzerinde, özellikle siyah bölümde, bayağı bir Ay tozunun kalkmış olduğunu gördüm. Ama APOLLO Seferleri'nde böyle bir şeyi görmek mümkün değildir (Bkz. "[APOLLO Galerisi](#)"). Örneğin, Apollo 11'e ait [AS 11-40-5917](#), [AS 11-40-5918](#), [AS 11-40-5920](#), [AS 11-40-5925](#), [AS 11-40-5926](#) resimlerinde bırakın tozu, tozun zerresini göremezsiniz. Sanki yalayıp yutmuşlar. Oysa Apollo 11 ve Luna 21'in her ikisi de Ay'a yumuşak iniş yapmışlardı ama aradaki fark bu! Özellikle Luna 21'deki Lenin madalyonunun siyah bölümündeki çiziklerin resmin eski olmasından değil, Ay tozlarından kaynaklanmış olduğunu görünce ağzım bir karışıkta kaldı. Yani Luna 21 her ne kadar yumuşak iniş yapmışsa da yerden bayağı bir Ay tozu kaldırmış. Ama kime ne! Herhalde NASA'dan bu konuda bir açıklama beklememiz, haddimizi aşmak olmaz!
2. **Güneş ışınlarının geliş açısı:** Eğer Güneş ışınlarının nereden geldiğini merak ederseniz, sol üstteki parçadaki **Lenin** portresinin olduğu düzgün 5-gen ile onun yerdeki gölgesini birlikte verdim. Buna göre madalyonun gölgesinde Luna 21'in bacağına sağ tarafında 5-genin tepe noktasıyla birlikte sağ tarafındaki 2 köşesi görünür ve bu köşeleri sol üst parçadaki Lenin madalyonunun alttaki orijinalinden nasıl geldiğini mavi çizgilerle gösterdiğim gibi birleştirirseniz, Güneş ışınlarının hangi yönden geldiğini açık bir şekilde görebilirsiniz. Bu, **Neil Armstrong**'a göre 11°'lik eğim açısının altındadır. Çünkü ona göre Güneş yeterince yüksekte ise ancak kahve renkli tonları görebiliyordunuz. Örneğin APOLLO 12, Güneş'in ufuk çizgisiyle sadece 5°'ye yakın iniş yaptığında Mars'taki gibi kahve ve bronz renk tonlarını hiç göremediler. Sadece yüksek kontrastlı gri tonlar vardı. Ama **Neil Armstrong** gördü, çünkü Güneş 11° yükseklikteydi. APOLLO 12 ise ertesi gün görmüştü. Uyandıklarında Güneş daha yukarıda olduğundan kahve tonları görebildiler (Bkz. "[Neil Armstrong'un BBC ile röportajı, 1970](#)").



3. **Elmas yüzük:** Bilindiği gibi Tam Güneş Tutulması sırasında "**Taç**"tan önceki evreye "[Elmas Yüzük \(Diamond Ring\)](#)" denir ve bu durum Ay'ın Güneş'e 2. ve 3. temas anlarında görülür. Bu sırada Güneş'in çok küçük bir parçası Ay'ın dışında kaldığından kaçan yerden ışık sızması olur ki oluşan görüntü elmas yüzüğü andırıldığından buna "**Elmas Yüzük**" derler (Bkz. "[TÜBİTAK Ulusal Gözlemevi ve 29 Mart 2006 Tam Güneş Tutulması](#)"). Bu tutulmada NASA'nın APOLLON Tapınağı'ndan tüm dünyaya yayın yapması son derece dikkat çekiciydi. Bunun nedeni **Doherty**'den şöyle öğreniyoruz: Güneş tutulmasının en iyi Gana, Libya ve Türkiye'den izlendiğini söyleyen **Doherty**, Türkiye'de, özellikle Side Antik Tiyatrosu'nu seçtiklerini belirterek, "[Burayı seçmemizdeki birinci neden cihazların korunması için uygun oluşuydu. Ayrıca 2000 yıllık tiyatronun mistik ve fantastik bir havası var](#)" dedi. Bkz. "[NASA Side'den naklen yayın yaptı](#)". Lenin madalyonundaki elmas yüzük ise sol üstteki parçada 5-genin tepe noktasından indirilen dikmenin daireyi kestiği yerdedir. Bunu ilk kez siyah-beyaz resimde fark etmiş ve inanılmaz heyecanlanmışım. Çünkü Güneş ışınları orada bir parlamaya neden olmuş ve bunun resmin renkli halinde görülmesinin daha değerli olduğunu biliyordum. Söz konusu bu parlıtı aynı dikme **Lenin**'in başından geçerken de görebilirsiniz. Yani **Lenin**, orada bir Güneş gibi parıl parıl parlıyordu. Tıpkı [SSCB'nin ulusal marşındaki](#) gibi: "[Fırtınaların ardından özgürlük güneşi doğuyor. Ve Yüce Lenin bize yol gösteriyor.](#)"

### Ekim Devrimin 50. Yıl Dönümünde Ay'daki Kozmonot!

1967'nin başındaki coşku, baştasarımcıları haliya çağırıyor. Çünkü CPSU, Amerikalılar'ın eğitime başladığına ilişkin gizli bir film görüntülerini gösterir. Görüntülerde astronot **Shepard**, **Candle** ve **Russo**'nun Nevada çölünde Ay'a iniş için basit bir denemede buldukları gösteriliyor. Bu gelişme üzerine SSCB lideri **Brejnev**, "[Ekim Devrimi'nin 50. yıl dönümü koşullarında Ay'ın etrafında uçmak ve 1968'de üzerine bir adam indirmemiz gerekiyor](#)" dedi. Derhal montaj atölyelerinin hararetli çalışmasıyla 1. binanın montajına başlandı, Ay seferi için uzay giysisi ve Ay'a iniş kabinleri yaratıldı. General **Kamanin**, ilk Ay mürettebatının eğitimine başladı: Özel eğitim programları, TU-16 uçağında yer çekimsiz uçuş eğitimi vs. Fakat 21.02.1967'de Apollo 1'deki test sırasında ABD'den korkunç bir haber geldi. 3 Amerikalı astronot [Apollo 1](#)'in içinde diri diri yandı: **Grissom**, **White** ve **Chaffee**. Yangının Ruslar'ın sabotajı olduğu iddia edildi, ancak bunun için geçerli bir neden yoktu. Trajedi, Amerikan uzay araçlarının bariz bir özelliği: Kazara saf oksijenin pompalanması sırasında bir kıvılcım çıktı ve bu kıvılcım yangına dönüştü. Astronotları kurtarmak imkânsız idi. SSCB tarafından askıya alınan ABD programı, zorluklardan yararlanmaya karar verdi. SSCB, Nisan 1967'de nihayet ABD'yi geçecek. Bunun için SOYUZ-1 ve 2 hazırlanır ama [SOYUZ-1](#)'de Apollo 1'in laneti dolaşır. Böylece Ekim Devrimi'nin 50. yıl dönümüne gergin bir atmosferde girilir (Bkz. "[Ay Yarışı: Ay Gezgini Astronotlara Karşı](#)"). 17.11.1970'de Ay yüzeyine inen Luna 17'deki Lunokhod 1'in 2. denemesinde, baştasarımcı **Babakin**, Dünya'nın uydusunun yüzeyine inmeyi başardı. İniş yüzeyde platformdan aynı anda zeminde başladı. Lunokhod 1'in dakikada 140 vuruşa çıkmasına izin verildi. Resimler dünyaya 20 saniyede geliyor (ki bir komut Ay'a 2.6 saniyede gidiyordu) ve kontrol merkezindeki sürücünün önündeki [TV'de siyah-beyaz](#) olarak görünüyordu. [Lunokhod 1'in sürücüsü Gennady Latypov](#), [39 yıl](#) sonra tekrar aynı koltuğa oturdu (bkz. [1970](#)) ve başladı anılarını döktürmeye!





### SSCB'nin Kuruluşunun 50. Yıl Dönümünde 2. Ay Gezini

Kader adamı **Brejnev**, ilk yenilgisinden sonra (ki Amerikalılar 20.07.1969'da Apollo 11 ile Ay yüzeyine insanlı iniş yaptılar. Ama onlar **Brejnev**'in 1968'deki sözünü değil, **Kennedy**'nin 25.05.1961'deki "Ay'daki Adam (*Man on the Moon*)" sözünü yerine getirmişlerdi) bu sefer SSCB'nin 50. yıl dönümüne denk gelen 30.12.1972'de Luna 21 ile Ay yüzeyine inmeye karar verdi. Fakat her şey büyük bir gizlilik içinde yürütülüyordu ve basına ancak Luna 21 16.01.1973'te (Moskova saatine göre) Ay yüzeyine indikten sonra haber verildi (Bkz. "[Soviet Luna 21 Lands on Moon, Delivering Lunokhod 2 Craft for Exploration, 17.01.1973](#)"). İşin ilginç yanı, **Luna 21** 08.01.1973'te Baykonur uzay üssünden ayrılmış, 12.01.1973'te Ay yörüngesine girmiş ve 16.01.1973'te yani SSCB'nin 50. yıl dönümünden 17 gün sonra Ay yüzeyine inebilmişti. Ben bu farkı açıklayamıyorum ama tüm göstergeler Luna 21'in SSCB'nin 50. yıl dönümüne planlanmış olduğunu gösteriyor. Örneğin yukarıdaki SSCB bayrağı üzerindeki "50 ЛЕТ СССР (SSCB'nin 50. Yıl Dönümü)" ve soldaki Leninli aynı yazı Luna 21'den alınmadır (Bkz. "[SSCB'de Uzay Keşfi 1973](#)", PDF'de S. 17, "[These pennants portraying Lenin the Soviet coat of arms and the Lunokhod 2 lunar vehicle and inscribed USSR 50th anniversary](#)", "[Soviet Spacecraft Pennants](#)", "[1973'teki Sovyet pulları](#)", "[1973'teki Ekvator Ginesi pulları](#)", "[Luna Series Satellites \(and Lunokhod Rovers\)](#)").



Güzel, bu kadar kaynaktan sonra hemen 100 puanlık soruma geçiyorum: Luna 21 Ay yüzeyine SSCB'nin 50. yıl dönümü olan 30.12.1972'de değil de neden 16.01.1973'te indirildi?

Şimdi Rus kardeşlerimiz, özellikle **Putin** gibi Sovyet döneminden kalma Ruslar, bu sorunun yanıtını düşünürlerken Luna 21 ve üzerindeki Lunokhod 2'ye kısaca bir bakış atalım. Ne yazık ki bilgilerimiz son derece kısıtlıdır (ki Luna 21'in Ay'a inişi büyük bir gizlilik içinde yürütülüyordu). Bu nedenle elde ettiğim bilgilere göre Luna 21'in Luna 17'nin 2. versiyonu olduğunu (ki bunu Lunokhod 1&2 adlı Ay yüzeyi araçlarından açık bir şekilde görebilirsiniz) ve Apollo 17'nin 3.11° derece kuzeybatısındaki ve 174.89 KM uzaklığındaki Le Monnier kraterine 16.01.1973'te (Apollo 17'den 1 ay sonra) indiğini biliyoruz. Luna 21'in üzerinde **Lenin**'in kabartmasının olduğu 1 adet madalyon ve Sovyet bayrağı vardır. 16.01.1973'te Lunokhod 2'nin Ay yüzeyine inişi sırasında Luna 21 üzerindeyken aldığı ilk TV resimler yukarıda imaj çalışmalarında resimler idi. Lunokhod 2 görevi boyunca 80,000 TV resmi ve 86 TV panoramik fotoğraf geçti. Ama hepsi siyah-beyaz idi ve sürücüsü onun gönderdiği tüm görüntüleri TV ekranından siyah-beyaz olarak görüyordu. Bu nedenle [ilk resim](#)deki madalyondaki **Lenin**'in kabartmasının Ay yüzeyinde gerçekte nasıl görüldüğüne ilişkin renkli bir imaj çalışmasında bulundum ve ortaya yukarıdaki ilk sayfadaki resim çıktı. Ama bu mükemmel imajı elde edene kadar 2. sayfadaki 8 maddede görüldüğü üzere bir dizi imaj çalışmasında bulundum. Çünkü bu resim üzerinde Photoshop ile ne kadar çalışırsa çalışayım bir türlü gerçeğine yaklaşmak mümkün olmuyordu. İlk maddedekiler sonuncusu hariç bu türden kötü imajlar idi. Ben de bunun üzerine fotoğraf konusunda uzman web sitelerini aramaya başladım ve en yetkin 3 site (imaj geliştirme için <https://letsenhance.io>, renklendirme için [Colorize](#) ve tüm imaj işlemleri için [Colorize!](#)). Ama bunların ticari siteler olduklarına dikkat ediniz. Bu yüzden bana bedava olarak verilen tüm hakları madalyondaki **Lenin**'i canlandırmak için tükettim buldum (ki bu 10 gün aldı. Bunda tabii ki ilk başlardaki niyetsizliğimin payı da var) ve Photoshop'ta siyah-beyaz olarak en iyi hale getirdiğim [Lenin 1](#)'deki resmi bu en yetkin 3 sitenin ilkinde önce geliştirdim (enhance), sonra ikincisinde renklendirdim (Bkz. Madde 6). Yani tüm bu imaj çalışmalarından sonra Lunokhod 2 sürücüsü, Lunokhod 2'nin ilk hareket anında çektiği ilk panoramik fotoğraftaki resimleri TV ekranında siyah-beyaz olarak görürken bunlardan 2-incisinin gerçeğine en yakın görüntüsü ilk sayfadaki gibidir (Y.N. 1973'ten beri kayıp olan Lunokhod 2 LRO sayesinde 17.03.2010'da bulundu. Bkz. "[Russian rocket hits moon](#)", "[NASA shots of long-lost Soviet Moon rover](#)", "[Lunokhod found on the Moon \(and on Earth, too\)](#)", "[Soviet Union Lunar Rovers](#)"). **Putin**'e göre **Lenin**, kafasında Ruslara özgürlük güneşini getiren fikirler değil atom bombası taşıyordu (Bkz. "[Putin: Lenin, Rusya'nın altına atom bombası yerleştirdi](#)"). Fakat Kremlin sözcüsü **Peskov**'un, "[öfkeye gerek yok, Putin'in şahsi görüşü](#)." mesajından **Lenin**'in torunlarının **Putin** ile aynı görüşte olmadıkları anlaşılmaktadır. Ancak şimdi, ilk sayfadaki resimde görüldüğü üzere **Lenin**'in Luna 21'deki en net görüntüsünü elde ettiğimize göre, **Lenin**'in torunları ile **Putin**'i baş başa bırakmamızın gerektiğini, dolayısıyla aralarında yeniden bir diyalog kurulacağını düşünüyorum. Hayır yetmez, ben de oraya geliyorum!



Özetle bu çalışmalardan anlaşıldığı üzere Sovyetler Ekim Devrimi ve SSCB'nin 50. yıl dönümlerini gördüler ama 100. yıl dönümlerini göremediler. Ama onların göremediğini biz görebiliriz. Çünkü 10.02.2021'de Cumhurbaşkanı **Erdoğan**, Beştepe Millet Kongre ve Kültür Merkezi'ndeki Milli Uzay Programı Tanıtım Toplantısı'nda Türkiye adına tarihi bir dönüm noktasına şahitlik etmek üzere bir araya geldiklerini söyledikten sonra bize müjde verdi:



Yani SSCB'ye kısmet olmayan "100 ЛЕТ (100. Yıl)"da Ay yüzeyine biz ineceğiz. Hem de sert inişle. Bu ilk kez olacak, çünkü bu sefer Ay modülü yerine doğrudan roket indireceğiz. Bu sırada Ay yüzeyinden büyük bir miktarda toprağın kalkması bekleniyor!

Cumhurbaşkanı **Erdoğan**, çok önemli açıklamalarda bulundu. "İlk yerli ve milli yüksek çözünürlüklü yer gözlem uydumuz İmece'nin entegrasyon işlemleri tamamlandı, testleri sürüyor." ifadesinden sonra "Dünya yörüngesinden ateşleyeceğimiz kendi milli ve özgün hibrit roketimizle 29.10.2023'te Ay'a sert iniş gerçekleştireceğiz." dedi ve [10 uzay hedefini](#) sırasıyla şöyle müjdeledi (Bkz. "[Türkiye Uzay Ajansı \(TUA\) hedefleri açıklandı: '2023'te Türkiye Ay'a inecek!'](#)"):



1. Milli Uzay Programı'ndaki birincil ve en önemli hedefimiz Cumhuriyetimizin 100. yılında Ay'a ilk teması gerçekleştirmek,
2. Yeni nesil uydu geliştirme alanında dünya ile rekabet edebilecek ticari bir marka ortaya çıkarmak,
3. Türkiye'ye ait bir bölgesel konumlama ve zamanlama sistemi geliştirmek,
4. Uzaya erişimi sağlamak ve bir uzay limanı işletmesi kurmak,
5. Uzay havası ya da meteorolojisi olarak tabir edilen alana yatırımlar yaparak uzaydaki yetkinliğimizi artırmak,
6. Türkiye'yi astronomik gözlemler ve uzay nesnelерinin yerden takibi konularında daha yetkin bir ülke konumuna getirmek,
7. Uzay sanayi ekosisteminin geliştirilmesi,
8. Uzay teknolojileri geliştirme bölgesi,
9. Uzay alanında etkin ve yetkin insan kaynağımızı geliştirmek,
10. Bir Türk vatandaşını bilim misyonuyla uzaya göndermek.

Bu tür milli projelerle, uzay çalışmalarının gençler ve araştırmacılar nezdindeki cazibesini artırmayı ümit ettiklerine işaret eden Cumhurbaşkanı **Erdoğan**, şöyle konuştu: "Biz, astronomi, matematik ve tıp gibi temel bilimlere öncülük etmiş, çığır açmış bir medeniyetin mirasçılarımız. Türk ve Müslüman alimlerin asırlar önce yaptığı çalışmalar sayesinde bugün uzay çağını konuşabiliyoruz. Güneş'in kendine özgü hareketi olduğunu ilk keşfeden, Batılıların 'Alfraganus' adıyla bildiği İlk Türk ve Müslüman astronom **El Fergani**'dir. Andromeda gök adasını ilk kez gözlemleyen Batı dünyasında 'Azopi' adıyla tanınan **El Sufi**'dir. Jeodezi biliminin kurucusu, yer çekimi fikrini **Newton**'dan 7 asır önce dile getiren, güneşin hareketlerinden mevsimlerin başlangıç dönemine hesaplayan ve yaşadığı asra ismini veren **El Biruni**'dir. Gök cisimlerinin yere olan uzaklığını, yerkürenin eksenindeki eğikliğini günümüz hesaplamalarına en yakın değerde bulan, İstanbul'un enlem ve boylam derecesini belirleyen Aya-sofya'nın ilk müderrisi **Ali Kuşçu**'dur. Haberleşme, kontrol, denge kurma ve ayarlama bilimi olarak bilinen sibernetiğin kurucusu, su saatlerinden şifreli anahtarlar kadar birçok otomatik mekanizmayı tasarlayan **El Cezeri**'dir. Trigonometri ilminin babası, sinus, kosinus, tanjant ve kotanjantın tanımı ve ispatlarını yapan, ekliptik ile Ekvator arasındaki mesafeyi ilk kez gerçeğe en yakın hesaplayan **Takiyüddin**'dir. Gökkuşağı ve halen oluşumunu inceleyen, optik bilimi ve astronomi alanında döneminin en büyük otoritesi olan **Mirim Çelebi**'dir."

Bunların arasında sayılmayan ama makalede geçen diğer bilim adamlarımızı şöyle verebilirim: Yansıma Kanunu'nu 984'te keşfeden **İbn-i Sahl** ve onun Batı'ya taşınmasına sebep olan **İbn-i Heysem**'dir (ki Batı'daki adı **Alhazen**'dir). **Snellius**, aynı kanunu 1621'de tekrar keşfeder ama tam bir Hristiyan olduğundan asla kendisine mâl etmez. Ondalık kesirleri keşfeden ve  $2\pi$ 'nin 60 tabanındaki 6; 16, 59, 28, 1, 34, 51, 46, 14, 50 ile, dolayısıyla  $\pi$ 'nin 8 atmışlığını ama 10 tabanında da 3.1415926535897932424236650917035 ile 16 ondalığını doğru olarak veren **Gıyaseddin Cemşid**'tir. Bu konuda **Erbakan Hoca** bir hatıratını şöyle anlatır: "Tam 40 sene evvel (1951), çoğunuzun bildiği gibi Bendeniz Almanya'da Leopar tankları üzerinde çalışırken oradaki profesörlerle hep bunları münakaşa etmişizdir (tartışmışızdır). Kendilerine bir gün şu sözü söylemiştim. Dedim ki: 'Bak, siz Batılılar bize bir teknik buluş verdiğiniz zaman patent hakkı istiyorsunuz. Ya Müslümanlar sizden patent hakkı istese haliniz ne olurdu, biliyor musunuz?'"

-'Müslümanların bizde ne patent hakkı var ki?' dediler.

-'E, bak şurada Kaufhofa (markete) bir kız çocuğunu koymuşsunuz. Sabahtan akşama kadar tıklar tıklar rakamları yazıyor. Bu rakamlar Müslümanların rakamları.'

Bizim Batı'dan alınan rakamlar, Mağribi (Batılı) Müslümanların, Endülüs'ün kullandığı rakamlardır ve Müslümanların rakamlarıdır. Çünkü Avrupalılar ilimleri En-



## Önsöz

dünlülülerden aldılar. Eski yazıda kullanılan rakamlar ise Meşriki (Doğulu) Müslümanların rakamlarıdır, hepsi Müslümanlarıdır. Avrupalılar bu rakamları aynen taklit ediyor, bu bir.

İkincisi, Müslümanlar 10 tane işaretle sonsuz yazıyı, sayıyı ifade edebilme metodunu insanlığa kazandırdıkları gibi, o metot sayesinde toplama, çıkartma, çarpma, bölmeyi de insanlığa Müslümanlar hediye etti. Ve işte o vakit o profesörlere demiştim ki: 'Siz Kaufhofda (alışveriş merkezinde) her toplama için çok değil bir para verseniz, her çarpma için bir para verseniz, 1 yılda 10 tane Paris'i, 10 tane Londra'yı, 10 tane New York'u verseniz Müslümanların patent hakkını ödeyemezsiniz.'

Hatta kendilerine şunu söylemiştim, demiştim ki: 'Bak, eğer [Müslümanlar sizden patent hakkını isteseler, ayağınızda donunuz bile kalmaz!](#)', "[İnsanlık Tarihinde İlmî Yapanlar Müslümanlardır; Batı Hiçbir İlim Kurmamıştır!](#)". Bununla birlikte şunu da izlemenizi tavsiye ederim: "[Tüm İlimleri Müslüman Alimler Kurmuştur ve Batı'nın İlim Düzenindeki 7 Problemi](#)".

Hoca bu makalenin, dolayısıyla projenin esas konusu olan ekstrapolasyon hakkında da ayrıntılar verdi (ki Bölüm 2'nin sonunda [Büyük Piramit'in Giriş Koridoru'ndaki eksik parça](#)nın bulunmasıyla ilgili yapılan tahminler Hocanın burada verdiği örnekteki gibidir): "Matematikçi arkadaşlarımız bilirler. Matematikte 'Ekstrapolasyon (Dış Kestirim)' yapılır... Yani buraya kadarki geliş (insanlık tarihinin geliş eğrisi) incelenir, bundan sonra nasıl gitmesi icap ettiği hakkında bir fikir yürütülür: 'Bu eğri buraya kadar böyle gelmişse, bundan sonra sosyal olaylarda böyle kırılmalar olmaz; demek ki şöyle gidecek' diye, 'en iyimser tahminle böyle olur' diye bir tahmin yapılır.", "[İnsanlığın Muhtaç Olduğu Düzenin Matematiksel, Biyolojik ve Sosyolojik Tarifi](#)". Daha fazla bilgi için "[Adil Düzen Konuşması, 20.01.1991](#)"e bakınız!

Özetle, yukarıda kısaca sunduğum TUA'nın 2023 AY GÖREVİ projesini hararetle destekliyorum. Bunun en başta gelen nedenlerinden biri, **Sabiha Gökçen**'e göre, **ATATÜRK**'ün projelerinden birinin Ay'a bir Türk'ün ayak basması olmasıdır. Ama bu proje hem ömrü vefa etmediği için, hem de yanlış anlaşılması için (bkz. "[Beni hatırlayınız!](#)") günümüze kadar gizli kalmıştır. Bu projeden ilk kez **ATATÜRK**'ün doğumunun 100. yıl dönümü vesilesiyle **Sabiha Gökçen**'in anılarını kaleme alan gazeteci-yazar **Oktay Verel**'in 2 yıla yakın bir çalışma sonucunda çıkardığı ve THY tarafından yayınlanan "[Atatürk'ün izinde bir ömür böyle geçti](#)" kitabından öğreniyoruz. Eğer bu proje başarılı olursa hem Cumhuriyetimizin 100. yıl dönümü kutlamış olacağız, hem de **Prof. Dr. Necmettin Erbakan**'ın 97. yaşını. **Erbakan**, bu konuda bir gazetecinin, "Bugün doğum gününüz ve aynı zamanda Cumhuriyet Bayramı. Neler söyleyeceksiniz?" sorusunu Cumhuriyetin ilk kuşağının bir temsilcisi olarak, büyük bir övgüyle şöyle yanıtlar: "Ben, bu konuda doğum günümü kutlayanlara latife ile şu cevabı veririm: 'Doğum günüm için Türkiye'nin her yerinde bu kadar merasime ne gerek var?' **Ama şunu ifade etmek isterim ki Cumhuriyet Bayramı'nda doğmak insanı memnun eden bir husustur. Cumhuriyetin kendisi de bir doğuştur. Onunla birlikte doğmuş olmak bir sevinç kaynağıdır. İnşallah beraberce doğduğumuz Cumhuriyetimizi lider ülke yapacağız, yeni bir dünya kuracağız ve bütün ülkelerin önüne geçireceğiz.**", "[Erbakan: Ne Komünizm, Ne Kapitalizm!](#)". Diğer taraftan, **Gökçen**, kendisinin bu kitabı yazamamasının nedenleri şöyle sıralar: "Bu anıları yazılmasıyla **Atatürk**'ün bir vasiyetini de yerine getirdiğimi sanıyorum. Ben yapamadım, zamanım olmadı... Oysa çok isterdim kendimi bildiğim günden yaşamımın biteceği ana kadar başımdan geçen olayları anlatmayı, düşüncelerimi, inançlarımı, görüşlerimi bir bir, satır satır, sahife sahife kâğıda dökmeyi...". Kendisine tamamen katılmakla birlikte, Romberg İntegrali Projesi'nin 4. kronolojik çalışmam olan bu makaleyi yazmanın sevinci ve gururu içinde olduğumu belirtmem gerekiyor. Hem de keşiflerimi kronolojik ve eksiksiz bir biçimde vererek... Keşke 18 yıl önce yapsaymışım bunları ama o zaman da şimdiki imkânlar mevcut değildi. Yani yaş ile imkânlar birbirini dengeler vaziyette görünüyor!

Şimdi makalenin bölümlerine geçebiliriz. Makale 4 ana bölümden oluşur ve bunlara çalışırken bazılarında söylemeye fırsat bulamadığım ve bazılarında da fırsat bulsam bile açamadığım konuların tam bir özeti aşağıda vermemin uygun olduğu düşüncesindeyim. Çünkü konuları işlerken onları açmaya ne kadar çalışırsanız çalışın bir noktadan sonra ister istemez mekanikleşme oluyor. Yani konuları anlatırken ya kısaca bir sürü matematiksel ifadelerde bulunacaksınız, ki bu durumda mekanikleşme kaçınılmaz olur, ya da konuları açacağım diye masalsı bir forma sokacaksınız. İkincisine şimdiye kadar hiçbir makalede rastlamadım ve buna gerek de yok. Çünkü okuduğunuz bilimsel makaleler belli bir seviye ister ve o seviyenin altındakiler için yazılmaz. Ama **Erbakan Hoca**'nın temel bilimlere, özellikle matematik ve şimdi üzerinde çalıştığım ekstrapolasyona ilgisini görünce standart makale formundan vazgeçtim ve bu makalenin her konusundaki çalışmalarımı burada teker teker açıklamaya karar verdim!

Başlayalım!

**1. Bölüm.** 3 alt bölümden oluşur. İlkinde Trapez Metodu'nun geometrik yorumunu yapıp sonuçlarını verdim. Fakat önceki makalelerden farklı olarak, dağınık olan bu sonuçları 3 teorem altında toplayarak ispatlarını yaptım. Hepsi birer ders niteliğindedir! Bunlardan ilk teoremdeki  $T_n$  orta nokta formülünün ispatını [RİK 3](#)'teki (1.13)'te vermiştim zaten. Ama trapez formülünün (1.14)'teki  $K_n$ 'ye göre ispatını hiçbir kaynakta bulamazsınız. Çünkü tüm kaynaklarda  $K_{2n}$ 'nin  $K_n$ 'ye göre ispatı yer alır. Örneğin, 07.11.2016, 17:24'te bilgisayarıma indirdiğim "[An Introduction to Numerical Methods and Analysis, 2nd Edition](#)" kitabının 310. sayfasında böyle bir ispat vardır. Ama bu ispat Romberg döneminde kaldı, dolayısıyla modifiye edilmiş trapez formülünde tekrar yapmak gerekiyordu. Yani (1.17)'deki ispat derslerde kullanılabilir formattadır. İkinci teorem ise açıktır, dolayısıyla üzerinde bir şey söylemeye gerek görmüyorum. Ama bunun geometrik ispatını da yaptım ve bunu ileride vereceğim! Üçüncü teorem yepyeni bir teoremdir. Çünkü (1.22)'de  $K_n$ 'nin  $K_0$ 'a göre bir indirgeme formülü vardır. Bunun için 1. Yol'da (1.22)'deki her 2 eşitlikteki indirgeme bağıntılarının ispatlarını verdikten sonra 2. Yol'da da bunları farklı metotlarla tekrar ispatladım. Bunlardan sonuncusu Nümerik Analizciler'in aradığı ispat olmakla birlikte hepsi değerlidir. İkinci alt bölümde **Romberg**'in orijinal metodunu verdim ve bunun hemen altına da ilk gözlemimi çıkarttım. Yani bu gözleme göre **Romberg**'in orijinal metodunu çözdüğüm görülür ki bu, henüz 3. makalemi gösteriyordu. Üçüncü alt bölümdeyse başıma gelen talihsiz bir olaya yer verdim. Çünkü bu olay ilk kırılma anım olmuştu!

**2. Bölüm.** Makalenin en can alıcı bölümü budur. Çünkü ilk bölümde ne kadar iyi çalışırsanız çalışın Trapez Metodu'nun yakınsaklığı yavaştır. Çünkü **Romberg**, 14.02.1955 tarihli "[Vereinfachte numerische Integration von Werner Romberg](#)" adlı tezinin girişinde trapez formülünün katsayılarının (1,1) olduğunu söyler ki, bu haliyle (1,4,1) katsayılarına sahip [Simpson 1/3 kuralı](#) ve (1,3,3,1) katsayılarına sahip [Simpson 3/8 kuralı](#)ndan yavaştır. Ama **Romberg**, bunlardan Simpson 1/3 kuralının metodundan elde edilebildiğini söyler. Çünkü trapez formülü Huygens algoritmasında Simpson 1/3 kuralına karşılık gelir! **Romberg**, bunun için aynı tezin 2. sayfasının başındaki formüllerden sonra şunları söyler: "Man scheint nicht bemerkt zu haben, dass die S genau die Näherung nach der Simpson Formel S darstellen (S'nin Simpson S formülüne (Simpson 1/3 kuralı) göre tam olarak yakınsaklığı temsil ettiği fark edilmemiş görünüyor)." Yani daha o saate kadar bu durumu **Romberg**'ten önce kimse görememiş. İşte **Romberg** bunu bildiriyor tezinde!

### **Romberg'in Ketumluğu**

Ama ben neye kızıyorum biliyor musunuz? Te 2 Kasım 2016'dan beri **Romberg**'in metoduna çalışırken (ki 2018 yazında bitmişti), **Romberg**'in ketumluğu kadar beni hiçbir şey yormadı. Onun Nazi dönemine ait bir hatıratını bulabilmek için aramadığım yer kalmamıştı. Çünkü **Romberg**'in 1933'te Almanya'dan kaçması bana anlamsız geliyordu ve döneme ilişkin okumadığım kaynak, seyretmediğim film kalmamıştı ama **Romberg**'in Almanya'dan kaçmasına ilişkin soruya yanıt veremiyordum. İşin ilginç yanı şu ki, şimdiye kadar "**Romberg İntegrali**" projesinde hiçbir konuda takılmadım ve hiç kimseden de destek almadım (ki bunları övünmek için söylemedim; gerçekten de öyledir) ama bu soruya yanıt veremiyordum. Yani **Hitler** ne yapmış olabilirdi ki **Romberg** Almanya'dan kaçmış olsun? İlk başta basit gibi görünür ama gerçekte çok zor bir sorudur bu. Çünkü bazı şeyler yaşanmadan anlaşılabilir ki açmaza düştüğüm nokta buydu işte!

Şimdi bu kısa girişten sonra alt bölümlere geçebiliriz. Bu bölüm 4 alt bölümden oluşur. İlkinde Richardson ekstrapolasyonunun kısa bir tarihçesini verdim ve sonunda Romberg metodunun dijital çağın başlangıcındaki önemine dikkat çektim. Bundan sonra Richardson ekstrapolasyonunun 2 uygulamasını verdim:

1. **Aritmetik Ortalama Metodu.** Bu metod, trapez ve orta nokta formülleri için geçerli olan (1.21)'deki aritmetik ortalamasının bunların ekstrapolasyonlarında da yani (2.7)'de de geçerli olduğunu gösterir. Metodun zenginleşmesi için (2.7)'nin (2.6)'ya göre 2 farklı ispatını yaptım ve Sonuç 2.1'de **Romberg**'in bu metodu nasıl kullandığını gösterdim.

2. **Snellius Metodu.** Önce **Snellius**'un algoritmasının, ve bu arada **Kardinal**'in algoritmasının, **Huygens**'in tarihi çalışmasından nasıl elde edildiklerini gösterdim. Ama **Snellius**, bu algoritmayı bu şekilde değil de büyük bir ihtimalle **Kardinal**'in algoritmasından elde etmişti. Bunun nasıl olduğunu 2002'deki çalışmam göre (2.14) ile gösterdim. Sonra **Huygens**'in algoritmasının **Pfaff**'in algoritmasından nasıl elde edildiğini en açık şekilde gösterdim. Bundan sonra da Snellius-Huygens algoritmaları arasındaki ilişkiden yararlanarak **Huygens**'in algoritmasının üst sınırlar için de geçerli olduğunu ispatladım. Çünkü bu ispat **Huygens**'in çalışmalarında ve diğer tüm kaynaklarda da yoktu. Bu ispatı verirken **Snellius** ve **Huygens**'in resimlerine ve onların altlarında da katkılarına yer verdim. Bunlardan **Huygens**'in resmini bir yağlı boya tablosundan alırken **Snellius**'un uydurma olduğunu ama ona çok benzediğini söyleyebilirim. Bana göre **Snellius Huygens**'ten daha değerlidir ama bir yağlı boya tablosunun olmaması beni epey şaşırttı. Öyle görünüyor ki bu, kesinlikle Hollandalılar'ın ihmaldir. Acaba Hollandalılar, **Snellius** ile yaşıt **Frans Hals**'ı çağırılmaz mıydı? Çünkü lisedeyken **Frans Hals'ın tam koleksiyonu** geçmişti elime ve o sırada **Hals**'ın **büyük tabloları**nda ışığı ve renkleri çok iyi kullandığını görmüştüm! Eğer **Snellius**'un dönemindeki Hollanda'yı merak ederseniz **Frans Hals'ın tabloları**na bakmanız yeterlidir. Daha sonra Snellius algoritmasının ekstrapolasyonda Huygens algoritmasından nasıl elde edildiği gösterdim ve bunun altında (2.25) ile bir diğer sonucu verdim. Son olarak bunlara bağlı Richardson ekstrapolasyonunun Snell formundaki ifadesini ve aritmetik ortalama ile Snellius algoritması arasındaki ilişkiyi gösterdim. Özetle, **Snellius**'un algoritmasını 400. yıl dönümü nedeniyle Romberg İntegrali'ne kazandırmak, benim için hem heyecan vericiydi hem de gurur vericiydi. Kaldı ki kendisi bu projede motivasyon hocamdır!

İkinci alt bölümde Romberg İntegrali'ne E-ATA 1 Algoritmaları'ndan 3 transferde bulundum. Bunlardan ilki **Kardinal**'in algoritmasından türetilen ekstrapolasyondur. Bu ekstrapolasyonu 2003 ve 2018 olmak üzere 2 kez çıkarttım. Çünkü onu 2018'de tekrar çıkartırken 2003'te keşfettiğimi unutmuştum. Ama bu çalışmayı arşivimden çıkartıp Alıntı 2.2 olarak koydum buraya. Meraklısına bu çalışmanın olduğu dosyanın orijinali gönderebilirim. Yani orada ne yazıyorsa hepsi doğrudur. İkinci ekstrapolasyona geçmeden önce, Prens **Claus von Amsberg**'in kültürle ilgili son derece önem arz eden sözü (1) gereğince **Snellius**'un algoritmasının 400. yıl dönümü nedeniyle bir hatırlatmada bulundum. Bu arada **Snellius**'un, Hesse-Kassel'in Prensi **IV. William**'a hizmet etmiş olduğunu hatırlarım (Bkz. "4.4.3. First Contacts: Services For A Prince", "The Monthly Review"). **Snellius**, Prens **IV. William**'ın 1593'teki düzeltilmiş ama başı sonu belli olmayan yıldız kataloğunu 1618'de, özetle söylemek gerekirse, "**Hessen Gözlemleri (Hessian Observations)**" olarak sundu (ki bu, **Snellius**'un adını taşıyan ilk astronomik çalışma idi). Orada Google'un doodle'ı gibi photoshopta hazırladığım **Snellius**'un algoritmasının 400. yıl dönümünü için bir resim sundum ve altına **Snellius** ile öğretmeni **Rudolf van Ceulen** arasındaki iş birliğine ilişkin özet bir tarihsel malumatta bulundum. Bu açıklamalardan sonra 2002'de keşfettiğim Snellius ekstrapolasyonunu verdim. Ama bu ekstrapolasyon (2.39)'daki gibi genel değil özeldir:  $\Pi$  için dolayısıyla **Snellius** için yazılmış bir ekstrapolasyondur. Üçüncü ekstrapolasyon ise geneldir. O, Richardson ekstrapolasyonunu da kapsayan genel bir ekstrapolasyondur. Bu ekstrapolasyonun ardından **Arşimet**'in Önerme 3'ündeki kesirleri 2 farklı yolla analiz ettim. İlk (2.42) lineer ekstrapolasyonundan elde edilen (2.43)-(2.46)'daki sonuçlarda bir anomalinin olduğunu fark ettim (ki bu, (2.39)'un ilk kullanıldığı uygulamadır. Çünkü 2002-2003'te ise E-ATA 1 Algoritmaları'ndaki tüm ekstrapolasyonları **Kardinal**, **Snellius** ve **Huygens**'de olduğu gibi yalnızca  $\pi$  için kullanıyordum), sonra bu anomalinin nereden kaynaklandığını (2.35)'teki Snellius ekstrapolasyonunun ilk 5 iterasyonu gösterdim!

Üçüncü alt bölümde lineer ekstrapolasyonlardan, (2.39)'dan 2 açık uygulama verdim. Bunlar (2.39)'dan elde edilen ilk 2 ekstrapolasyon olup (ki ilki Richardson ekstrapolasyonudur), "ekstrapolasyon+tablo+uygulama+program+demo" formatındadırlar. Tablo 2.4'te ise (2.39)'dan elde edilen ilk 7 ekstrapolasyonun **Romberg**'in örneğine uygulamasını verdim ve bunun altına da bu uygulamadan elde edilen sonuçların grafik yorumunu yaptım (Y.N. (2.39)'daki ekstrapolasyonlara göre yazılan Romberg integraline ilişkin Mathematica programlarını ve bunlardan ilk 3'ünün demosunu "**RİK 3/S3. Mathematica Programları ve Demoları**"nda bulabilirsiniz). Bundan sonraki 2 teorem ve sonuçları 4. alt bölümdeki yüksek mertebeli ekstrapolasyonlara hazırlıktır.

Dördüncü alt bölümde ilkin (2.77) kuartik ve (2.78) nonik ekstrapolasyonların üretildiği (2.74) ve onun da indislerinin kısaltılmışı olan (2.75)'teki  $p^2$ -inci mertebeden ekstrapolasyonu verdim. Çünkü bunları ilk keşfettiğim sırada böyle tanımlamak zorunda kalmıştım, dolayısıyla bunlar prototip haldedirler. (2.76)'daki limitler ise (2.74), dolayısıyla (2.75)'teki iterasyonların mertebelerini gösterir. Bu sonuçla buradan bir kez daha tekrar etmeliyim ki, eğer bu yeni ekstrapolasyonları keşfetmeseydim, büyük bir ihtimalle bu çalışmayı da diğer çalışmalarımda olduğu gibi bir kenara bırakacaktım. Çünkü buraya kadar Romberg İntegrali için yaptığım çalışmalar (tarihi çalışmalar hariç) hiç heyecan vermiyor, angarya gibi geliyordu. Ama neyse ki hem yüksek mertebeden ekstrapolasyonlar hem de Giza Piramitleri'nin Oturma Planı bir araya gelince bendeki heyecan tavan yaptı. Ama bu heyecanın büyük bir kısmı piramitlerden geliyordu. Hem de ne heyecan!... İlk (2.77) kuartik ekstrapolasyonu, sonra (2.78) nonik ekstrapolasyonu keşfettikten ve bunların üretildiği (2.74)'ü ve onun da kısaltılmışı olan (2.75)'i bulduktan sonra soluğu derhal piramitlerde aldım. Çünkü piramitlerde çalışırken göstereceğiniz en küçük bir zafiyet affetmez sizi. Yani piramitlerdeki bulguları sıcağı sıcağına değerlendirmem gerekiyordu!

Buna göre bu yeni bulgularım hakkında kısa bir değerlendirme yapmam gerekirse şunları söyleyebilirim: (2.77) kuartik ekstrapolasyonu bulmam kolay olmadı; çünkü böyle bir sonucun çıkacağını beklemiyordum. Şöyle ki: 2002-2003'te E-ATA 1 Algoritmaları'nı genel bir indirgeme bağıntısında türetiliyordum, dolayısıyla bu algoritmalarındaki yani ekstrapolasyonlardaki iterasyonların indisleri birer aritmetik dizi şeklinde son derece basit idiler. Öyle indislerde kat almak kolay değildi, çünkü bu da bir diğer genelleştirmeye ve onun ispatına götürüyordu. Örneğin, 13.05.2003, 23:14'te keşfettiğim (2.39) bir istisnayı ve bu, ulaşabildiğim en son ekstrapolasyon idi. İşte bu yüzden ilkin Mathematica'da Tablo 2.8'deki sonuçları gözlemlerim ve orada 2003'te fark edemediğim bir anomali gördüm. O sırada Tablo 2.8'deki (2.59)'dan elde ettiğim kırmızı renkli sonuçlar ile doğru-yanlış bir şekilde türettiğim Tablo 2.7'deki iterasyonlardan elde ettiğim siyah renkli sonuçları karşılaştırmıştım. Dikkat ederseniz bu 2 farklı yaklaşımın sonuçları Tablo 2.8'in 4. satırına kadar hemen hemen aynıdır. Ama 4. ve sonraki satırlarda Tablo 2.7'deki iterasyonlar ya da (2.77)'nin (2.59)'ün önüne geçtiği bariz bir şekilde fark ediliyordu ki anomali dediğim şey budur. Sonra Tablo 2.7'deki ilk iterasyonda 2 yerine 3 alırsam sonucun ne olabileceğini kestirmeye çalıştım. Böylece Tablo 2.7'deki iterasyonlardan Tablo 2.9'da iterasyonlara geçiş yaparak, Tablo 2.9'daki iterasyonlardan, başka bir ekstrapolasyonla karşılaştırmadan, Mathematica ile Tablo 2.10'daki sonuçları buldum. Son olarak, Tablo 2.7'deki iterasyonların üretildiği formülü aradım ve (2.77)'yi ve aynı şeyi Tablo 2.9'daki iterasyonlar için de yapınca (2.78)'i buldum. Bu formüllerde dikkat ederseniz, (2.78)'deki iterasyonlardaki indislerin (2.77)'dekilerine göre toplanmış olduğunu görürsünüz. Doğrudur, (2.78)'de kısaltmaya gittim, ama herhangi bir hataya yer vermemek için (2.77)'deki orijinalini de tuttum. Tüm bunları Mathematica'da "**Romberg Metodu.nb**" adlı dosyaya yazıyordum ve sonuç bölümüne (2.77)&(2.78)'in genelleştirilmiş olan (2.74) ve onun da indislerinin kısaltılmışı olan (2.75)'i yazdıktan sonra dosyayı kapattım. Çünkü çok yorulmuştum, dinlenmeye gittim. Aynı gün (19 Şubat 2017/Pazar) yataktan geç kalktım ve biraz kafa dinlendirmek için **Petrie**'nin

(1) Prens **Claus von Amsberg**'in o sözünü ilk kez 2016'da **C FONDUS**'da görmüştüm. Görmeliydiniz, sitenin girişindeki sol tarafta sizi adeta Prens **Claus von Amsberg** karşılıyordu (ki şimdi bu, ana sayfadaki değişiklik nedeniyle en alta konulmuş). Tabii ki bu sözün tamamını sergilemek mümkün olmadığı için sadece ilk cümlesi görünüyordu; ama oradaki linki tıkladığımda tamamına ulaşabiliyordum (ki o **suradaydı** ve şimdi buna erişebilmek mümkün değil). Kültür ile ilgili güzel şeyler söyleniyordu ve derhal çevirmeye başladık. Çünkü öğrenciler de merak etmeye başlamıştı. Dikkatinizi çekerim: Daha o sırada ortada ne bir proje var, ne de bu projeye ilişkin bir site... Elimde hiçbir şey yoktu. Ama aklıma parlak bir fikir geldi: 05.05.2017, 02:18'de A3 formatındaki 54 sayfalık bir araştırma makalede **Snellius**'un ekstrapolasyonu nedeniyle kültürel bir alışveriş için **RİK 3**'ün 3. sayfasındaki gibi bir seslenişte bulundum. Çünkü Prens **Claus von Amsberg**'in o sözünü misyon olarak kabul etmişim!

## Önsöz

“[Giza Piramitleri ve Tapınakları](#)” adlı kitabındaki piramitlerin oryantasyonlarına ve pozisyonlarına göz attım. Amacım, **Petrie**'nin koordinatlarına göre Giza piramitlerinin merkezlerinin ve köşelerinin birbirlerine uzaklıklarındaki **Jim Alison**'un “[PROPOSED DESIGN SPECIFICATIONS FOR THE GREAT PYRAMID AND FOR THE SITEPLAN OF THE GIZA PLATEAU](#)” makalesinde geçen sonuçları daha da belirginleştirmek ve varsa, hataları düzeltmek idi. O, bu piramitlerin merkezleri ve köşeleri üzerine kurduğu dik üçgenlerle mükemmel yaklaşımlarda bulunmuştu ama bu dik üçgenler arasında bir planın olması gerektiğini düşünüyordum. Örneğin, o, Büyük piramit ( $G_1$ ) ve Menkaure piramitinin ( $G_3$ ) merkezlerinde kurulu dik üçgeni  $7/9$  ve köşelerinden kurulu dik üçgeni  $9/11$  olarak verir. Dikkat buyurunuz: **Jim Alison**, bu sonuçlarla

“Piramitlerin köşeleri ya da merkezleri arasında herhangi tam bir ilişki gözükmez; ve çevre duvarlarının düzensizliği ve zeminin gözükmemesi ve doğallığından herhangi bir bağlantı planlanmış gibi görünmez (There does not appear to be any exact relation between their centres, or between the corners; and from the nature and appearance of the ground, and the irregularity of the peribolus walls, it would not seem likely that any connection had been planned)”, [Ch 13. Positions and orientation of the Pyramids/Sec 92. Relative positions of Pyramids.](#)

gözlemine yapan, yani piramitlerin merkezleri ve köşeleri arasında hiçbir bağlantı (ilişki) göremeyen vatandaş **Petrie**'yi yalanlar. O zaman madem durum böyle, peki  $G_1$  ve  $G_2$  ile  $G_2$  ve  $G_3$  çiftlerindeki dik üçgenler neler idi? Bunlar  $G_1$  ve  $G_3$  çiftine göre daha karmaşıktır, dolayısıyla bir türlü kesinleştirilemiyordu. İşte bu karmaşıklık içinde Resim 2.4, Giza piramitlerinin birer plan dahilinde yapılmış olduğunu söyler. Bana göre burada takdir edilecek kimseler varsa, o da **Menkaure**'nin mühendisleridir. Çünkü onlar, Giza platosunda  $G_1$  ve  $G_2$  piramitlerinin tam bir oturma planını çıkarttılar ve bu plana göre  $G_3$  piramitini konumlandırıdılar. Anlaşılan o ki **Menkaure**'nin mühendisleri, Giza platosunu bir kâğıt gibi yani  $\mathbb{R}^2$  düzlemindeki gibi kullanmışlar ve hesaplamalarını bunun üzerinde (papirüsler) yapmışlar! Yani öyle görünüyor ki Resim 2.4'teki plandaki açılmalı oynamalar **Petrie**'nin ölçümlerine göre 1' civarındadır ve bu haliyle bile piramitologların aklını kaçırtır. Ama bu, **Glen Dash**'ın “[Where, Precisely, are the Three Pyramids of Giza?](#)” çalışmasındaki koordinatlara göre çok daha iyidir. Bu son sonuç, çözünürlüğü yüksek bir uydunun kiralmasıyla **Petrie**'nin koordinatlarının doğrulanması ve varsa, hatalarının bulunarak düzeltilmesi gerektiğini gösterir. Örneğin, Resim 2.4'teki Giza piramitlerinin fotoğrafı 2007'de 0.651 M piksel çözünürlüğündeki [Quickbird](#) tarafından çekilmiştir. Ama 2009'da 0.5 M piksel çözünürlüğündeki GeoEye-1, [aynı yerin](#) daha iyi bir fotoğrafını çekti!

### Uzaydan Giza Piramitleri'ni Yakalama Oyunu!

Çok ilginçtir, ESA'dan İtalyan kadın astronot [Samantha Cristoforetti](#), Expedition 43'ün yörüngedeki ilk uçuşu esnasında, 10.06.2015'te geniş bir açıda yakalanan Giza Piramitleri'nin mükemmel bir fotoğrafını çekti:



ISS'de uzaydan çekilmiş Giza piramitlerinin bir görünümü, [ESA/Samantha Cristoforetti](#).

Amacı, piramitler (eski) ile onun yanındaki modern yapıları karşılaştırmak ve aradaki farkı görmektir. Ama bu sırada piramitlerin, batıdan gelen Güneş ışınları nedeniyle doğu taraflarında küçük gölgeler yaptıklarını gördü. Uçuş komutanı **Tery Virts**, twitterdan [bir mesaj](#) paylaşarak, **Cristoforetti**'nin çektiği bu fotoğraftaki gibi güzel fotoğrafları çekmesinin uzaydaki son gününe kadar sürdüğünü belirtir.

### Orion Gizemi Hakkında

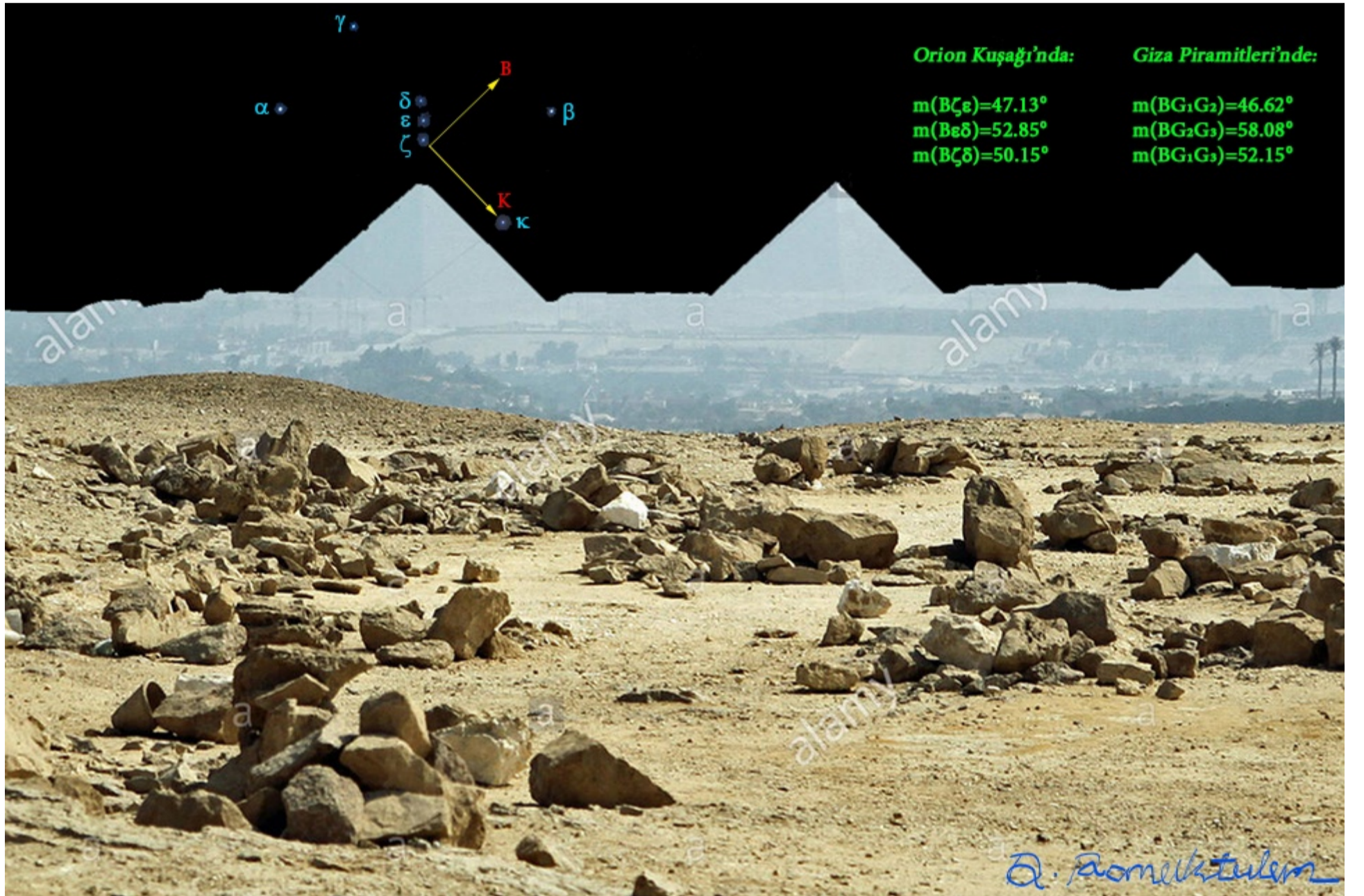
Belçika asıllı mühendis **Robert Bauval**, özellikle Giza Platosu'nun 4. Hanedanlık Mısır piramitleri ile Orion (Avcı) takımı yıldızındaki belirli yıldızların hizalanması arasında bir ilişkiyi öneren “**Orion Korelasyon Teorisi (OCT)**” ile tanınır. Ancak **Bauval**'ın “[The Orion Mystery](#)” adlı kitabının Giza Piramitleri'nin Orion kuşağına hizalandığını önermesinden 20 yıl önce, **Dr. James J. Hurtak** 1973'te böyle bir korelasyona işaret etti!

## Önsöz

**Bauval** için ise her şey 1979'da başlamıştı. O, bunu kitabın ilk bölümdeki "Orion Gizemi'nin Doğuşu" nun girişinde şöyle anlatır: "1979 yılında Londra'nın Heathrow Havaalanı'nda, **Robert Temple**'in yazdığı 'Sirius Gizemi' adlı bir kitap satın almıştım. Sudan'a giderken o kitabı yanımda götürdüm. Orada mavi Nil'i Rahad nehriyle birleştirecek kanalı açma konusunda bazı mühendislik görevlerim vardı.

Kitabın tarihsel bir dedektif hikayesi olduğunu anladım. İlginçti, çünkü başlıca odak noktası, Dogonlar diye bilinen bir Afrika kabilesiyle ilgiliydi. Bu insanlar her 60 yılda bir 'Sigui' adını verdikleri bir tören yapıyorlardı. Bu törende din adamları yüzlerine maskeler takıp pek karmaşık bir dans yapmaktaydılar. Bu aslında bir yenilenme töreniydi. Sirius'un gözle görünen hareketine dayalıydı. Sirius'u pek çok kimse 'köpek yıldızı' diye tanır. Sirius gökteki en parlak yıldızdır ve Orion'un hemen altındaki Canis Major yıldız kümesindedir. Sirius Gizemi aynı zamanda Eski Mısır astronomisinin çeşitli yönlerini de inceliyordu. Ben de hem amatör Ejiptolog, hem de Eski Mısır astronomisine meraklı olduğum için, kitap gözüme tam Sudan'a götürülmeye uygun gibi görünmüştü. Orada geceleri gökleri yıldız izlemeye son derece uygundu..."

1983'te bir gece Suudi Arabistan'da çalışırken, ailesini ve bir arkadaşının ailesini Arap çölünün kum tepelerine kamp gezisine çıkardı. Arkadaşı, Orion takımyıldızına işaret etti ve Orion'un kemerini oluşturan yıldızların en doğusundaki Alnitak'ın diğerlerinden biraz uzaklaştığından bahsetti. **Bauval** daha sonra Orion kuşağındaki 3 ana yıldızın düzeni ile Giza nekropolündeki 3 ana piramitin düzeni arasında bir bağlantı kurarak şu keşifte bulundu: "Giza'daki 3 büyük piramitin diziliminde bir gariplik fark ettim. İlk 2 piramit köşegenlerinden birbirinin tam hizasına yerleştirildiği halde, daha küçük olan **Menkaure**'nin piramiti, hafifçe sola kaymış gibiydi. Bu muhteşem yapıları yaratabilecek ve ölçülerde asla şaşmayacak bir mimariye sahip olan Mısırlıların, 3 piramiti aynı çizgi üzerine yerleştirmeyi başaramamış olduğunu düşünmek akla hiç yatkın gelmiyordu doğrusu. Sonra Orion'un merkezindeki en önemli 3 yıldızın, Alnitak, Alnilam ve Mintaka'nın, aynı Giza piramitlerinde olduğu gibi bir hiza sapmasına sahip olduğunu fark ettim: İlk 2 büyük yıldız, Alnitak ve Alnilam doğru hizadaydı ama üçüncü ve en küçük yıldız olan Mintaka, hafifçe sola kaymıştı diğerlerine göre."



Djedefre'nin piramitinden (Ebu Ravaş) Giza Piramitleri'nin görünümü. Google Earth'e göre Djedefre'nin piramitinin merkezinden (G<sub>4</sub>) Büyük Piramit'in merkezine (G<sub>1</sub>) uzaklık |G<sub>4</sub>G<sub>1</sub>| = 8207.29 M ve bu doğrultunun doğu (D) ile yapmış olduğu açı m(DG<sub>4</sub>G<sub>1</sub>) = 45.89° dir (ki bunun için Büyük Piramit'in bir köşegeninin gözükmesine dikkat ediniz). İşte bu açıda yani GD'dan 0.89° güneyde Starry Night Pro Plus 8 ile yaptığım araştırmada Orion'un pozisyonunun Büyük Piramit'in tepesindeki gibi yani tam yükselişteyken olduğu sonucu çıktı. Bu ise Djedefre piramitinden Giza piramitlerine bakış doğrultusundaki Orion'un yukarıdaki gibi görüldüğünü gösterir.

### Orion Kuşağı'ndaki Yıldızların Elle Çizimlerinde İnanılmaz Bir Detay!

Bu konuda 2 tarihi örnek verebilirim. İlkinde 18. Hanedanlık dönemindeki astronom **Senmut**'un, mezar odasındaki astronomiye göre dekore edilmiş tavanın güney tarafında bir teknenin içindeyken Orion kuşağı altında resmedilmiş olduğunu görüyoruz (ki **Wayne Herschel**, "Hidden Records I" adlı kitabında **Senmut**'a "Teknedeki Adam (Man In The Boat)" der. NASA'nın "Senenmut: An Ancient Egyptian Astronomer" makalesi buna dikkat çeker). Çünkü Tanrılar Orion'daydı ve o da ahiret yolculuğu sonunda hedef olarak seçtiği Orion'da olacaktı. Çok ilginçtir, 03.07.2006, 21:50'de **Senmut**'un üzerindeki kuşaktaki yıldızlar arasındaki uzaklıkları orijinal fotoğraf üzerinde Autocad ile ölçtüğümde Giza piramitlerindeki gibi olduğunu görürken, 03.07.2006, 23:00'da ise **Galileo**'nun 1610'da elle çizim yaptığı orijinal sayfanın üzerinde Autocad ile ölçüm yaptığımda gerçeğe yakın olduğunu görmüştüm (Y.N. **Celal Şengör**, aslında "Bu gördüğünü yazıyor!" derken **Galileo**'yu kastediyordu. Çünkü **Galileo**'nun, optik tüpünden Orion kuşağındaki yıldızlara bakarak onları çizirken yaptığı şeyin tam karşılığı bu idi).

Hatırladığım kadarıyla 2000'lerin başında **Bauval**'ın Giza Piramitleri-Orion Kuşağı eşleşmesi için önerisi şuydu: Orion kuşağındaki yıldızların yeryüzündeki bir kopyası, Djedefre piramitinden Giza piramitlerine Djedefre Piramiti-Zaweyet Al Aryan Piramiti hattında m(BG<sub>1</sub>G<sub>3</sub>) = 52.15°'lik açıdan bakıldığında (ki bu bakışı yukarıdaki resimde tam yansıttım) Giza piramitleri idi (Bkz. "A NEW INTERPRETATION OF ORION AND TAURUS IDENTIFIES THE ENTIRE LOWER EGYPT PYRAMID FIELD AS ONE GRAND UNIFIED STAR MAP"). Ancak ne var ki Saif (κ)-Alnitak (ζ) hattını Kuzey (K) olarak kabul edip ona dik bir Batı (B) eksenini göz önüne aldığımız zaman, Orion kuşağı yıldızları arasındaki açıların Giza piramitlerindekiyle oldukça yakın sonuçlar verdiklerini görürsünüz (ki bunlar yukarıdaki resmin sağ üst köşesindedir). Yani bu bakış **Bauval**'inkine göre daha doğru gözükür. Çünkü Resim 2.4'teki planda da en büyük sapma burada olduğu gibi ortadaki Khafre piramitinde idi. Ah **Khafre**, vah **Khafre**!

## Önsöz

**Bauval**, özellikle **Alexander M. Badawy**'nin çalışmalarından beri Mısır kültürüne, özellikle de dinine meraklı biriydi. Bütün antik uygarlıklarda olduğu gibi eski Mısır'da da tapınakların belli yıldızlara göre hizalandıklarını, oryantasyonlarının “**gündönümü**” ya da “**ekinoks**”lara yöneltilmiş olduklarını iyi bilirdi. Mısır'da en belirgin ve baskın kült, Osiris kültüydü ve bu tanrı, Orion takımıyıldızıyla simgelenirdi. Buna göre ilk kez 1964'te **Badawy**'nin işaret ettiği “**Kral Odası Güney Şaftı-Orion Kuşağı**” gizimini 10 yıl araştırdıktan sonra, **Adrian Gilbert** ile astronomi destekli gözlemler sonucunda Giza Piramitleri'nin Orion Kuşağı olarak bilinen 3 yıldızın yeryüzündeki kopyası olarak inşa edilmiş olduğunu kanıtladılar ve bu bulgu Mısır yıldız dinini bilenler için hiç de şaşırtıcı değildi. Çünkü Mısırlılar, yeryüzünü ve yaşadıkları toprakları, gökyüzünün yani ölümsüzlüğe eriştiklerinde ulaşacakları yerin bir kopyası olarak düşünürlerdi ve piramit metinlerinden dini yazıtlara dek her yerde bu vurgulanırdı: Nil, Mısır yıldız kültüründe Samanyolu'na denk geliyordu. Samanyolu'nun çevresindeki özel bir gökyüzü alanı, eski Mısırlıların “**Duat**” diye adlandırdıkları “**tanrıların mekanıydı**”; bunun yeryüzündeki kopyası da Nil'in batısına denk getirilmişti! **Bauval**'in bulgusunda şaşırtıcı olan şey çok daha başkaydı. Bu 3 piramit M.Ö. 2600 dolaylarında yapılmıştı ama Orion'un o tarihteki göksel konumu, Giza'daki piramitlerin konumundan 45 derecelik bir sapma gösteriyordu!

**Bauval**, bir bilgisayar programı (SkyGlobe 3.2) yardımıyla, Orion ile piramitlerin bire bir aynı doğrultuya yerleştiği tarihi aradı ve karşısına M.Ö. 10.500 çıktı! (Y.N. Bizde **Hakan Yedican** da aynı fikirdedir. Bkz. “**Bilinmeyenleriyle Piramitler: Piramitlerin Sırları**”. Bu konu tartışılabilir ama Büyük Piramit hakkındaki bulguları sağlamdır. Özellikle, **Sitchin**'in 40 sayfada anlattığı “**Gökyüzüne Merdiven**” kitabının “**Bölüm 13: Firavunun Adıyla Oynamak**” bölümünü bir çırpıda özetlemesi, takdirimi kazandı) İşin ilginç yanı, bu tarih Orion takımıyıldızının presesyon döngüsünün en alt noktasına rastlıyordu.

Eski Mısır kültüründe, “**ilk başlangıç**” olarak anılan bir dönem olduğunu biliyordu **Bauval**: “**Zep Tepi**” olarak adlandırılan bu dönem, Mısırlıların ülkelerinin tarihini anlatırken, “**Mısır'ı tanrılarının yönettiği mutlu dönem**” diye söz ettikleri bir dilime de denk geliyordu. Binlerce yıl önceyi anlatıyordu bu sözcük. Acaba Mısırlılar piramitleri inşa ederken, çok eski bir dönemi anmak üzere, Orion'un M.Ö. 10.500'deki yerleşimini mi seçmişlerdi Master Plan olarak? Bundan 4500 yıl önce, presesyon hesapları bile yapacak biçimde astronomi bilgisine nasıl sahip olmuşlardı? Yoksa bundan 12000 yıl önce var olan bir uygarlığın geride bıraktığı izleri mi görüyorduk Mısır'da? **Bauval**, 1994'te yayımlanan “**The Orion Mystery**” adlı kitabında bu soruları sordu (ki bu kitap bizde **Belkis Çorakçı**'nın mükemmel bir çevirisiyle “**Tanrıların Evi Orion'da**” adıyla **Milliyet Yayınları** tarafından yayımlandı) ve büyük sansasyon yarattı. Yanıtlarsa, hala araştırılmayı bekliyor... (Daha fazla bilgi için “**7. The Star Correlation Theory**” makalesine bakınız)

Fakat **Bauval**'in bu araştırması **Rudolf Gantenbrink** ve ekibinin Kraliçe ve Kral odalarının şaftlarındaki araştırmalarından bağımsız değildi. O bu konuda şunları söyler (Bkz. “**Tanrıların Evi Orion'da**”, S. 11): “**Ama o şaftlarla ilgilenen tek kişi Rudolf Gantenbrink değildi, çünkü ben de o şaftları yıllardan beri, astronomik ilişkileri açısından inceleyip durmaktaydım. Olağanüstü bir rastlantı sonucu, Adrian Gilbert ile ikimiz Kraliçe Odası'nın ve güney şaftının açılış yerinin fotoğraflarını, UPUAUT 2'nin destansı yolculuğundan birkaç gün önce çekmiştik. Ben Rudolf ile ve ekibiyle bulduğumda da onlar kraliçe şaftının araştırılması hazırlıklarının son aşamalarındaydılar.**”



Soldan sağa doğru Prof. Jean-Philippe Lauer, Prof. Jean Kerisel, Rudolf Gantenbrink, Sör I.E.S. Edwards, Robert G. Bauval.

**Adrian** ile benim ilgimiz çok daha soyuttu. Biz bu şaftların neyi simgelediğini anlamak istiyorduk. Bunların havalandırma amacıyla açılmadığı bugün artık çok iyi anlaşılabilir bulunmaktadı. Asıl önemli olan, bu şaftların işaret ettiği yöndür. Bunlar Eski Mısırlılar için önem taşıyan yıldız kümelerini işaret eder doğrultuydular. Ben piramit yapımcılarının kaybolmuş olan yıldız dinini incelemekteydim ve bu konuda birkaç makale yayımlamıştım. Ama bana sanki şaftların açılarıyla ilgili veriler yanlışmış gibi geliyordu. **Gantenbrink**'in lazerle yapacağı yeni ölçümlerin bize daha doğru bir yön vereceğini, böylelikle şaftın astronomik hedefinin kanıtlanabileceğini umuyordum...”

Benim sorum ise çok daha basit: UPUAUT projesindeki çalışmaların yayınlandığı ve 1999'dan beri yayında olan <http://www.cheops.org> sitesi Şubat 2021'de kapandı (ki bu site şimdi yine aynı konuda faaliyetini sürdürmektedir) ve bunu yukarıdaki resmin ortasındaki **Gantenbrink**'in, büyük bir ihtimalle Covid 19, öldüğüne yordum (ki eğer yaşamıyorsa o resimden geriye bir tek **Bauval** kalmış oluyor). Fakat bu düşünce site kapandıktan sonra değil ilk kez geçen yıl piramitlerde çalışırken aklıma gelmiş ve pandemi nedeniyle ağırlık kazanmıştı. Acaba Almanya'da son durum nedir? Yani şimdi 71 yaşında olması gereken **Gantenbrink** yaşıyor mu? Eğer yaşıyorsa “**KHUFU'NUN SARKOFAJININ DEFİN ODALARINDAKİ VE PİRAMİTTEKİ KONUMLARI**” adlı makalemdeki “**4.6.1.3. Gantenbrink'ten Bir Rica**” bölümünün sonundaki 3 sorum nedeniyle “**Die sogenannten Luftkanäle der Cheops Pyramide: Modellkorridore für den Aufstieg des Königs zum Himmel (with an additional note by Rudolf Gantenbrink) (MDAIK Band 50, 1994)**” kitabını ve mümkünse UPUAUT 1&2'nin şaftlardaki tüm ölçümlerini yayımlayabilir mi acaba? Kendisi buyursun, <https://romberg-integrali.org> adlı web siteme baksın ve ondan sonra bir karar versin!

Bu konuda son bir söz **Erbakan Hoca'nın da işaret ettiği** gibi ekstrapolasyon ustalarına olsun. 2. bölümün sonunda Büyük Piramit'teki Giriş Koridoru'nun uzunluğu için **Smyth** ve **Petrie**'nin ekstrapolasyonla ilgili çalışmalarına yer verdim. **Smyth** Giriş koridorunun mevcut kısmının her yerinde (zeminde, doğu ve batı duvarlarında ve çatının doğu ve batısında) ölçümler yaptı ve onun ölçümlerinden (2.79)'daki sonuç çıktı. Bu, **Petrie**'nin zeminde aldığı ölçümden 1110.698732 – 1110.64 = 0.058732 BI = 1.4917928 ≈ 1.5 MM fazlaydı. Ama **Petrie**'ninki de gerçek zeminden biraz kısaydı. Onların bu ölçüm sonuçlarını (2.80)'de birleştirerek gerçek zemin uzunluğunun  $53\frac{6}{7}$  RC olduğunu belirttim. Buna göre **Smyth**'in ölçümü bu sonucun üst sınırı olurken **Petrie**'ninki alt sınırı olarak karşımıza çıkar. Ama her ikisi de gerçek zemin uzunluğuna mükemmel bir şekilde yaklaşmışlardır. İşte bu yüzden her ikisine de “**ekstrapolasyon ustası**” dedim. Her ikisi de Kraliçe Victoria döneminin kalburüstü bilim adamlarıydı!

Son olarak, Mısır'ın en büyük 10 keşfinde ise (2.77), dolayısıyla (2.78) ve bunların genelleştirilmiş (2.75)'in keşiflerinin Firavun **Khufu**'nun ilk gündüz teknesindeki keşfe benzettim. Çünkü her ikisi de tesadüf sonucu bulunmuşlardı. **Hawass**'a göre en büyük keşifler tesadüf sonucu bulunanlardır. Fakat bu keşifler bulunduktan sonra değil aranırken heyecan verir ve bu heyecan yalnızca ama yalnızca [1 kez yaşanır](#). Örneğin, **Kemal El-Malak**'ın, 1952'de **Khufu**'nun ilk gündüz teknesini keşfederken hemen üzerindeki bir blok taşı kırıp kafasını içeri sokması ve içerideki havayı teneffüs etmesinin nedeni budur. İşte piramitlerde yaşanan şey budur ve her araştırmacı (özellikle adrenalini bağımlıları. Örneğin **Dr. Chris Naunton** tam bir adrenalini bağımlısıdır. Bkz. "[Mystery of the Lost Pyramid](#)") bu heyecanı ilk olarak yaşamak ister!

**Bölüm 3:** Bu bölümde yüksek mertebeli ekstrapolasyonların Mathematica programlarını verdim. Önce ev bilgisayarlarının (2.75)'i kaldıramayacağına ilişkin Mathematica'daki mevcut durumu anlattım, sonra kullandığım monitörün Lunokhod 1&2'ye benzediğini söyleyerek güzel bir ironi yaptım. Ama enseyi karartmamak gerekir. Çünkü her yeni teknolojik üründe bu tür sıkıntılar oluyor. Bendeki Samsung CHG70'in yeni versiyonu Samsung Odyssey G7'de de şimdiden birkaç teknik problem çıkmış bile (Bkz. "[Samsung Odyssey G7 27"/White lines issues](#)"). Buradaki problemin ne olduğunu "[Black Equalizer 10 Scanlines bug Samsung G7](#)"den görebilirsiniz. Bununla bağlantılı bir diğer problem "[Horizontal lines on grey surface-Did you have that guys?](#)" mesajında geçer. G7'nin bir alt modeli ve benimkiyle aynı özelliklere sahip G5'te de şu problem varmış: "[Samsung Odyssey G5 screen 'vertical lines thing?' Connected, HDMI my Inspiron i7 laptop. Anyone seen this? Only fixes when turning monitor on and off again. Help!](#)". Özetle yeni teknolojik ürünlerde bu tür problemler canınızı sıkıyorsa kullanın gitsin!

Bu arada (2.75)'i ev bilgisayarlarının neden kaldıramayacağına ilişkin 2008'den bir örnek verdim. Bu, kök alma algoritmalarıyla  $\sqrt[3]{2}$ 'nin basamaklarının bulunmasına ilişkin 6 farklı kuartik iterasyondan elde edilen sonuçların sergilendiği bir tablodur. Bu tabloda hepsi kendi keşifim olan türev almaya dayalı algoritmalar (son 2 sütundaki) ile ATA 4 algoritmalarından 2'sini (ilk 2 sütundaki) ve onlardan türetilen algoritmaları (3. ve 4. sütundaki) karşılaştırdım ve bunun sonucunda türeve dayalı algoritmaların çok hantal kaldığı görüldü. Bu durumu zaten baştan biliyordum ama aradaki farkı göstermek için bundan daha iyi bir test olamazdı. Ve bu test için o sırada Mathematica 5.1 ile Mathematica 6.0'ı karşılaştırdım. Çünkü Wolfram, Mathematica 6.0'ın Mathematica 5.1'den daha hızlı olduğunu duyurmuştu. Ama bu testlerin alındığı kitabın adı daha da ilginç: "[Babil Algoritmasından Modern Kök Algoritmalarına Doğru 4000 Yıllık Bir Yolculuk \(A 4,000-Year Journey From Babylonian Algorithm to Modern Root Algorithms\)](#)".

Hadi bu kitap hakkında küçük bir sırrımı paylaşayım sizinle. 2008'deki bu kitabımın adını **Eli Maor**'un 2007'de çıkan ve o sırada revaçta olan "[The Pythagorean Theorem: A 4,000-Year History](#)" kitabından esinlenerek koymuştum. Ama **Eli Maor**'un bu kitabı olmasa bile, bunu ya da buna yakın bir isim koyacaktım. Ancak **Eli Maor**'un da hakkını teslim etmem gerekir; çünkü o, kitap başlığındaki ifademden keskinleşti ve daha heyecan yaratıcı bir başlık koymama neden oldu. O sırada şöyle düşünmüştüm: "**Eli Maor** madem ki Pisagor Teoremi'nde 4,000 yıldan bahsediyor, o zaman ben neden kök algoritmalarında 4,000 yıldan bahsetmiyorum?" dedim ve tüm konuları kapsayacak şekilde koymaya çalıştığım zaman, kaçınılmaz olarak o başlık çıktı! Evet, biz, 4,000 yıllık Eski Babilonya Matematiği'nden bahsediyorduk ve şu tarih tezine karşı çıkıyorduk: "*Batı dünyası -Girit'teki Minos uygarlığı ve Yunanistan'daki Miken uygarlığını da kapsayacak şekilde- Eski Yunan ve Roma uygarlıklarının bıraktığı miras üzerine kurulmuştur.*" Yanlış, çünkü günümüzde artık bu uygarlıkların Sümer-Babil ve Eski Mısır'dan geldikleri kabul görmeye başlamıştır. Yani Batı, her ne kadar Eski Yunan ve Roma'dan kendisine geçen terörle kafası bulanmışsa da (ki **Erbakan Hoca**, buna "**Kuvveti Üstün Tutan Uygarlık**" der) tezini yavaş yavaş düzeltmeye ve daha derin bir tarih gözüyle dünyaya bakmasını öğrenmeye başlamıştır. Ama Sümer-Babil ve Eski Mısır'ın asıl mirasçıları Batı değil Ortadoğu ülkeleridir. Bunların başında Araplar ve Yahudiler gelir. Çünkü Arapların ataları Sümer-Babil'den ve onlarda da önce soy ve kan bağı gelir. Yahudilerin ataları ise bu 2 süper medeniyetin ağırlığı altında ezilerek çoğu zaman sürgün hayatı yaşadı. Şurada onların bakış açısına göre hazırlanmış "[The Kings: From Babylon to Baghdad](#)" belgeseli vardır. Ama bu haliyle bile oldukça çarpıcıdır. Belgesel orijinalde "[Sarrukinu \(Adil Kral\)](#)" olan **Büyük Sargon** ile başlar, **Saddam Hüseyin** ile sona erer. **Saddam Hüseyin** özellikle **II. Nabukadnezar**'ın hastasıydı ve onun bir reenkarnasyonu, hatta oğlu olduğunu iddia ediyordu (Bkz. "[Rasyonel Üçgenler](#)"). Ben de **Hammurabi**'nin hastasıyım. Çünkü Eski Babil dönemindeki birçok tablette hiç istisnasız bir şekilde onunla karşılaşıyorsunuz!



Jede Epoche bringt eine Vielzahl an Dingen hervor, die charakteristisch sind für die Kultur und Zivilisation ihrer Zeit. Heute erscheinen uns aber von den Leistungen einer vergangenen Kultur gerade die als besonders typisch, welche ihrer Zeit eigentlich weit voraus waren, weil sie die Grenzen des bis dahin Machbaren überschritten und den Beginn einer Entwicklung markierten.

Als einer der weltweit führenden Hersteller von Halbleitern und elektronischen Produkten hat es sich TOSHIBA in unserer heutigen Zeit zur Aufgabe gemacht, ständig über die Grenzen des Machbaren hinaus zu denken und neue Ideen zu entwickeln. Ein gutes Beispiel für solch eine Idee ist der Laptop Computer T 5200. Mit einem 386er Prozessor, enormer Speicherkapazität, VGA-Grafik und

vielen mehr gehört er zu den leistungsstärksten PCs, die es heute gibt. Im Gegensatz zu den meisten seiner Konkurrenten ist er dabei so klein, leicht und handlich, daß man ihn überallhin mitnehmen kann. Der TOSHIBA Laptop Computer T 5200 ist das Produkt intensiver Forschung und ständiger Weiterentwicklung. Er ist das Zeugnis einer hohen Kultur.

Im Einklang mit morgen  
**TOSHIBA**

Für weitere Informationen: TOSHIBA INFORMATIONSSYSTEME (DEUTSCHLAND) GMBH, Görliitzer Straße 5-7, 4040 Neuss.

**Prof. Dr. Necmettin Erbakan**'ın bu tarih tezi hakkındaki görüşü şöyledir: "*Bakınız, bu gerçeklerden biri şudur: Bugünkü Batı kültürü Eski Roma'ya dayanıyor; Eski Roma Eski Yunan'a dayanıyor; Eski Yunan Eski Mısır'a yani Firavunlara dayanıyor. Bunların medeniyet düşüncelerinin esasında biraz sonra açıklayacağım gibi, 'kuvvet'i üstün tutma karakteri vardır. Hakkı üstün tutmazlar; kuvveti üstün tutarlar. Bütün zulüm düzeni de zaten bu temel noktadan doğuyor. İşte size bu şekli gösteriyorum ki bugün Japonlarla beraber ortaklaşa kurulmuş olan Alman Toshiba firmasının Almanya'daki mecmualarında (dergilerinde) son aylarda çıkan bir ilanı size takdim ediyorum. Derginin kapağına en modern bilgisayarı koymuşlar (TOSHIBA Laptop Computer T 5200) ve üzerine şunu yazmışlar: 'Yüksek bir kültüre tanıklık (Zeugnis einer Hohen Kultur)' diyor. Tabii Hoca, kalabalık karşısında iyice çoşunca bunu şöyle çeviriyor: 'Büyük bir kültürün eseriyiz biz!' Kimmiş bu büyük kültür? Piramitlermiş, Firavunlarmış. Bizim kökümüz [Firavunlardan](#) geliyor diye iftihar ediyorlar. Reklamlarını buna dayandırıyorlar (Bkz. "[Toshiba TV ve Laptop](#)", "[Toshiba TV](#)"). Zaten bildiğimiz bir gerçeği böylece teyit ediyorlar.*

Hemen bu mühim gerçeği başka sözler arasında kaybolmadan size tekrar takdim ediyorum: *Batı kültürünün kökü Roma'ya, o Yunan'a, o da Eski Mısır'a yani Firavunlara dayanır.*" [İnsanlığa Saadet Getirecek Düzen Nasıl Olmalı ve Niçin Maymundan İnsan Çıkmaz?](#)

**Not.** **Erbakan Hoca**'nın sözüne ettiği Toshiba'nın tv reklamı 1989'da ve laptop reklamı 1990'da yapılmıştı. Bu reklamlar tam da Büyük Piramit'in saftalarının temizlenmesi için 1992-1993'de yürütülen "[Upuaut Projesi \(The Upuaut Project\)](#)"nin başlamasından 2 yıl önce yapılyordu. Kaldı ki Büyük Piramit'te çalışırken saftalarla ilişkili bir ölçüm söz konusu olduğunda mutlaka bu siteye uğradım, dolayısıyla linkteki çalışmaların çoğu ezberimdedir. Ama şimdi kapalı olan bu sitedeki kritik olan tüm çalışmaları (ki bunlara özellikle CAD çizimleri de dahil) zamanında almıştım (Bkz. "[KHUFU'NUN SARKOFAJININ DEFİN ODALARINDAKİ VE PİRAMİTTEKİ KONUMLARI](#)"). Ama hala **Gantenbrink**'e kızgıyım ve bu geçmiş değil. Çünkü o,

CAD çiziminde UPUAUT 1&2'nin Büyük Piramit'in şaftlarındaki ölçümleri blok blok tam olarak açıklamıyor, dolayısıyla okumalarda sıkıntı çıkıyordu. Oysa bende böyle bir şey olmadı; 2003'teki (2.39) ekstrapolasyonunu unutmuşum ve 2017'de hatırlayınca **Werner Romberg**'in 17. ölüm yıl dönümü için özel sayı olarak çıkarttığım **RİK 3** ile 2020'de web sitemde yayımladım! Ve burada bir kez daha yayımlıyorum. Ama bu makaleler kronolojik olduğu için lineer (2.39) ekstrapolasyonu ve yüksek mertebeli (2.75) ekstrapolasyonu hakkındaki tüm detayları veremiyorum. Bunları sonraki kronolojik makalelerimde sırasıyla vereceğim!

Bu bölümde en heyecan veren kısım, 2020 model sistemim üzerinde sıfırdan yarattığım Romberg İntegrali içine monte ettiğim (2.75) ekstrapolasyonuyla elde ettiğim sonuçlardır. Ancak bu sonuçları **Erbakan Hocamız**'ın yukarıdaki reklamda dile getirdiği 1989 model **TOSHIBA T 5200**'de elde etmek hayal bile edilemezdi (ki bu arada, ilk kişisel masaüstü bilgisayarımı **80386 DX-40** işlemcili olarak Aralık 1994'te satın almıştım). Yeni sistemimde **Romberg**'in 1955'teki örneğinde (2.75) ile bazı hesaplar yaptım. Buna göre ilkin sisteme biraz abanarak, (2.77) kuartik ekstrapolasyonuyla  $A_{3^{10},10}(K) - 1 = -1.77913 \times 10^{-1,262,008}$  sonucunu  $1146.86'' = 19'6.86''$  süresinde alırken (2.78) nonik ekstrapolasyonuyla  $A_{6^{7,7}}(K) - 1 = 4.06148 \times 10^{-4,318,803}$  sonucunu  $45776.1'' = 12^h42'56.1''$  sürede aldım. Bu hesaplardan sonra yeni sistemimde bir rekor denemesinde bulunarak, (2.75)'te  $p = 5 = k$  için  $A_{15^5,5}(K) - 1 = 2.02894 \times 10^{-7,348,902}$  sonucunu  $4989.79'' = 1^h23'9.79''$  süresi içinde alabildim.

Bu hesaplardan sonra Mathematica'da çalışır halde yüksek mertebeli ekstrapolasyonlarla (yani (2.77), (2.78) ve (2.75) ile) Romberg integraline ilişkin 3 not defteri verdim. Bunlar size yüksek mertebeli ekstrapolasyonlu Romberg integralinin hem matematiksel olarak hem de bilgisayarda nasıl çalıştığına ilişkin bilgiler verir. Fakat bu not defterlerindeki yüksek mertebeli (2.75) ekstrapolasyonları keşifleri nedeniyle kronolojik olarak prototip halinde olduklarından programlarını vermedim. Çünkü bunların programlarını versem bile, ev bilgisayarları kaldırmaz. Bu nedenle bu not defterlerin altında bu programların en iyi çalışabileceği platform için bir tavsiyede bulundum: Linux-C++. Ama bana göre bu da çözüm olmayacak. Çünkü bu konuda tek bir çözüm var, o da bir iş istasyonu ve daha ötesinde bir süper bilgisayardır. Yoksa bu programları **TOSHIBA T 5200**'ün biraz ilerisinde bir oyun demosu gibi kullanırsınız, yani bu programları işletemezsiniz ya da kullanamazsınız. Bu ise, Terminatör 3 filminin sonunda bir sığınaktaki bilgisayarların durumundan farklı değildir (Bkz. "[Commodore PET 3000/4000 Series](#)").

**Bölüm 4:** Bu bölümde her biri hazine olan 3 Ek verdim. Bunlar Bölüm 2'deki **Arşimet**'in Önerme 3'ü ile ilgili kesirlere ve daha ötesindeki gelişmelere ilişkin adeta tarihi bir seyir turu gibidir. Buna neden olan şey ise, Romberg integrali için ilk yazdığım makaleden 13 gün önce araştırdığım **Heron**'un **Arşimet**'in  $\pi$  için Önerme 3'tekilerden daha iyi kesirler verdiği iddiası idi. Yani bu iddia için **Heiberg** ve **Tannery**'nin tahminlerini ya kanıtlayacaktım ya da düzeltecektim. Bunlardan **Heiberg**'in tahmininin doğru olmadığını **Snellius**'un sayesinde (4.6)'yı (4.7) ile karşılaştırarak gösterdim. Çünkü Snellius algoritmasıyla alt ve üst sınırlardan elde edilen sonuç (4.7)'den görüldüğü üzere aritmetik ortalamadakininden daha iyi idi. Fakat **Tannery**'nin tahmininde bu sorun (4.10)'da görüldüğü gibi aşılmıştı. Bu bakımdan **Tannery**'nin tahmininin **Heiberg**'inkinden daha iyi olduğu söylenebilir. Ancak ne var ki onda da (4.7)'deki gibi açık bir sonuç gözleyemedim. Çünkü gerçekte (4.11)'de görüldüğü üzere  $\pi$ 'nin doğru basamak sayısı Snell bağıntısında aritmetik ortalamaya göre 2'ye katlanıyordu. Yani bu sonuçla **Tannery**'nin tahmini de doğru değildi. Bu arada **Heron**'un (4.1)'de verdiği kesirlerin benzerlerini **Johann-Hartmann Beyer**'in bombeli bir fiçinin hacim hesaplarındaki dairelerin alanlarında kullandığını görünce bayağı şaşırılmıştım (Bkz. "[Mathematics throughout the ages II](#)"). Ne şaşırması, resmen şok geçiriyordum!

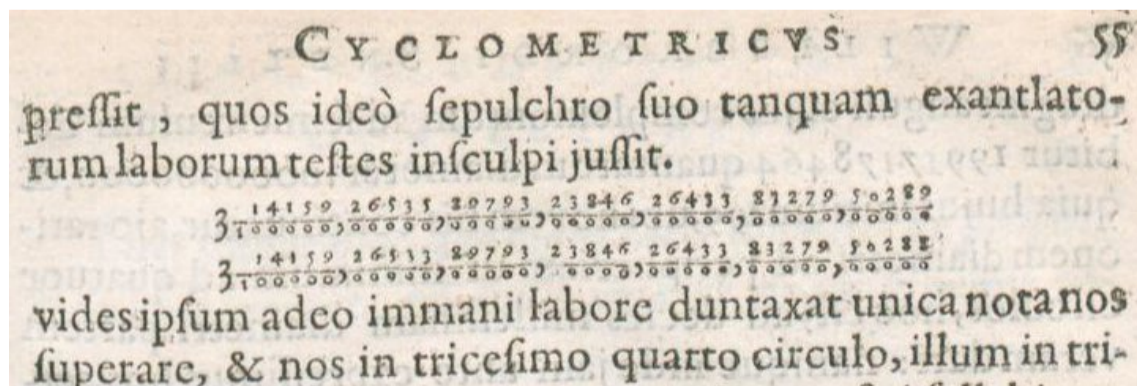
Buyrun!

	Heron (60)		Johann-Hartmann Beyer (1603)
	Orijinali	Düzeltilmiş	
Alt Sınır	$\frac{211875}{67441} = 3.141(634910 \dots)$	$\frac{211875}{67441} = 3.141(634910 \dots)$	$\frac{102925}{32761} = 3.141(692866 \dots)$
Üst Sınır	$\frac{197888}{62351} = 3.1(73774278 \dots)$	$\frac{195888}{62351} = 3.141(697807 \dots)$	$\frac{71939}{22898} = 3.141(715433 \dots)$

**Şok Şok Şok!...** **Heron**'un üst sınırında 7 yerine 5 alırsanız (ki **Heiberg** ve **Tannery** tahminlerinde ilkin bu değişikliği yaparlar. Ben bu değişikliği yaptığımda **RİK 3**'teki EK 3'te gördüğünüz gibi şifreyi çözmüştüm!) **Johann-Hartmann Beyer**'in üst sınırına çok yakın bir kesir elde edersiniz. Peki o zaman, **Johann-Hartmann Beyer**, bu kesirleri nereden buldu? Acaba **Johann-Hartmann Beyer**, **Heron**'un "**Metrica**"sına bizden önce mi ulaşmış ve onları değiştirerek ya da aynı metodu kullanarak mı bu kesirleri elde etmişti? Bildiğimiz tek şey, **Johann-Hartmann Beyer**'in "**STEROMETRIÆ INANIVM NOVA ET FACILIS RATIO, GEOMETRICIS DEMONSTRATIO nibus confirmata: [...] FRANCOFVRTI, In Officina Paltheniana, Impensis Ionaë Rhodii, ANNO MDCIII**" kitabında  $\pi$  için bir sürü deneme yaptığıdır!

Bu karşılaştırmalı tablodan görüldüğü üzere **Johann-Hartmann Beyer**'in  $\pi$  için (4.12)&(4.14)'te verdiği bu kesirler tıpkı **Heron**'un (4.1)'deki kesirleri gibidir. Yani her ikisi de  $\pi$  için çifte kesir vermişti ama bunlar  $\pi$ 'nin üst sınırlarıydı. İşin ilginç yanı, **Johann-Hartmann Beyer** de kendi kesirlerini nasıl elde ettiğini **Heron** gibi söylemiyordu. Muhtemelen bu kesirler de **Van der Eycke**'nin  $\pi$  için **Van Ceulen**'e getirdiği kesirler gibiydi. "**Van Den Circkel**"den öğrendiğimize göre **Van der Eycke**,  $\pi$  için oradan buradan bulduğu yaklaşık kesirleri **Van Ceulen**'e getirerek " **$\pi$ 'nin kesin değeri budur!**" diye kafa tutar. Bunu normalde bir öğrenci yapsa ne yapardınız? Yanınızdan kovardınız, değil mi! Ama **Van Ceulen** her seferinde **Van der Eycke**'ye yanıt vermiş. Tüm bunlar Hollanda'nın Altın Çağı'nda oluyordu!

Sonra bu araştırma nedeniyle **Arşimet**, **Ptolemaeus**, **Van Ceulen** ve **Snellius**'a saygı ziyaretlerinde bulundum. Bunlardan ilkin **Snellius** ile **Van Ceulen**'in mezarını ziyaret ettik. Çünkü **Snellius**, "**Cyclometricus**" kitabının 54-55. sayfalarında **Van Ceulen**'in mezar taşında  $\pi$ 'nin alt sınırı için (4.16)'nın ve üst sınırı için (4.17)'nin yazdığını şöyle bildiriyordu:



$\pi$ 'nin sırasıyla 34 ve 35 ondalığını veren kesirler.

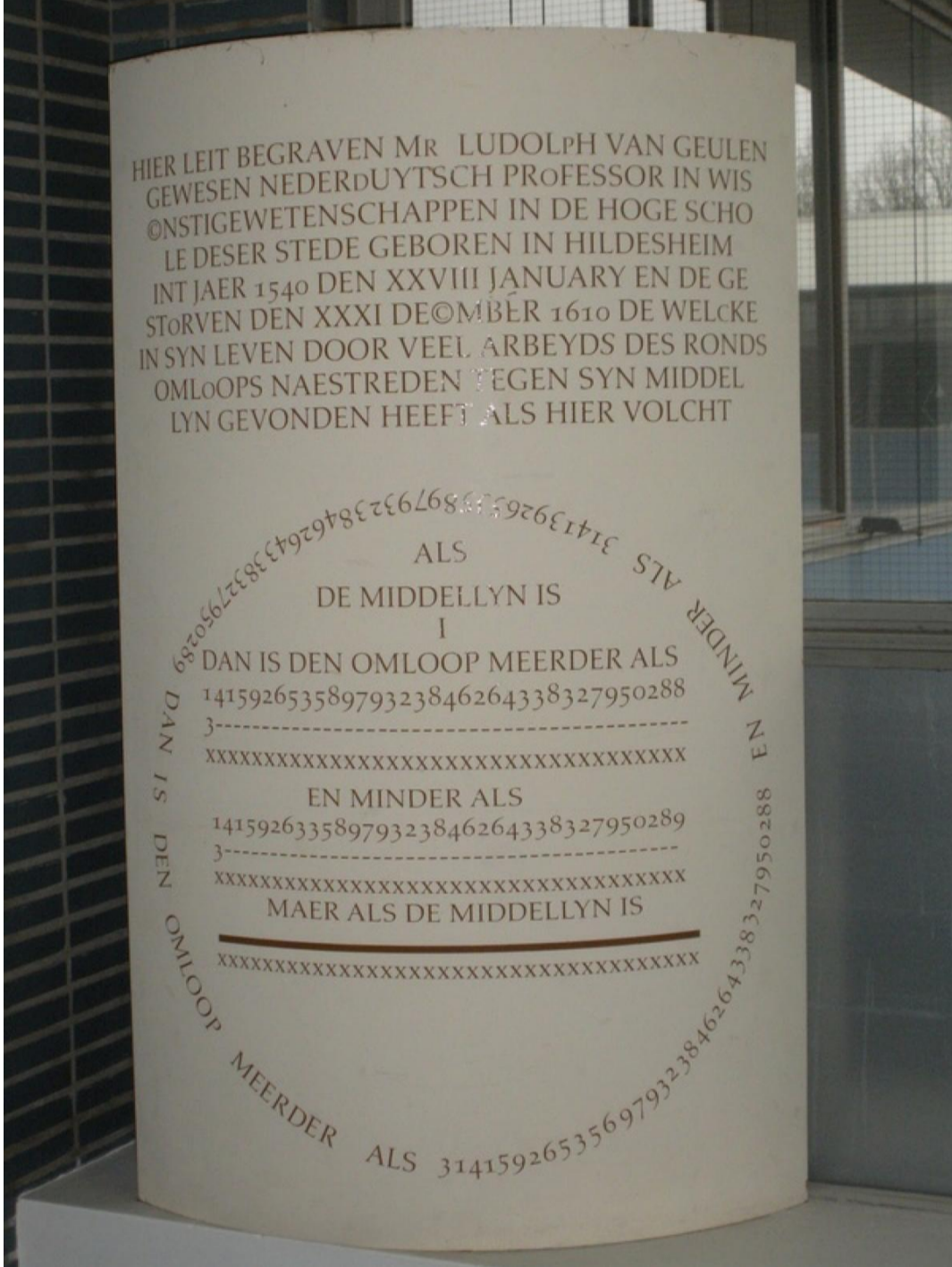
Burada hemen belirtmeliyim ki, **Snellius**'un **Van Ceulen**'in düzgün  $2^{62}$ -genleri yerine  $2^{30}$ -genleriyle (4.17)'yi elde ettiğini biliyoruz. Fakat (2.35)'teki Snellius ekstrapolasyonunun 2. iterasyonunda düzgün  $2^{20}$ -genlere göre  $S_{20,1}(\pi, \Pi)$  ile (4.16)'daki alt sınırı bulmam tamamen bir tesadüf eseri idi. Yani böyle bir sonuç beklemiyordum ama **Van Ceulen**'in mezar taşındaki  $\pi$ 'nin alt sınırına dokunmaktan büyük bir keyif almıştım! Eğer **Snellius**, kendi algoritması  $S_{30,0}(\pi, \Pi)$  yerine 10.09.2002, 1:45'te keşfettiğim  $S_{20,1}(\pi, \Pi)$ 'yi kullansaydı, aynı hesapta süreyi 3'te 1 kısaltacak ve  $\pi$ 'nin 35 ondalığına doğrudan erişmiş olacaktı!

## Önsöz

Şimdi **Van Ceulen**'in mezar taşındaki  $\pi$ 'ye ait bu sınırların nasıl geçtiğine bakmadan önce birkaç uyarım olacak:

1. **Van Ceulen**'in mezar taşındaki metin orijinalde Latince yazılmış, sonra Hollandaca'ya çevrilmiş ve bu çeviri metin o günden bu yana hep böyle kalmıştır. Fakat ne yazık ki bu da tam bir çeviri değil. Çünkü aşağıdaki yazıtın başındaki linkte Latince'den Hollandaca'ya çeviride halen tartışılan bazı noktalar vardır. Özellikle yer adları tam bir muamma. Örneğin "[Belgicus](#)" kelimesi. Anlaşılan o ki, **Van Ceulen** zamanında Leiden'de birden fazla ama iç içe geçmiş diller konuşuluyormuş, ama hepsinin ortak dili Latince imiş!

2. Yazıtta  $\pi$ 'nin sınırları verilirken günümüzdeki gibi ondalık gösterimde verilmez; kesir olarak verilir. Çünkü ondalık kesirlerin yazımı [Gıyaseddin Cemşit](#)'ten beri pek fazla değişmemiş (ki o, kesirleri Babil'deki gibi 60 tabanında yazardı). Avrupalı matematikçiler buna bir çare aramışlar ama günümüzdeki gibi bir yazıtı ulaşmamışlar. Örneğin **Johann-Hartmann Beyer**, [CAPUT 28](#)'de bombeli bir şarap fıçısının merkezindeki dairenin çapını 42.8 yerine 42.8' ve alanını 1438.78 yerine 1438.7'.8'' ve tabanlarındaki dairelerin çaplarını 36.2 yerine 36.2' ve alanlarını 1029.25 yerine 1029.2'.5'' olarak yazardı. Hollandalı matematikçiler **Van Ceulen** ve **Snellius** ise böyle bir yazıtı tercih etmediler; paydaları 10'nun kuvveti olan kesir yazımını kullandılar!



**Van Ceulen**'in mezar taşının Dutch'ça mükemmel bir replikası (Bkz. [Harun Şiljak](#)'ın mesajına). Orijinalde Latince olan bu mezar taşı 1800'lere kadar gözükmez. Neden acaba? Kimse  $\pi$ 'yi almasın diye mi? (Bkz. "[Pi Kronolojisi](#)") Bu mezar taşı ancak 5 Temmuz 2000'de bu şekilde yerine konuldu!

**VAN CEULEN'İN MEZAR TAŞI:** "Bay **LUDOLF VAN CEULEN**, şehrin bu tarafındaki Athena'o'da Matematik Bilimlerinden Hollandalı Profesör, burada yatıyor (HIC JACET SEPVLTVS MR. LVDOLFF VAN CEULEN PROFESSOR BELGICVS DVM VIVERET MATHEMATICARVM SCIENTIARVM IN ATHENAEO HVJVS VRBIS). 28 Ocak 1540 yılında Hildesheim'de doğdu ve 31 Aralık 1610'da öldü (NATVS HILDES HEMIAE ANNO 1540 DIE XXVIII JANVARI ET DENATVS XXXI DECEMBRIS 1610). Ömrünü aşağıdaki çemberin çevresinin çapına oranlarını bulmak için harcadı (QVI IN VITA SVA MVLTIO LABORE CIRCVMFERENTIAE CIRCVLII PROXIMAM RATIONEM AD DIAMETRVM INVENIT SEQVENTEM).

Çap 1 olduğunda çember çevresi

314159265358979323846264338327950288

den fazladır (QUANDO DIAMETER EST 1 TUNC CIRCULI CIRCUMFERENTIA PLUS EST QUAM) ve

314159265358979323846264338327950289

den azdır (& MINUS QUAM).

Ancak çap

1000

olduğunda (SED QUANDO DIAMETER EST) o zaman çemberin çevresi

314159265358979323846264338327950288

den fazladır (TUM EST CIRCUMFERENTIA CIRCULI PLUS QUAM)

ve

314159265358979323846264338327950289

den azdır (& MINUS QUAM)."

Fakat bu değerlerin tamamının **Van Ceulen**'den gelmediği bugün anlaşılmış durumdadır. Bu durumu Hollandalılar da kabul ediyor. Örneğin **Van Ceulen**'in ölümünün 400. yıl dönümünde yayınlanan EUCLIDES dergisindeki "[Vijsfendertig decimalen \(35 Ondalık\)](#)" makalesinin 272. sayfada şu bilgiler geçer: "Bu bir tahmin çalışmasıdır, ancak tüm hesaplamalardan sonra neden 35 ondalığın başarılı şekilde yapıldığını açıklayabilir. Bu arada **Snellius**, 34 (!) ondalık  $\pi$  değerini **Van Ceulen**'den çok daha basit bir şekilde hesaplayarak gelişim gösterdi. 1630 yılına kadar **Snellius**'ün yöntemini kullanan Cizvit **Christoph Grienberger**, **Van Ceulen**'in rekorunu kırdı: 38 ondalık buldu (Het is giswerk, maar het zou een verklaring kunnen geven waarom na al het gereken, ook nog eens de geslaagde recordpoging van 35 decimalen werd gedaan. Overigens, Snellius illustreerde zijn verbetering, door 34 (!) decimalen van  $\pi$  te berekenen op een veel eenvoudiger manier dan Van Ceulen dat deed. Pas in 1630 verbrak de jezuit Christoph Grienberger, met behulp van de methode van Snellius, het record van Van Ceulen: hij vond 38 decimalen)." Bununla birlikte, bu değerlere ilişkin kayıtlar [Pi Kronolojisi](#)nde tam anlamıyla [RİK 3](#)'teki 4.4'te anlattığım şekildedir. Çünkü bu bilgileri tüm kayıtlara baktıktan sonra vermiştim!

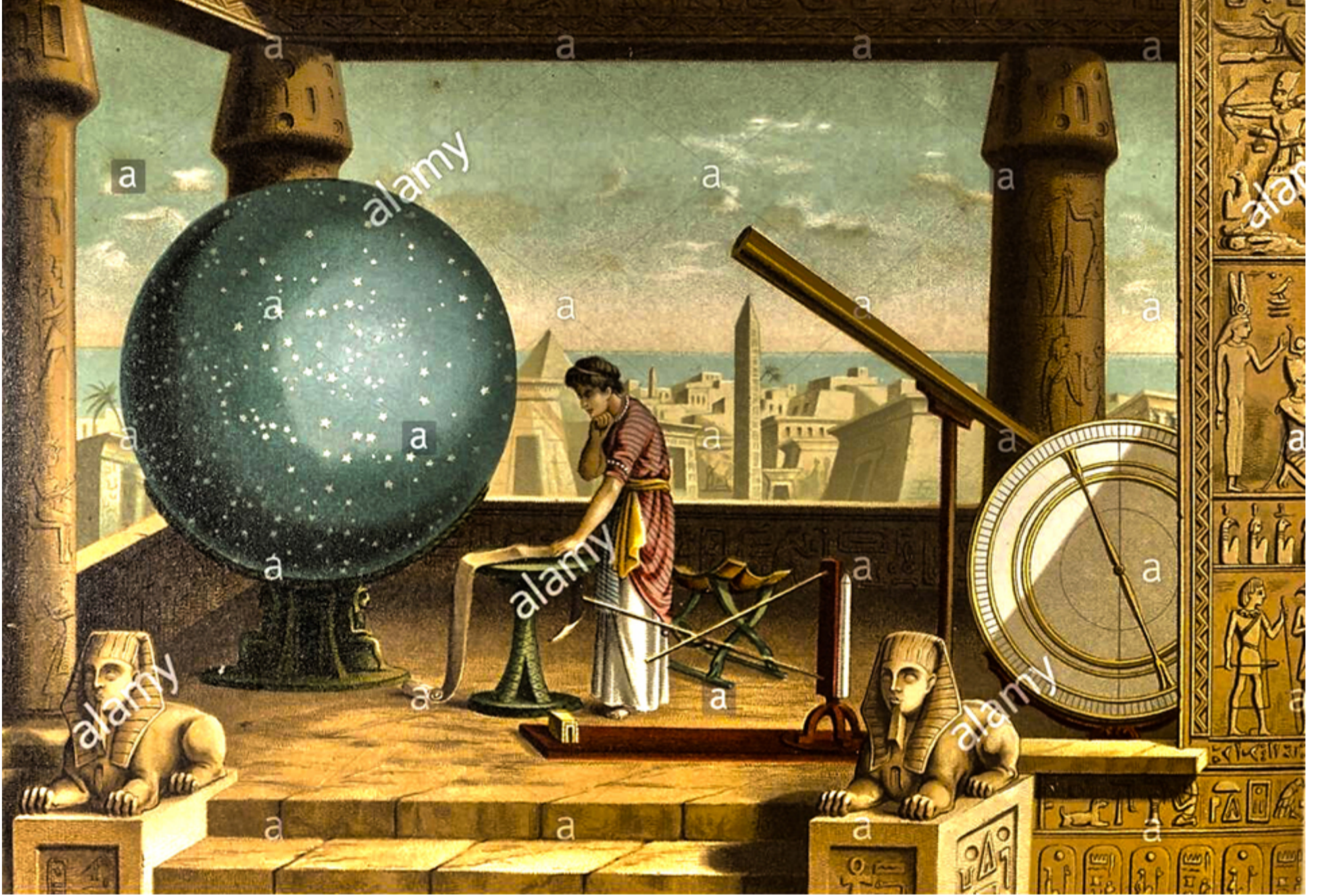
Çok ilginçtir, **Heiberg** ve **Tannery**'nin tahminlerini 4.7'de düzelttiğimi zannederken 4.7.1'de bunun imkânsız olduğunu anladım. Çünkü oradaki hesaplar **Van Ceulen** ve **Snellius** dönemlerindeki gibi seyrediyordu. Fakat [RİK 3](#)'ün EK 3'ündeki gelişmeyi hiç beklemiyordum. Ancak 4.6'daki **Ptolemæus**'a saygı ziyaretimde bunun oraya gideceği görülmüyordu. İşin ilginç yanı şu ki, **Sör Thomas L. Heat**, "[A History of Grek Mathematics, Vol. I/Approximations to the value of  \$\pi\$](#) "nin 232-233. sayfalarında **Heron**'un (4.1)'deki kesirlerini verdikten sonra hemen altındaki paragrafta **Ptolemæus**'un, 3;8,30 değerini nasıl bulmuş olduğunu anlatır. Fakat ne onun ne de bir başkasının, yani kimsenin aklından **Heron**'un kesirlerinin **Ptolemæus**'un 3;8,30 değerini bulmasındaki gibi, ama biraz daha spesifik olarak kullanılmış olduğu geçmemiş! Ancak **Heron**'un kesirlerinden elde ettiğim (4.29) ve (4.30)'daki yaklaşımlardan **Ptolemæus**'un  $\pi$  değerine ulaşmam, benim için oldukça heyecan verici idi! İşte **Heron**'un kesirlerinin **Ptolemæus**'un  $\pi$  değerinin elde edilmesindeki yöntemden geldiğini bu son 2 gelişmeden sonra aklıma geldi ve böylece [EK 3](#)'teki keşif çalışmamı yapabildim. Ama bundan önce, **Ptolemæus**'un hazinesini epey yağmalamıştım. Özellikle EK 2'nin bir özeti olan 4.6.1'deki "**Ptolemæus çevrimi**" tam bir hazinedir. Söz konusu bu çevrimdeki **Vieta**'nın Güneş yılı, Ay'ın sinodik periyodu ve tropikal yıl hakkındaki gözlemlerini 4.6.1.1'de verdim.



## Ptolemæus ve Çevrimi

**Ptolemæus** ya da bizdeki adıyla **Batlamyus**, İskenderiyeli Yunan matematikçi, coğrafyacı ve astronomdur. Geç İskenderiye Dönemi'nde yaşamış ünlü bilim adamlarından biridir. Hayatı hakkında hemen hemen hiçbir bilgi bulunmamaktadır. Yunan asıllı bir Mısırlı ya da Mısır asıllı bir Yunan olduğu iddia edilmektedir. Başyapıtı, **ANTONINUS PIUS (138-161)** zamanında yazılan "**ALMAGESTUM**"dur. Bu kitap Latince'ye ilk kez matbaanın icadından sonra basılan ilk kitap olan İncil'den tam 59 yıl sonra ilk klasik eser olarak basıldı (Bkz. "**The Almagest**"). Viyana Üniversitesi'nin Astronomi Bölümü, üniversitenin kuruluşunun 250. yıl dönümü nedeniyle bu kitabı dijital olarak yayına sundu (Bkz. "**ALMAGESTUM**"). Bu kitaptaki en büyük devrim, "**Kirişler Tablosu**" ya da günümüzdeki adıyla "**Trigonometrik Tablo**"dur. O, bu kitapta  $\pi$  için verdiği  $3;8,30 = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = 3 \frac{17}{120}$  değerini nasıl bulduğunu açıklamaz. Bu konuda kitabı inceleyen ve sayfaların boşluklarına Latince notlar alan bir kimse, PDF'de S. 141'de dairenin çevresinin çapına oranının, **Arşimet**'ten gelen ve **Van Ceulen**'in mezar taşındaki gibi,  $3 \frac{10}{71}$  den büyük ama  $3 \frac{1}{7}$  küçük olduğunu söyleyerek, bunun altına **Ptolemæus**'un  $\pi$  değerini **Johann-Hartmann Beyer** gibi  $3.8'.30''$  yani  $3;8,30$  olarak yazmış ve onun da altına kırmızı renkli bir kalemle silindir içinde bir küre (ya da bunun düzlemdeki dik izdüşümü olan bir dikdörtgen içine bir daire) çizerek **Ptolemæus**'un  $3;8,30$  değeriyle hesaplamalar yapmıştır.

İşte bu  $\pi$  değeri nedeniyle adına "**Ptolemæus Çevrimi**" dediğim çevrim, **Meton**'un çevriminden çok daha iyidir. Çünkü astronomik ölçümler böyle der. Evet, NASA da öyle der. Çünkü NASA'nın ölçümleri bu çevrimi 3 ondalıkla doğrularken **Meton**'un çevrimini 1 ondalıkla doğrular (Bkz. NASA'nın [365.256](#) ve [29.53](#) değerlerine).



Ptolemæus, İskenderiye gözleminde, Alamy.

## Ptolemæus'un II'si Hakkında

Burada söz konusu olan  $\pi$  için  $3;8,30$  değeri kitapta anlatılmaz ama onu Kirişler Tablosu'ndan çıkartabilirim: Şöyle ki  $\pi$  için [Şekil 4.1](#)'e göre PDF'de S. 19'da başlayan Kirişler Tablosu'nun 2. satırında  $1^\circ$ 'lik yay ölçüsüne karşılık gelen  $|AC| = 1;2,50$  birim kiriş uzunluğuna göre,

$$360 \sin\left(\frac{1}{2}\right)^\circ \leq \pi \leq \frac{360 \sin\left(\frac{1}{2}\right)^\circ + 360 \tan\left(\frac{1}{2}\right)^\circ}{2} \leq 360 \times \frac{|AC|}{|AB|} = 360 \times \frac{1;2,50}{2,0} = 360 \times \frac{1 \frac{17}{360}}{120} = \frac{377}{120} = 3 \frac{17}{120} = 3;8,30$$

$$\leq 360 \tan\left(\frac{1}{2}\right)^\circ \leq 360 \times \frac{|AC|}{|BC|} = 360 \times \frac{1;2,50}{119;59,44} = 360 \times \frac{1 \frac{17}{360}}{119 \frac{224}{225}} = 360 \times \frac{65}{7448} = 3 \frac{132}{931}$$

ya da  $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ 'lik yay ölçüsüne karşılık gelen  $|AC'| = \frac{|AC|}{2} = 0;31,25$  birim kiriş uzunluğuna göre,

$$720 \sin\left(\frac{1}{4}\right)^\circ \leq \pi \leq \frac{720 \sin\left(\frac{1}{4}\right)^\circ + 720 \tan\left(\frac{1}{4}\right)^\circ}{2} \leq 720 \tan\left(\frac{1}{4}\right)^\circ \leq 720 \times \frac{|AC'|}{|AB|} = 720 \times \frac{0;31,25}{2,0} = 720 \times \frac{377}{720} = \frac{377}{120} = 3 \frac{17}{120} = 3;8,30$$

$$\leq 720 \times \frac{|AC'|}{|BC'|} = 720 \times \frac{0;31,25}{119;59,56} = 720 \times \frac{377}{119 \frac{899}{900}} = 720 \times \frac{1885}{431996} = 3 \frac{15303}{107999}$$

## Önsöz

sonuçlarını elde ederiz. Yani bu sonuçlardan görüldüğü üzere **Ptolemæus**, bir çemberin içine çizilen düzgün kirişler 360 ya da 720-geniyile başladığı hesaba, dışına çizilen düzgün teğetler 360 ya da 720-genini de katarak (ki 1°'lik yay ölçüsü için 1;2,50 birim kiriş uzunluğundan ziyade teğet uzunluğuna karşılık gelir. Çünkü,

$$1;2,49,51,48, \dots = 120 \sin\left(\frac{1}{2}\right)^\circ \approx |AC| = 1;2,50 \approx 120 \tan\left(\frac{1}{2}\right)^\circ = 1;2,50,0,24, \dots$$

$$0;31,24,56,58, \dots = 120 \sin\left(\frac{1}{4}\right)^\circ \approx 120 \tan\left(\frac{1}{4}\right)^\circ = 0;31,24,58,3, \dots \approx |AC'| = \frac{|AC|}{2} = \frac{1;2,50}{2} = 0;31,25$$

dir. Ama bu sonuçlara şaşırmayın. Çünkü **Ptolemæus**, kiriş uzunluğunu ilkinde 2 atmışlıkta 1;2,50'yi alır ve ikincisinde bunun yarısını. Yani bizim teğet uzunluğu olarak gördüğümüz şey, gerçekte 2 atmışlığa yuvarlatılmış kiriş uzunluğudur. Örneğin, Kirişler Tablosu'nun ilk satırında  $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ = 30'$  lik yay ölçüsüne karşılık kiriş uzunluğu için  $|AC'| = \frac{|AC|}{2} = 0;31,25$  birim verilir ve bunun 1,2,3,4 katları tabloda mevcutken 5. ve sonraki katları mevcut değildir. Özellikle 6 katı alındığında,  $6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^\circ = 3^\circ$ 'lik yay ölçüsüne karşılık gelen  $|AC''| = 3;8,28$  birim kiriş uzunluğu bir diğer  $\pi$ 'yi gösterir. Ama **Ptolemæus**, hesaplamalarında  $\pi$  için bu ve diğer değerleri almaz; ilk seferinde elde ettiği 3;8,30'u alır. Ama Snell bağıntısıyla  $\pi$ 'ye her ikisinden daha yakın,

$$2 \times \frac{2 \times \frac{2 \times \frac{2 \times \frac{2 \times \frac{2 \times 3;8,28 + 3;8,30}{3} + 3;8,30}{3} + 3;8,30}{3} + 3;8,30}{3} + 3;8,30}{3} = 3;8,29,44,11,51,6,40 = 3 \frac{61933}{437400} = 3.1415935070 \dots$$

sonucunu verebiliriz), 60 tabanında 3;8,30 değeriyle  $\pi$ 'ye bir yaklaşımda bulunmuştur (ki diğer 2 değer 60 tabanında yazılmadığına dikkat ediniz). Bu, Arşimet döneminden kendisine kadar gelen düzgün çokgenlerle  $\pi$ 'nin hesabında bir devrimdir. Çünkü 360'ı çarpanlarına ayırırsak,  $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ 'ten görüldüğü üzere ilkin açığı 3 ve sonra yine 3 bölmek gerekiyordu. Bu ise **Ptolemæus**'tan önce mümkün değildi. Çünkü açığı 3'e bölmek, küpün hacmini 2 kata çıkartmak, dairenin alanına eşit bir kare çizmek vb. gibi problemler çözümsüz idiler. Neden? Çünkü bu problemlerin çözümleri irrasyonel sayılara dayanıyor, dolayısıyla bunlar yalnız cetvel-pergel kullanılarak belirlenemiyordu!

Bu arada (4.73)'te bir hata yapmışım; doğrusu şu şekilde olacaktı:

$$\pi < \frac{211875}{67441} < \frac{195888}{62351}.$$

İşte bu kesirler **Heron**'un "**Metrica**"sında **Arşimet**'e şu şekilde ithaf edilir:

Yunancası: "κς. Ἀρχιμήδης μὲν οὖν ἐν τῇ τοῦ κύκλου μετρήσει σ. 2 τ. Ιρ. 262 Heib.) δεικνυσιν, ὅτι ἡ τετράγωνος τὰ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἴσα γίγνεται ὡς ἕγγιστα ἰδ κύκλοις· ὥστε ἐὰν δοθῇ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἰ τύχοι μονάδων ι, δεήσει τὰ ι ἐφ' ἑαυτὰ ποιῆσαι· γίγνονται ρ.", [METRICA I-26-5](#).

Türkçesi: "Aynı ARŞİMET "On Plinthides and Cylinders (Prizmalar ve Silindirler Hakkında)"daki yazılarında, her dairenin çevresinin çapa oranının 211875:67441'den büyük ama 197888:62351'den daha küçük olduğunu gösterir. Ancak bu kesirler ölçümler için uygun olmadığından, en küçüğü olan 22:7 oranına düşürülür", **HERONIS ALEXANDRINI, Opera Quae Svpersvnt Omnia, S. 66-67**.

Şimdi tam bu noktada **Enver Aysever**'in, "**Ayrıntılar**"dayken konulara dikkat çekmek için kullandığı klişe sözlerinden, "**ver belleğiii**" eşliğinde "**soru şu**" diyerek sorularına geçiyorum: **Heron**'un "**Metrica**"sında  $\pi$ 'nin üst sınırı  $\frac{22}{7}$  ya da  $3\frac{1}{7}$  olarak verilirken neden  $3\frac{10}{71}$  alt sınırı verilmedi? Yani  $3\frac{10}{71}$ ,  $3\frac{1}{7}$ 'den çok daha mı büyük idi? Ya da tersini düşünelim: **Arşimet**'e ithaf edilen yeni kesirler çok çok daha büyük ve bunlar verilirken ilk çalışmadan neden yalnızca  $3\frac{1}{7}$  kesri verildi?

Yanıt: Ben **Heron**'un "**Metrica**"sındaki problemlere çalıştım ve  $\pi$  için yalnızca  $3\frac{1}{7}$ 'nin kullanılmış olduğunu gördüm ve tüm aramalarıma rağmen  $3\frac{10}{71}$ 'i göremedim. Çünkü bu kesir o zamana kadar yoktu; ilk kez **Eutokios**'un yorumundan sonra gözükmeye başladı! Diğer taraftan, bu yeni kesirlerin elde edilmesi, yukarıda gösterdiğim üzere düzgün 360-gen ya da 720-genlerle **Ptolemæus**'un  $\pi$  için verdiği 3;8,30'un elde edilmesindeki gibidir (Bkz. daha fazla bilgi için [EK 3](#)'e). Buradan bu ifadenin **Heron**'dan ve hatta **Ptolemæus**'tan çok sonra "**Metrica**"ya konduğunu öğreniyoruz. Çünkü bu kesirler **Ptolemæus**'un metoduyla elde edilmiş idi!

Şu halde **Ptolemæus**'un  $\pi$  için verdiği 3;8,30 değerinin nasıl elde edildiğini anlattığıma göre, en değerli keşfime geçebiliriz: "**Ptolemæus Çevrimi**" ya da " **$\pi$  Çevrimi**" dediğim ve [03.08.2012, 02:00](#)'da keşfettiğim  $\pi_P = 3;8,30$  için

$$1 \text{ GY} = \frac{42 - \pi_P}{\pi_P} \text{ SA}$$

bağıntısı mevcuttur (GY: Güneş Yılı, SA: Sinodik Ay). Fakat **Ptolemæus**'a göre bu, 1 GY [365;14,48](#) DG (Dünya Günü) (Bu sonucun açıklamasını "[Ancient Astronomy: Lecture 1](#)"deki 31. sayfada görebilirsiniz) ve 1 Ay Ayı (AA) ya da SA [29;31,50,8,20](#) DG olmak üzere

$$1 \text{ GY/SA} = \frac{365;14,48}{29;31,50,8,20} = \frac{234.99989992592428076657264580962 \dots}{19} \approx \frac{235}{19}$$

dur (Bkz. "[ALMAGESTUM](#)". Bunu yukarıda verdiğim 1515 basımlı Latince "[ALMAGESTUM](#)" kitabımı anlamanız için verdim. Yani Latince kitapta sökemediğiniz bilgileri 672 sayfalık bu dev külliyatta çözebilirsiniz).

Hemen yoruma geçiyorum: **Ptolemæus**, ilkin Ay'ı gözlemleyerek 1 AA'nın 60 tabanında [29;31,50,8,20](#) DG olduğunu tespit eder ve sonra bunu Meton çevrimi olarak bilinen  $\frac{235}{19}$  ile çarparak 1 GY'nın 60 tabanında 6,5;14,48(33,35,47,22,6,18, ...)  $\geq 6,5;14,48 = 365;14,48$  DG olduğunu belirler. Ama o, Ay'ın Dünya etrafındaki 1 tam turunu iyi bir şekilde gözlemleyemez. Çünkü [Wikipedia](#)'ya göre 1 AA = [29;31,50,7,13,26,24](#) (= 29.530589) DG'dir. Hayır, benim sınırladığım şey, **Ptolemæus**'un, te **Arşimet**'ten beri  $\pi$ 'ye yaklaşımlarda bulunan Yunanlı bilim adamlarını formülümdeki gibi taçlandırmak varken iyi-kötü gözlemini Meton çevrimine tabi tutması idi. Onun bu hesabı formülüme göre şu  $\pi$  değerini verir:

$$\frac{235}{19} \approx \frac{42 - \pi}{\pi} \Rightarrow \pi \approx 3 \frac{18}{127} = 3.141(7322834645669291338582677165 \dots).$$

## Önsöz

Bu yaklaşımdan anlaşıldığı üzere geçmişteki tüm astronomlar, Ay'ın Dünya etrafındaki 1 tam turunu ölçer ve 1 AA'yı ve bununla birlikte 1 GY'nı belirlerlerken aslında formülüne göre  $\pi$ 'ye yaklaşımlarda bulunuyorlardı. Peki  $\pi$ 'ye yapılan tüm yaklaşımlar içinde en optimal değer hangisidir? Tabii ki 03.08.2012, 02:00'da keşfettiğim *Ptolemæus*'un  $\pi_p = 3; 8,30$  değeridir. Çünkü astronomide kesinlik yoktur. Ama Dünya ve uydusu Ay'ın yörüngelerine en iyi uyum sağlayan *Ptolemæus*'un  $\pi_p = 3; 8,30$  değeridir. Bu nedenle bu sonuç [Antikitera mekanizması](#)nda kullanılan Meton çevriminden daha iyidir ve bunun ötesinde bir yaklaşım aramanın anlamı yoktur. Peki, Antikitera mekanizmasının yer merkezli (Geocentric), sabit ve [Düz Dünya](#)'ya (Flat Earth) göre (ki [Ptolemæus'un evren modeli](#) de bu idi. Ona göre gökteki yıldızlar da Dünya gibi çakılı idi) tasarlanmış olduğunu biliyor muydunuz? Peki Antikitera mekanizmasının üzerindeki yazılardan birinde "[Kolu çevirin ve Yunan tanrılarının cennetine giriş yapın!](#)" olduğunu biliyor muydunuz? [Ver belleğiii](#): 2005'te orada *Posseidon*'un yanında *Zeus* vardı!

## Yunanlı kardeşlerime!

Acaba "[From Souvenirs To Souvenirs \(Hatıralardan Hatıralara\), 1975](#)" parçası size, özellikle Yunanlılara, bir şeyler hatırlatıyor mu? Şimdiye kadar yayınladığım hiçbir çalışmamda Yunanlı kardeşlerimi kırmamaya özen göstermişimdir ve bunun için her seferinde kendimi otokontrol ile kontrol etmişimdir. Ya da tersini düşünelim: Eğer buna dikkat etmeydim veya saldırgan bir tutum izleseydim, 31.08.2002'de yayınladığım "[Önerme 3](#)"ün 2. yeni yorumunu 2004'te yaparak gerçekten de rahatsız edici olabilirdim. Ve şimdi, canavar modundayım. Ama ben, o makalede söylediğim gibi *ATATÜRK* ile başlayan ve 2002'de tazelediğim Türk-Yunan Dostluğunu hiç bozmadım ve bundan sonra da bozmaya niyetim yok (ki Arşimet Palimpsesti'nin satışında amaçlanan şey bu idi. Yani aramızı bozmak). Buradaki ve önceki makalelerime takılmayın sakın; sadece birkaç atraksiyon var, o kadar. Söz, eğer sıkıntılı noktalar olursa [Galatasaray Lisesi Müdürü gibi](#) hareket etmeyecek, önce size danışacağım. Sizin bana bir işaret yollamanız yeterli. Hangi kanaldan yollarsanız yollayın, ben anlarım!

Şimdi buraya kadar makaledeki bölümlerin geniş bir özetini verdim ve bıraksanız beni daha halen Önsöz yazımına devam edecektim. Çünkü 15. sayfaya gelmişim ve hala değinemediğim o kadar çok şey var ki. Sanki onları da anlatmazsam makalem eksik kalacak gibi geliyor bana. Ama makalenin kapağını siteme 21.02.2021, 04:02'de koymuştum ve hemen arkasından da makalemi yayınlamam gerekiyordu. Ancak o sırada makalenin Önsöz'ü yoktu. Yani "*bir sürpriz yapayım!*" derken az daha içinden çıkamıyordum. Biraz anlayış lütfen!

## Son Söz

*Erbakan Hoca*'ya göre tüm Firavunlar kötüdür. Aynı şekilde, Mezopotamya Kralları da öyledir. Ama bu tarihsel olarak doğru değildir. Örneğin Akad Kralı *Büyük Sargon*'un Akadça'daki adı "[Şarukinu](#)"dur ve bu "*Hükümdar meşrudur*" anlamına gelir. Eğer *Sargon* adil bir kral olmasaydı bu adı vermezlerdi ya da şimdiye kadar çoktan silinmiş olurdu ve biz ona ulaşamazdık. Eski Mısır'dan bir örnek verirse *Hawass* şöyle der: "*Kanımca, Sisi gerçekten Mentuhotep II'dir. Şimdi ne olduğunu anlayabilmeniz için, 4000 yıl önce ne olduğunu anlamamız gerekiyor*", [Former minister Zahi Hawass compares Egypt's Abdel Fatah al-Sisi to Pharaoh](#).

İşte *Hawass*'ın *II. Mentuhotep*'e benzettiği Mısır Cumhurbaşkanı *Abdülfettah El Sisi*, 18 Kral ve 4 Kraliçe'nin mumyalarını Kahire Müzesi'nden alıp ebedi uykularını geçirecekleri Giza'nın karşısındaki Mısır Uygarlığı Ulusal Müzesi'ne taşınması sırasında şöyle konuştu: "*Bu tören hayranlık uyandıran bir tören. Tarihin derinliklerine kadar uzanan bu eşsiz medeniyetin üzerinde değerlerine sahip çıkan Mısır halkının büyüklüğünün kanıtı olacaktır. Tüm Mısırlıları bu tarihi güne tanık olmaya ve bu eşsiz anın ruhundan ilham almaya davet ediyorum*", "[LIVE: Royal mummies moved to Cairo museum in 'Golden Parade'-English](#)".



Benim bu makalem ise "1990'da ata binen bir turist Giza Piramitleri'nin yakınından geçerken, atın ayağı Firavunların döneminde kapatılmış kubbeli bir mezarın çatısından içeri girdi. İçerde sonsuzluğa açılan bir pencere vardı. Kubbe canlı renklerle boyanmış alçıyla kaplıydı. Söz konusu kaplama çöl şartlarına maruz kalır kalmaz bozulmaya başladı. Ama kısa bir süre için bir Kralın mezarı gibi parıladı." olayında geçen Ustabaşının "*Kubbeli Mezarı*" gibi bir anda parıldayıp sönecek (Bkz. "[Firavunların Sırları: Altın Mumyalar](#)"). Tıpkı [RİK 3](#)'te olduğu gibi. Ama astronomların peşinden koştukları şey [bu](#) değil mi? Siz bakmayın, [Andy Warhol](#)'un saçmalamasına... O süpernovanın değerini bilseydi, öyle konuşmazdı (Bkz. "[10 yaşındaki kaşif süpernova buldu!](#)").

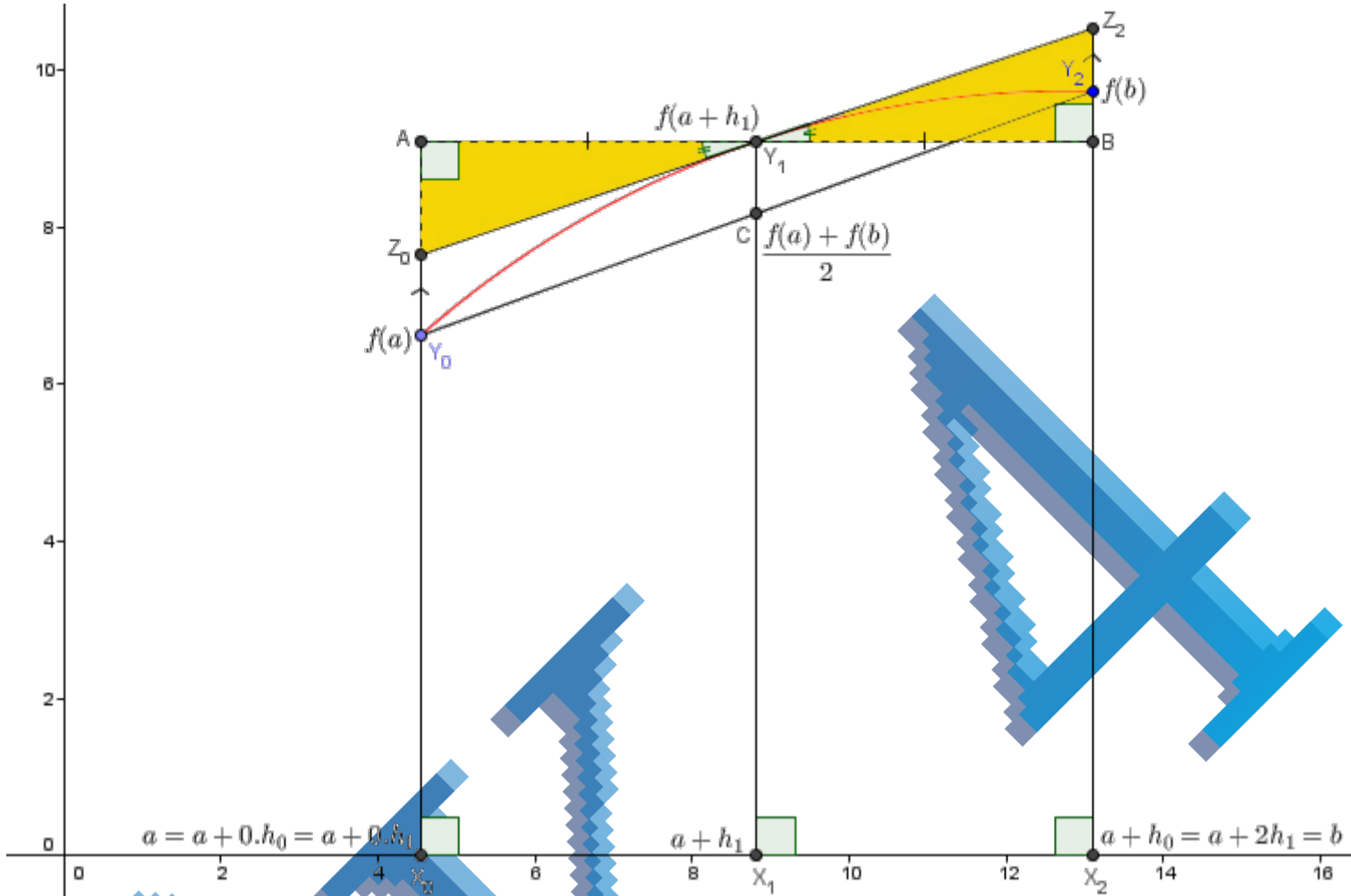
D. PAMUKTULUM, 07.04.2021, 19:00.

§1. Trapez Metodunun Geometrik Yorumu ve Sonuçları

02.11.2016, 22:54.

DEĞİŞTİRİLDİ  
04:51, 21.4.21

1.1. Trapez Metodu. 14 Şubat 1955'te [Werner Romberg \(1909-2003\)](#) tarafından keşfedilen ve daha sonra adıyla anılan "Romberg Metodu"ndaki trapez metodunu geometrik olarak şu şekilde ele alabiliriz:  $I = \int_a^b f(x)dx$  (belirli) integraline Riemann integralinden (Dikdörtgen Metodu) daha iyi yaklaşık sonuçlar veren bu metoda göre,



Şekil 1.1. Konkav  $f(x)$  eğrisinde trapez metodunun geometrik yorumu.

şeklindeki  $f(x)$ 'in altında kalan  $X_0X_2Y_2Y_0$  bölgesine  $X_0X_2Y_2Y_0$  dik yamuğun alanıyla başlayan ve her seferinde bu yamuğun  $h_0 = h = b - a$  yüksekliğinin 2'ye bölünmesiyle ortaya çıkan dik yamukların yüksekliklerine karşılık gelen yan kenarların  $f(x)$ 'e yakınlştırılması yoluyla (<sup>2</sup>), bu dik yamukların alanlarının toplamının  $X_0X_2Y_2Y_0$  bölgesine yakınsaklaştırılmasından ibarettir. O halde konkav  $f(x)$  eğrisi ya da  $f(x)$ 'in konkav parçalarında trapez metodunu uygularsak, yani şekilde  $n = 0$ . adımda (statik hal) görüldüğü üzere  $X_0X_2Y_2Y_0$  dik yamuğunun alanının  $X_0X_2Y_2Y_0$  bölgesinden küçük olduğunu (ki bu,  $K_0 < I$  demektir) ve genelde de  $K_0 < \dots < K_n < \dots < I$  yaklaşıklıklarının geçerli olduğunu görürüz.

Buna göre ilkin  $X_0X_2Y_2Y_0$  dik yamuğunun alanını hesaplırsak,

$$K_0 := A(X_0X_2Y_2Y_0) = (b - a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitliklerinden

$$(1.1) \quad K_0 = h_0 \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

şeklinde ilk trapez yaklaşıklıklığını elde ederiz.

Fakat genel olarak  $K_n$  için  $[a, b]$  aralığını  $2^n$  eşit aralığa böler ve bu şekilde doğrudan dik yamuğun alan formülüyle işlem yapmak istersek hesap zorlaşır. Bu durumda aşağıdaki pratik metodu kullanmanızı tavsiye ederim:

**Pratik Metot.**  $X_0X_2Y_2Y_0$  dik yamuğunun alanını yukarıdaki şekildeki gibi doğrudan dik yamuğun alan formülüyle hesaplamak yerine, onu  $X_0X_2Y_2D$  dikdörtgenine tamamlarsak (ki şekilde  $D$  noktası yoktur ancak bunu  $Y_2$  noktasından geçen ve  $x$ -eksenine paralel olan doğrunun  $X_0Y_0$  doğrusunu kestiği nokta olarak düşünülebiliriz),

$$K_0 = A(X_0X_2Y_2Y_0) = A(X_0X_2Y_2D) - A(Y_2DY_0) = (b - a)f(b) - \frac{(b - a)(f(b) - f(a))}{2} = h_0f(b) - h_0 \cdot \frac{f(b) - f(a)}{2} = h_0 \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

işlemden (1.1)'in elde edilmiş şekli daha kolay olur.

Diğer taraftan, eğer  $[a, b]$  aralığında  $\frac{a+b}{2} = \frac{2a+(b-a)}{2} = a + \frac{b-a}{2} = a + h_1$ 'ye karşılık gelen  $X_1$  orta noktasını gözönüne alır ve  $X_1Y_1$  dikmesinin  $f(x)$  eğrisini kestiği  $Y_1$ 'den  $Z_0Z_2$  teğetini çizerek bu teğetin denkleminin,

$$(1.2) \quad y - f(a + h_1) = f'(a + h_1)(x - (a + h_1))$$

(<sup>2</sup>) Bu şekilde bir yaklaşım, insanoglunun son 4000 yıldır bir daireye içten ve dıştan düzgün çokgenlerle yaklaşımı olan "Tüketme Metodu"nu gösterir. Yani Şekil 1.1'de  $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  limitine göre doğru parçalarıyla  $f(x)$ 'e yaklaşılmaktadır. Tıpkı bir çemberin içine ve dışına çizilen düzgün çokgenlerde olduğu gibi (Bkz. M.Ö. 1800-1650'lere tarihlenmiş "Susa Tabletleri" (ki bu tabletin çevirisini "Textes mathématiques de Suse" kitabında bulabilirsiniz) ve M.Ö. 250'ye tarihlenmiş Arşimet'in "Çemberin Ölçüsü Hakkında" çalışmalarına).

şeklinde olduğunu biliyoruz. Burada eğim Leibnitz Teoremi'ne göre  $m_T = f'(a + h_1)$  dir.

Şu halde (1.2)'ye göre şekildeki  $Z_0$  ve  $Z_2$  noktalarının

$$(1.3) \begin{cases} y - f(a + h_1) = f'(a + h_1)(a - (a + h_1)) \Rightarrow z_0 = f(a + h_1) - h_1 f'(a + h_1), \\ y - f(a + h_1) = f'(a + h_1)(a + 2h_1 - (a + h_1)) \Rightarrow z_2 = f(a + h_1) + h_1 f'(a + h_1) \end{cases}$$

ordinatlarından  $X_0X_2Z_2Z_0$  dik yamuğunun alanını,

$$T_0 := A(X_0X_2Z_2Z_0) = (b - a) \cdot \frac{z_0 + z_2}{2} = (b - a)f(a + h_1) = h_0f(a + h_1)$$

eşitliklerine göre

$$(1.4) T_0 = h_0f(a + h_1)$$

olarak elde etmiş oluruz ki, bu da ilk orta nokta yaklaşıklığıdır.

Fakat burada da aynı durum söz konusudur. Yani genel olarak  $T_n$  için  $[a, b]$  aralığını  $2^{n+1}$  tane eşit aralığa böldüğümüzde ortaya çıkan dik yamukların alanını hesaplamak ve bunları toplamak çok zaman ister. İşte burada da şu basit sonucu (Dikdörtgen Metodu) görmek gerekiyor:

**Pratik Metot.** Eğer  $Y_1$ 'den  $X_0Y_0$  ve  $X_2Y_2$  doğrularına birer dikme çizersek  $X_0X_2Z_2Z_0$  dik yamuğunun alanı, eş  $X_0X_1Y_1A$  ve  $X_1X_2BY_1$  dikdörtgenlerinin alanlarının toplamına eşit olur ve böylece,

$$T_0 = A(X_0X_2Z_2Z_0) = A(X_0X_1Y_1A) + A(X_1X_2BY_1) = h_1f(a + h_1) + h_1f(a + h_1) = 2h_1f(a + h_1) = h_0f(a + h_1)$$

işlemden (1.4)'ü derhal elde etmiş oluruz.

Peki bu nasıl oldu?

Dikkat edilirse şekilde  $f(x)$  eğrisine  $Y_1$  noktasında çizilen  $Z_0Z_2$  teğeti nedeniyle sarı renkle boyalı  $AY_1Z_0 \cong BY_1Z_2$  (A.K.A) eş dik üçgenlerinde

$$(1.5) A(A Y_1 Z_0) = A(B Y_1 Z_2)$$

alanlar eşitliği gerçekleşir, dolayısıyla  $X_0X_2Z_2Z_0$  dik yamuğundaki  $BY_1Z_2$  dik üçgeni  $X_0X_1Y_1A$  dikdörtgenine  $AY_1Z_0$  olarak transfer edilmiş olur ki  $X_0X_2Z_2Z_0$  dik yamuğunun alanı, eş  $X_0X_1Y_1A \cong X_1X_2BY_1$  dikdörtgenlerinin alanlarının toplamına dönüşür (Bkz. "[Riemann İntegrali](#)").

Şu halde (1.1) ve (1.4)'ten

$$(1.6) K_0 < I < T_0$$

tam sıkıştırması geçerli olur. Yani  $K_0$  ve  $T_0$ ,  $I$ 'ya hemen hemen eş yaklaşımlarda olurlar.

Şimdi burada biraz ara verip birbirine bağlı şu sonuçlara odaklanalım.

**Sonuç 1.1.** Aşağıdaki 2 sonucu [RİK 3](#)'te trapez metodunun geometrik yorumundan sonra vermiştim, ama bana kalırsa bunların yeri tam burasıdır. Yani bu sonuçları yerinde incelemenizin hem bakış açımızı değiştireceğini hem de ufkunuzu genişleteceğini düşünüyorum.

1.  **$Y_0Y_2$  Keseni ve  $Z_0Z_2$  Teğetinin Eğimlerinin Aynı Olması Şartı.** Şekildeki  $Y_0Y_2$  keseni ve  $Z_0Z_2$  teğetinin eğimleri aynı ise sarı renkle boyalı  $AY_1Z_0$  ve  $BY_1Z_2$  dik üçgenlerindeki

$$(1.7) |z_0 - f(a)| = |z_2 - f(b)|$$

yüksekliklerini eşit almamız yeterlidir. O zaman bu eşitlikte (1.3)'teki  $z_0$  ve  $z_2$ 'yi yerine koyar ve gerekli işlemleri yaparsak,

$$(1.8) \begin{cases} f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a) + f(b)}{2}, \\ f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{cases}$$

sonuçları ortaya çıkar ki ilk bağıntı  $f$ 'nin bir lineer (1. derece) polinom yani doğru olmasından (ki bu durumda şekildeki  $C$  ile  $Y_1$  noktaları çakışır, dolayısıyla  $f(x)$ ,  $Z_0Z_2$  teğeti ve  $Y_0Y_2$  keseni çakışır) ve ikinci bağıntı da  $f$ 'nin kuadratik (2. derece) bir polinom yani parabol olmasından ileri gelir (Bkz. "[Ortalama Değer Teoremi](#)"). Demek ki  $Y_0Y_2$  keseni ve  $Z_0Z_2$  teğeti yalnızca  $n = 1,2$  için  $f(x) = P_n(x)$  polinomunda paralel oluyorlarmış!

2.  **$T_n$ 'nin Değişmezliği Hakkında.** Şekilde  $Y_1$  noktasından geçen  $Z_0Z_2$  teğeti yerine  $Y_0Y_2$  doğrusuna paralel ya da herhangi bir doğru alınırsa (1.14)'teki  $T_n$  değişmez (Y.N. Özellikle Cebir'den bildiğimiz bu özellik için **Tosun Terzioğlu** şöyle der: "[Topolojide bir değişmeze 'Arf İnvaryantı' denir](#)". Bkz. "[Arf Değişmezleri](#)"). Örneğin,  $Y_1$ 'den geçen ve  $Y_0Y_2$  doğrusuna paralel bir doğru alırsak teğet ile kesenin eğimleri (1.8)'deki ikinci bağıntıya göre eşit olur:

$$(1.9) m_T = m_K = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Bu durumda  $Z_0Z_2$  paralelinin  $x = a$  ile  $x = b$  dikmelerini kestiği noktaların ordinatları sırasıyla,

## Romberg İntegrali Kronolojisi 4

$$(1.10) \quad \begin{cases} z_0 = f(a + h_1) - \frac{f(b) - f(a)}{2}, \\ z_2 = f(a + h_1) + \frac{f(b) - f(a)}{2} \end{cases}$$

olur ve buradan

$$T_0 = A(X_0 X_2 Z_2 Z_0) = (b - a) \cdot \frac{z_0 + z_2}{2} = (b - a) f(a + h_1) = h_0 f(a + h_1)$$

eşitliklerine göre

$$(1.11) \quad T_0 = h_0 f(a + h_1)$$

şeklinde yine (1.4)'teki sonuç ve işleme aynı şekilde devam edildiği takdirde de (1.14)'teki  $T_n$  elde edilir. Fakat bu sonuç sadece  $Y_1$ 'den geçen ve  $Y_0 Y_2$  doğrusuna paralel  $Z_0 Z_2$  doğrusuna has bir durum değil; genel olarak  $Y_1$ 'den geçen her doğru için geçerlidir. Ancak bu sonsuz doğrunun içinde en değerli olanı teğettir. Neden?

Şimdi işleme kaldığımız yerden devam edersek  $n = 1$ . adımda (dinamik hal) şu yaklaşıkları elde ederiz: İlk  $K_1$  için  $[a, b]$  aralığını 2 eşit parçaya böler (ki bu durum şekilde mevcuttur) ve bu sefer pratik metotla hesaplırsak,

$$K_1 = A(X_0 X_1 Y_1 Y_0) + A(X_1 X_2 Y_2 Y_1) = h_1 f(a + h_1) - \frac{h_1(f(a + h_1) - f(a))}{2} + h_1 f(b) - \frac{h_1(f(b) - f(a + h_1))}{2} = h_1 f(a + h_1) + h_1 \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} = \frac{K_0}{2} + h_1 f(a + h_1)$$

eşitliklerinden

$$(1.12) \quad K_1 = \frac{K_0}{2} + h_1 f(a + h_1)$$

sonucunu elde ederiz.

Diğer taraftan,  $X_0$  ile  $X_1$  ve  $X_1$  ile  $X_2$  nokta çiftlerinin orta noktalarını bulur (ki  $X_0$  ile  $X_1$  noktalarının orta noktası  $\frac{a + a + h_1}{2} = a + \frac{h_1}{2} = a + h_2$  ve  $X_1$  ile  $X_2$  noktalarının orta noktası da  $\frac{a + h_1 + a + 2h_1}{2} = a + \frac{3h_1}{2} = a + 3h_2$ 'dir) ve bu orta noktalardan çıkılan dikmelerin  $f(x)$  eğrisini kestiği noktalardan birer teğet çizersek, pratik metotla,

$$T_1 = 2h_2 f(a + h_2) + 2h_2 f(a + 3h_2) = h_1 (f(a + h_2) + f(a + 3h_2))$$

eşitliklerinden

$$(1.13) \quad T_1 = h_1 (f(a + h_2) + f(a + 3h_2))$$

sonucunu elde etmiş oluruz.

Sonuçta işleme bu şekilde devam edersek **MEM (Matematiksel Endüksiyon Metodu)** gereğince aşağıdaki teorem geçerli olur.

**Teorem 1.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}$  için

$$(1.14) \quad \begin{cases} T_n = h_n \sum_{k=1}^{2^n} f(a + (2k - 1)h_{n+1}), \\ K_n = \frac{K_{n-1}}{2} + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}} f(a + (2k - 1)h_n) \end{cases}$$

yaklaşıkları konkav  $f(x)$  eğrisinde ya da  $f(x)$ 'in konkav parçalarında

$$(1.15) \quad K_0 < K_1 < \dots < K_n < \dots < I < \dots < T_n < \dots < T_1 < T_0$$

şeklinde sıralanırlar (ki bu yaklaşıklar konveks  $f(x)$  eğrisinde ya da  $f(x)$ 'in konveks parçalarında ters sıralanırlar). Burada tam sıkıştırma teoremine göre  $K_n$  ve  $T_n$ 'ler,  $I$ 'ya hemen hemen eş yaklaşımda olurlar (Bkz. **Arşimet**'in "[Çemberin Ölçüsü Hakkında](#)" çalışmasına).

Burada şuna dikkat edelim lütfen: Yukarıda gösterdiğim üzere MEM ile kolaylıkla bulunan (1.14)'teki formüllerin Nümerik Analiz'deki esaslı ispatlarını da vermem gerekiyor. Çünkü araştırmalarıma göre üniversitelerimizde Romberg İntegrali yönteminin sadece uygulamasına ağırlık verildiğini, dolayısıyla teorik kısmının atlandığını gördüm (Bkz. "[Sayısal Yöntemler](#)", "[Ders 7: Nümerik İntegrasyon](#)", "[Romberg Algoritması](#)", "[Bölüm 3: Sayısal Türev ve İntegral](#)", "[Nümerik Analiz](#)" vd. Bunlardan sadece [sonuncu kaynak](#)ta ispat olabilir. Ama olsa bile, bu ispatlar yabancı kaynaklardan olduğu gibi taşınmış olup, onların modifiye edilmiş (1.14)'teki formüllere adaptasyonunun sağlanması, dolayısıyla tekrar ele alınması gerekir. Ancak ben, o kaynakta da ispat adına bir şey olduğunu zannetmiyorum). Hiç şakası yok; İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü'nün 2. sınıfındayken bir blok dersimizi (2 saat) sadece bir ispata harcamıştık. Ama o öğretim üyeleri ispat hastası değildi; o bilgilerin nereden ve nasıl geldiğini gösteriyorlardı bize. Çünkü matematikte "**eğer bir bilginin ispatına sahip değilsen, o bilgiye de sahip değilsin!**" demektir. İşte bu yüzden (1.14)'teki formüllerin ispatlarını aşağıda veriyorum!

**İspat.** İlk (1.14)'teki  $T_n$  için  $[a, b]$  aralığını  $2^n$  tane eş alt aralığa bölersek,  $\forall x_k \in [a, b]$  apsisleri  $x_k = x_0 + kh_n$  (ki şekilde  $x_0 = a$  ve  $x_{2^n} = b$ 'dir) olmak üzere  $[x_{k-1}, x_k]$  aralığının orta noktasının apsisini  $\frac{x_{k-1} + x_k}{2} = \frac{x_0 + (k-1)h_n + x_0 + kh_n}{2} = x_0 + \frac{(2k-1)h_n}{2} = a + (2k-1)h_{n+1}$  ve ordinatını  $f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) = f(a + (2k-1)h_{n+1})$  olarak elde ederiz. O halde  $f(x)$ 'e  $f(a + (2k-1)h_{n+1})$  noktasından çizilen  $Z_{k-1} Z_k$  teğetine göre yamuğun alanı, [pratik metotla](#) göre tabanı  $\Delta x_{k-1}$  ve yüksekliği  $f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)$  olan dikdörtgenin alanı,  $\Delta x_{k-1} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)$  olduğundan  $I$ 'ya üstten (alttan) yaklaşım gösteren yamukların orta noktalarından elde edilen toplam alanı şu şekilde bulmuş oluruz:

## Romberg İntegrali Kronolojisi 4

$$(1.16) \quad I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{2^n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{2^n} \Delta x_{k-1} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) = \sum_{k=1}^{2^n} h_n f\left(x_0 + \frac{2k-1}{2} \cdot h_n\right) = h_n \sum_{k=1}^{2^n} f(x_0 + (2k-1)h_{n+1}) = h_n \sum_{k=1}^{2^n} f(a + (2k-1)h_{n+1}) = T_n.$$

Burada  $T_n$ 'ye "Orta Nokta Formülü" ya da Şekil 1'de tutmuş olduğumuz yola göre "**f(x)'e teğetlerle n. yaklaşım**" denir.

İkinci olarak  $[x_{k-1}, x_k]$  aralığındaki yamuğun alanı, yüksekliği  $\Delta x_{k-1}$  ve tabanları  $f(x_{k-1})$  ve  $f(x_k)$  için yamuğun alan formülüne göre,  $\Delta x_{k-1} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$  olduğundan  $I$ 'ya alttan (üstten) yaklaşımı tüm yamukların alanlarının toplamından  $K_n$ 'yi şu şekilde elde etmiş oluruz:

$$(1.17) \quad \begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{2^n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{2^n} \Delta x_{k-1} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = \sum_{k=1}^{2^n} h_n \frac{f(x_0 + (k-1)h_n) + f(x_0 + kh_n)}{2} = \frac{h_n}{2} \sum_{k=1}^{2^n} (f(a + (k-1)h_n) + f(a + kh_n)) \\ &= \frac{h_n}{2} \left[ \sum_{k=1,3,5,\dots,2^n-1} (f(a + (k-1)h_n) + f(a + kh_n)) + \sum_{k=2,4,6,\dots,2^n} (f(a + (k-1)h_n) + f(a + kh_n)) \right] = \frac{h_n}{2} \left[ \sum_{m=\lceil \frac{2^n}{2} \rceil}^{\lfloor \frac{2^n}{2} \rfloor} (f(a + (2m-2)h_n) + f(a + (2m-1)h_n)) + \right. \\ &\left. \sum_{m=\lceil \frac{2^n}{2} \rceil}^{\lfloor \frac{2^n}{2} \rfloor} (f(a + (2m-1)h_n) + f(a + 2mh_n)) \right] = \frac{h_n}{2} \left[ \sum_{m=1}^{2^{n-1}} (f(a + (m-1)h_{n-1}) + f(a + (2m-1)h_n)) + \sum_{m=1}^{2^{n-1}} (f(a + (2m-1)h_n) + f(a + mh_{n-1})) \right] \\ &= \frac{h_n}{2} \left[ \sum_{m=1}^{2^{n-1}} (f(a + (m-1)h_{n-1}) + f(a + mh_{n-1})) + 2 \sum_{m=1}^{2^{n-1}} f(a + (2m-1)h_n) \right] = h_n \sum_{m=1}^{2^{n-1}} \frac{f(a + (m-1)h_{n-1}) + f(a + mh_{n-1})}{2} + h_n \sum_{m=1}^{2^{n-1}} f(a + (2k-1)h_n) \\ &= h_n \cdot \frac{K_{n-1}}{h_{n-1}} + h_n \sum_{m=1}^{2^{n-1}} f(a + (2m-1)h_n) = \frac{K_{n-1}}{2} + h_n \sum_{m=1}^{2^{n-1}} f(a + (2m-1)h_n) = K_n. \end{aligned}$$

Buradaki  $K_n$ 'ye ise "Trapez Formülü" ya da metodumuz gereği "**f(x)'e kesenlerle n. yaklaşım**" denir. (Y.N. Dikkat ederseniz burada 2. satırın sonundaki ilk toplamda  $k = 2m - 1$  ve 3. satırın başındaki ikinci toplamda  $k = 2m$  indis dönüşümlerini yaptım).

Şimdi bu ispatlar üniversitelerimizdeki diğer bölümler için bir önem arz etmeyebilir (ki özellikle mühendislik bölümlerinde uygulama esas olduğundan bunlara gerek olmaz), ama Matematik Bölümü'nde gereklidir ve **Atatürk**'ün "**Geometrik Kitabı**"ndaki gibi bir kılavuz niteliğindedir. Örneğin, Celal Bayar Üniversitesi'nin "**Sayısal Yöntemler**" kitabının 83. sayfasındaki "**6.6 Romberg İntegrasyon Yöntemi**"nde bu ispatlar çok sık durmaz mı? Hem zaten, 73. sayfada başlayan "**Bölüm 6: Sayısal İntegrasyon**"daki **Chebyshev**'in hariç tüm yöntemler buna bağlı. Göreceksiniz, çocuklar da çok mutlu olacak. Çünkü bilgiye erişmenin zevkini tadacaklar! Diğer taraftan, **Werner Romberg**, 14.02.1955 tarihli "**Vereinfachte numerische Integration von Werner Romberg**" adlı tezinde (1.14)'teki yaklaşımlarla  $f(x)$ 'e **Arşimet**'in, "**Çemberin Ölçüsü Hakkında**" çalışmasındaki bir çembere içteki ve dıştaki düzgün çokgenlerle  $\pi$ 'ye alttan ve üstten yaklaşığı gibi  $I$ 'ya (1.15)'teki gibi yaklaşır ve Richardson ekstrapolasyonunda her ikisini birlikte kullanırken (ki **Arşimet** ile **Romberg**'in arasında 2205 yıl fark var, dolayısıyla yöntemleri farklıdır ama aslında yaptıkları iş aynıdır. Çünkü zaten (1.14)'teki yaklaşımlarla  $f(x)$ 'e yaptığımız yaklaşımlar aslında bir daireye içten ve dıştan düzgün n-genlerle yaklaşımdan farklı değildir), günümüzde bunlardan sadece  $K_n$ 'ye yaklaşıklıkla Richardson ekstrapolasyonunda kullanılır!

Şimdi bu metodun en etkin şekilde nasıl kullanılacağına ilişkin aşağıdaki sonuca bakalım.

**Sonuç 1.2 (Metodun En Etkin Şekilde Kullanılması Hakkında).** Metodun en etkin şekilde kullanılabilmesi için  $f(x)$ 'in aşağıya doğru ya da yukarıya doğru konkav olduğu yerlerin belirlenmesi, dolayısıyla  $f(x)$ 'in dönüm (büküm) noktalarının

$$(1.18) \quad f''(x) = 0$$

denkleminde bulunması gerekir. Buradan  $f(x)$ 'in aşağıya doğru konkav (ki bu, x-eksenine göre "**konkav**"dır) ya da yukarıya doğru konkav (ki bu da, x-eksenine göre "**konveks**"tir) olduğu yerler  $[a, b]$  aralığında belirlenir, dolayısıyla  $[a, b]$  aralığı konkav ve konveks olan alt aralıklarına parçalanır (Bkz. "**Ders 8: Artan ve Azalan Fonksiyonlar, Konkavlık, Maksimum ve Minimum**", "**Türev Uygulamaları**" vb.). Buna göre  $f(x)$ 'in konkav olduğu yerlerde (1.15) ve konveks olduğu yerlerde de (1.15)'teki  $K_n$  ve  $T_n$ 'ler yer değiştirirlerse

$$(1.19) \quad T_0 < T_1 < \dots < T_n < \dots < I < \dots < K_n < \dots < K_1 < K_0$$

eşitsizlikleri geçerli olur. Örneğin, **Romberg**'in Tablo 2.1'deki örneği konkavdır ve bu yüzden (1.15) eşitsizlikleri geçerli olur!

Burada şuna dikkat etmeliyiz: Genelde bazı  $f(x)$  fonksiyonları için  $K_n$  ve  $T_n$ 'nin ilk n değerlerinde (1.15) ya da (1.19) eşitsizlikleri bozulabilir, ancak metod etkinleştiğinde yani n'nin belli bir değeri ve sonraki değerlerinde bu eşitsizlikler derhal korunur! Fakat genelde Romberg İntegrali yöntemi kullanılırken bu sonuca dikkat etmeden hesap yapılır. Çünkü bu şekildeki bir hesap yorucudur, dolayısıyla işin teorisiyle kimse uğraşmaz! Ancak **Romberg**'in, "**Vereinfachte numerische Integration von Werner Romberg**" tezinde tam da uğraştığı konu bu idi. O, bu tezin 3. sayfasındaki kendi metoduyla oluşturduğu mavi tabloda (1.15)'teki eşitsizliklerin geçerli olduğunu açıkça ifade etmese de hesapları şunu söyler: "**Trapez ve orta nokta formüllerinden elde edilen yaklaşımlar I'ın alt ve üst sınırlarıdır, dolayısıyla bunlar I'ı tam sıkıştırırlar.**"

**Teorem 1.2 (Aritmetik Ortalama).** (1.14)'teki  $K_n$  ve  $T_n$ 'nin aritmetik ortalaması  $K_{n+1}$ 'dir:

$$(1.20) \quad K_{n+1} = \frac{K_n + T_n}{2}.$$

**İspat.** (1.14)'teki formüllere göre

$$K_{n+1} = \frac{K_n}{2} + h_{n+1} \sum_{k=1}^{2^n} f(a + (2k-1)h_{n+1}) = \frac{K_n}{2} + h_{n+1} \cdot \frac{T_n}{h_n} = \frac{K_n}{2} + \frac{h_{n+1}}{h_n} \cdot T_n = \frac{K_n}{2} + \frac{1}{2} \cdot T_n = \frac{K_n + T_n}{2}$$

eşitliklerinden

$$(1.21) \quad K_{n+1} = \frac{K_n + T_n}{2}$$

bağıntısı geçerli olur.

Burada da şu sonuca dikkat edilmelidir: (1.14)'e göre  $T_n$ 'nin alt bölme sayısı  $K_n$ 'kinden 2 kat fazladır. Yani  $T_n$ ,  $2^{n+1}$  eş alt aralığa sahip iken,  $K_n$ ,  $2^n$  eş alt aralığa sahiptir. Bu sonuç ise (1.15) ya da (1.19)'daki  $K_n$  ile  $T_{n-1}$ 'in 1'ya eş yaklaşımlarda bulunabileceklerini gösterir. Bu durum özellikle  $n$ 'nin küçük değerlerinde açıkça fark edilir!

**Teorem 1.3 (İndirgenme Bağıntıları).**  $K_n$ 'nin  $K_0$ 'a ve  $T_n$ 'nin  $T_0$ 'a indirgenmesinde şu yeni bağıntılar geçerlidir:

$$(1.22) \quad K_n = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) = \frac{K_0}{2^n} + \sum_{k=1}^n \frac{T_{n-k}}{2^k}.$$

**İspat.** Aşağıda 2 farklı yolla ispat vereceğim. Bunlardan ilkinde (1.22)'deki her 2 eşitliği MEM ile, 2.'sinde 2. eşitliği ve 3.'sünde 1. eşitliği farklı metotlarla ispatlayacağım!

**1. Yol:**  $K_n$ 'nin  $K_0$ 'a adım adım indirgenmesinde ilkin  $n = 1$  alırsak (1.14)'teki trapez formülünden  $h_1 = \frac{h_0}{2}$  için triviyal (apaçık) olarak,

$$(1.23) \quad K_1 = \frac{K_0}{2} + h_1 \sum_{k=1}^{2^1-1} f(a + (2k-1)h_1) = \frac{K_0}{2} + h_1 f(a + h_1) = \frac{K_0}{2} + \frac{h_0}{2} f(a + h_1) = \frac{K_0}{2} + \frac{T_0}{2} = \frac{K_0 + T_0}{2}$$

eşitliğini elde ederiz. Yani  $n = 0$  için (1.22)'deki aritmetik ortalama geçerli olur.

İkinci olarak  $n = 2$  için (1.14)'ten

$$K_2 = \frac{K_1}{2} + h_2 \sum_{k=1}^2 f(a + (2k-1)h_2) = \frac{K_1}{2} + h_2 (f(a + h_2) + f(a + 3h_2))$$

ve burada (1.12)'den  $K_1$ 'i yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{K_1}{2} + h_2 (f(a + h_2) + f(a + 3h_2)) = \frac{\frac{K_0}{2} + h_1 f(a + h_1)}{2} + h_2 (f(a + h_2) + f(a + 3h_2)) = \frac{K_0}{2^2} + \frac{h_1}{2} f(a + h_1) + h_2 (f(a + h_2) + f(a + 3h_2)) \\ &= \frac{K_0}{2^2} + h_2 f(a + 2h_2) + h_2 (f(a + h_2) + f(a + 3h_2)) = \frac{K_0}{2^2} + h_2 (f(a + h_2) + f(a + 2h_2) + f(a + 3h_2)) = \frac{K_0}{2^2} + h_2 \sum_{k=1}^3 f(a + kh_2) = \frac{K_0}{2^2} + h_2 \sum_{k=1}^{2^2-1} f(a + kh_2) \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$(1.24) \quad K_2 = \frac{K_0}{2^2} + h_2 \sum_{k=1}^{2^2-1} f(a + kh_2)$$

sonucunu elde eder ve işleme bu şekilde devam ettiğimiz takdirde de MEM gereğince  $K_n$ 'nin  $K_0$ 'a göre genel olarak şu şekilde indirgenmiş olduğunu görürüz:

$$(1.25) \quad K_n = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n).$$

Bu yeni trapez formülüdür ve projeye başladığımdan beri (2016) bilgisayar programlarında trapez için herkesin kullandığı (1.14)'teki 2. formül yerine hep bu formülü kullandım!

Şimdi de  $T_n$ 'yi adım adım  $T_0$ 'a indirgemek istersek, (1.4) ve (1.13)'e göre,

$$T_1 + \frac{T_0}{2} = h_1 (f(a + h_2) + f(a + 3h_2)) + \frac{h_0 f(a + h_1)}{2} = h_1 (f(a + h_2) + f(a + 3h_2)) + h_1 f(a + 2h_2) = h_1 \sum_{k=1}^{2^2-1} f(a + kh_2)$$

eşitliklerinden

$$(1.26) \quad \sum_{k=1}^2 \frac{T_{2-k}}{2^k} = h_2 \sum_{k=1}^{2^2-1} f(a + kh_2)$$

sonucunu elde etmiş oluruz ki MEM gereğince genel olarak,

$$(1.27) \quad \sum_{k=1}^n \frac{T_{n-k}}{2^k} = h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n)$$

eşitliğini elde eder ve bunu (1.25)'te yerine koyarsak şu genel indirgeme bağıntısını elde ederiz:



## Romberg İntegrali Kronolojisi 4

$$(1.28) \quad K_n = \frac{K_0}{2^n} + \sum_{k=1}^n \frac{T_{n-k}}{2^k}$$

**2.2. Yol:** Bu son bağıntıdaki yani (1.22)'deki 2. eşitliği doğrudan (1.20)'den de elde edebiliriz. Neden? Çünkü (1.20)'den

$$(1.29) \quad \begin{cases} K_n = \frac{K_{n-1} + T_{n-1}}{2} = \frac{\frac{K_{n-2} + T_{n-2}}{2} + T_{n-1}}{2} = \frac{K_{n-2}}{2^2} + \frac{T_{n-2}}{2^2} + \frac{T_{n-1}}{2} = \frac{K_{n-2}}{2^2} + \sum_{k=1}^2 \frac{T_{n-k}}{2^k}, \\ = \frac{\frac{K_{n-3} + T_{n-3}}{2} + \frac{T_{n-2}}{2^2} + T_{n-1}}{2} = \frac{K_{n-3}}{2^3} + \frac{T_{n-3}}{2^3} + \frac{T_{n-2}}{2^2} + \frac{T_{n-1}}{2} = \frac{K_{n-3}}{2^3} + \sum_{k=1}^3 \frac{T_{n-k}}{2^k}, \\ \vdots \\ = \frac{K_{n-n}}{2^n} + \sum_{k=1}^n \frac{T_{n-k}}{2^k} = \frac{K_0}{2^n} + \sum_{k=1}^n \frac{T_{n-k}}{2^k} \end{cases}$$

şeklinde yine (1.28)'i elde ederiz!

**2.1. Yol:** Teorem 1.1'in ispatındaki bilgilere göre

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^{2^n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^{2^n} \Delta x_{k-1} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = \sum_{k=1}^{2^n} h_n \frac{f(x_0 + (k-1)h_n) + f(x_0 + kh_n)}{2} = \frac{h_n}{2} \sum_{k=1}^{2^n} (f(a + (k-1)h_n) + f(a + kh_n)) \\ &= \frac{h_n}{2} \sum_{k=1}^{2^n} (f(a + (k-1)h_n) - f(a + kh_n)) + h_n \sum_{k=1}^{2^n} f(a + kh_n) = h_n \frac{f(a) - f(a + 2^n h_n)}{2} + h_n \sum_{k=1}^{2^n} f(a + kh_n) = h_n \frac{f(a) - f(a + b - a)}{2} + h_n \sum_{k=1}^{2^n} f(a + kh_n) \\ &= h_n \frac{f(a) - f(b)}{2} + h_n \sum_{k=1}^{2^n} f(a + kh_n) = h_n \frac{f(a) - f(b)}{2} + h_n f(a + 2^n h_n) + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) = h_n \frac{f(a) - f(b)}{2} + h_n f(a + b - a) + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) \\ &= h_n \frac{f(a) - f(b)}{2} + h_n f(b) + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) = h_n \frac{f(a) + f(b)}{2} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) = h_n \frac{K_0}{h_0} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) = K_n \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$(1.30) \quad K_n = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n)$$

şeklinde (1.25)'i elde ederiz. Ama bunun ispatı (1.17)'dekine göre çok daha kolaydır. O zaman  $T_n$ 'yi veren (1.16) ile birlikte  $K_n$ 'yi veren bu yeni ispatla üniversitemizin hiçbir bahanesi kalmadı. Çünkü **Atatürk**'e göre Bilim üniversitemizin yaptığı gibi tercüme etmekle olmuyor; şimdi yukarıda gördüğümüz gibi incelemeye oluyor! (Bkz. "[ATATÜRK KÖŞESİ](#)").

**Not 1.1 (NAZİ Zaman Kapsülü Bulundu!).** Tam 18.11.2016'nın ilk saatlerinde yatacakken [YAHOO](#)'da ne haberler var diye bir bakayım dedim. Orada "[Explorers Discovered A Nazi Time Capsule, But What Missing From It?](#)" ilk haber olarak geçiyordu ve ne olduğunu merak ettim. Hemen linke tıkladım ve siteme koyduğum "[Nazi Zaman Kapsülü bulunmuş!](#)" genişçe haberinden de görüldüğü üzere 1934 tarihli zaman kapsülünden **Hitler**'in 2 ciltlik orijinal "**Mein Kampf (Kavgam)**" kitabını görünce şöyle demiştim: "Vaaay, hem çift kitap hem de orijinal". Bunu o sırada **Romberg**'in algoritmasının çifte sınırlı olmasına yormuştum (ki günümüzde bu kullanılmaz). Burada orijinallik çok önemlidir. Çünkü **Romberg**'in algoritması öyle her yerde yayınlanmaz; onu Norveççe yazan tarihi bir makaleden aldım (Bkz. "[Werner Romberg: Vereinfachte numerische Integration](#)"). Yani **Romberg**'in algoritmasının çift sınırlı olduğunu görmüştüm. Eğer **Owren**'in makalesi elimde olmasaydı, ben de bu gerçeği göremeyecektim. **Romberg** ile çakışmamızı ve Teorem 1.3'teki bağıntıları akşam eve gelince buldum!



**Resim 1.2. Werner Romberg.** Aralık-1988, Trondheim Üniversitesi/Norveç. 1978'de 69 yaşındayken emekli oldu. Uzun emekliliğin tadını çıkardı. Aralık 1988'de Trondheim Üniversitesi'nde onuruna "**İnterpolasyon, Ekstrapolasyon, Kuadratür ve Rasyonel Yaklaşıklıklar Hakkında Romberg Semineri**" düzenlendi.

### 1.2. Romberg'in Orijinal Metodu

Alman matematikçi ve fizikçi **Werner Romberg** "[Mathematicians Fleeing from NAZI Germany](#)" kitabında 58 kişilik göçmen bilim adamları listesinde 26. kişidir. Münih'te matematik fizikçisi **Arnold Sommerfeld (1868-1951)** tarafından yetiştirildi. Norveç'e iltica ettikten sonra Nümerik Analizci olarak tanındı ve Nazi Almanyası geçmişine ait bilinen tek anısını 1998'de kitabın yazarı **Reinhard Siegmund-Schultze**'ye şöyle anlattı (Y.N. İnanır mısınız en baştan beri **Romberg**'in tezinden çok, bu tür hatıratlarını her yerde harıl harıl aramışımdır. O sırada şunu düşünüyordum: "Sen, nasıl olsa **Romberg**'in metodunu çözersin. O zaman **Romberg**'in Nazi dönemi hatıratlarına yoğunlaş ve onları bul!" 5.12.2016, 00:53:27'de, 48. yaş günümün ilk saatinde, bilgisayarıma indirdiğim anılan kitapta geçen aşağıdaki hatıratı bulabildim sadece. Ama öyle görünüyor ki, bu hatırat bana adeta doğum günümde verilen bir armağan idi):

"**SPD** ve **KPD**'nin Naziler'e karşı ortak mücadelesini destekleyen **SAP**'a yakındım (Bkz. "[Hitler'in 1932'deki seçim konuşması](#)"). Yaklaşık 10-20 öğrenciydik ve bu yüzden Naziler tarafından tanınıyorduk. **Sommerfeld** 1932'de MÜNİH Üniversitesi'nde bir ödül yarışması organize etti ve katılmamı önerdi. Çözümü sundum ve şu yanıtı

## Romberg İntegrali Kronolojisi 4

aldım: ‘Atama tamamen gönderen tarafından yapıldı. Ancak, gereken olgunluğa (geistige Reife: Zihinsel Olgunlaşma) sahip olmayan (yetersiz) gönderici (Werner Romberg), ödül verilemez!’. Sommerfeld onu doktora (PhD) olarak sunmamı önerdi ve acele etmemi istedi. Bu nedenle 1933’ün yazında ‘Yüksek Onur (Magna Cum Laude)’ ile sınavı geçebildim. Sommerfeld SSCB’nden teorik fizikçilerin taleplerini duydu ve solcu yanlısamalarımı iyileştirmek için beni tavsiye etti.”, [Mathematicians Fleeing from NAZI Germany/4. Pretexts, Forms, and the Extent of Emigration and Persecution/4.D. Documents/4.D.5. Political Reasons for Emigration beyond Anti-Semitism, p. 77.](#)

Devamında Münih’ten SSCB’ye ve oradan da aktarmalı olarak Norveç’e göçmen olması hakkında da şunları söyler (ki kendisi ölene kadar Norveç vatandaşı olarak kaldı):

“1937’de SSCB’deki oturma iznim yenilenmedi, çünkü Alman pasaportum vardı. Polonya hâlâ var olduğundan (yani NAZI Almanyası tarafından işgal edilmediğinden) beri Prag’taki akrabalarım için Varşova’ya seyahat edebildim. Oslo’daki Profesör E. A. Hyllersås’e asistan olarak yanında çalışmayı teklif ettim. Brøgger Komitesi’nden biraz para bulmayı başardım. Böylece Sudetland’ın işgalinden sonra ama Prag’ın işgali öncesinde Oslo’ya uçabildim.”, [Mathematicians Fleeing from NAZI Germany/6. Alternative \(Non-American\) Host Countries/6.D. Documents and Problems Pertaining to the Various-Often Temporary-Host Countries outside of the United States/Norway, p. 125.](#)

Bu arada Romberg’in orijinal makalesini internette boşuna aramayın; çünkü bulamazsınız. Orijinale en yakın makale, Byrnjulf Owren’in “Werner Romberg: Vereinfachte numerische Integration” makalesidir. Ama bunda da sadece özetin özeti geçilmiştir (ki biz, buna “Tanıtım Makalesi” diyelim). Bu makaledeki detayları “History of Algorithms from Pebble to the Microchip by Jean Luc Chabert” kitabının 451-453. sayfalarında görebilir ve daha uzak bir okuma için J. Dutka’nın “Richardson Extrapolation and Romberg Integration, Historia Mathematica, 11 (1984), 3-21” kitabına bakabilirsiniz.

Şimdi Romberg’in orijinal metodunu kimse anlatmadığına göre, yukarıdaki çalışmaya göre ben anlatayım: Romberg’in, Trondheim’dayken yazdığı 14 Şubat 1955 tarihli tezindeki METOT şöyledir (Bkz. “History of Algorithms from Pebble to the Microchip by Jean Luc Chabert”, S. 451-454):  $a \leq x \leq b$  aralığını  $8n$ ’ye bölersek  $h = \frac{b-a}{8n}$  farkı (yüksekliği) ve  $k = 1, 2, \dots, 8n - 1$  için  $f(a + kh)$  tabanlarına göre Şekil 1.1’deki yamuğun alanı,

$$(1.31) \quad T_1 = 8h \sum_{m=0}^{n-1} f_{8m} = h \sum_{m=0}^{n-1} f_{8m}$$

dir. Burada üstü çizgiyle gösterilen toplam aritmetik ortalamadır ve aralığın uzunluğu  $8h$ ’dir.

Şimdi her bir aralığı ikiye bölersek yeni bölme noktalarından geçen yamukların alanlarının toplamı,

$$(1.32) \quad U_1 = 8h \sum_{m=0}^{n-1} f_{8m+4} = h \sum_{m=0}^{n-1} f_{8m+4}$$

dir.

Yeniden ikiye bölelim:

$$(1.33) \quad U_2 = h \sum_{m=0}^{n-1} (f_{8m+2} + f_{8m+6}),$$

ve sonunda

$$(1.34) \quad U_4 = h \sum_{m=0}^{n-1} (f_{8m+1} + f_{8m+3} + f_{8m+5} + f_{8m+7}).$$

Buna göre alt aralıkların uzunlukları  $4h$ ,  $2h$  ve  $h$  olmak üzere

$$(1.35) \quad T_2 = \overline{T_1 + U_1}, T_4 = \overline{T_2 + U_2}, T_8 = \overline{T_4 + U_4}$$

yaklaşıklıklarını elde ederiz.

Romberg bu yaklaşıklıkları  $i = 1, 2, 4$  için

$$(1.36) \quad \begin{cases} S_{2i} = T_{2i} + \frac{T_{2i} - T_i}{2^2 - 1}, \\ V_{2i} = U_{2i} + \frac{U_{2i} - U_i}{2^2 - 1} \end{cases}$$

ve bunları  $j = 2, 4$  için

$$(1.37) \quad \begin{cases} R_{2j} = S_{2j} + \frac{S_{2j} - S_j}{2^4 - 1}, \\ W_{2j} = V_{2j} + \frac{V_{2j} - V_j}{2^4 - 1} \end{cases}$$

ve son olarak bunları da  $k = 4$  için

$$(1.38) \quad \begin{cases} Q_8 = R_8 + \frac{R_8 - R_4}{2^6 - 1}, \\ X_8 = W_8 + \frac{W_8 - W_4}{2^6 - 1} \end{cases}$$

iterasyonlarında kullanır. Bunlar tıpkı *Huygens*'i takip eden *Jacques Frederic Saigey*'in 1856 ve 1859'da verdiği algoritmalarındaki gibidir (Bkz. (2.1)'e).

**Romberg** bundan sonra hiçbir şey söylemez. Ama pekâlâ, **Romberg**'in bıraktığı yerden

$$(1.39) \quad Y_8 = \frac{Q_8 + X_8}{2}$$

aritmetik ortalama ile

$$(1.40) \quad Z_8 = \frac{Q_8 + 2X_8}{2}$$

*Snellius* algoritmasını verebilirim. Bunlar **Romberg**'in tablosu, dolayısıyla Richardson ekstrapolasyonu için başat uygulamalardır (Bkz. 2.1.1'e).

### 1.2.1. Romberg Metodu Hakkındaki İlk Gözlemim

Hemen bir özet geçmem gerekirse **Romberg**'in orijinal metodu şu idi: **Romberg**, 14 Şubat 1955'te (1.31)'deki ilk  $T_1$  trapez yaklaşıklığı ve (1.32)-(1.34)'teki  $U_1, U_2, U_4$  orta nokta yaklaşıklıklarını (1.35)'teki aritmetik ortalamaya tabii tutarak  $T_2, T_4, T_8$  trapez yaklaşıklıklarını buluyor (ki bunlar  $f_0 = (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$  başlangıç değerine göre  $k = 1, \dots, 7$  için  $f_k = f(a+kh)$  değerlerinin toplamıdır) ve bunları (1.36)-(1.38)'deki algoritmalarla hızlandırıyor! Fakat bu metod günümüzde çok ilkel kaldı, dolayısıyla kullanımdan kalktı. Ancak **Romberg**'in düşüncesinin, dolayısıyla metodunun 1. sınıf olduğunu belirtmem gerekiyor. Çünkü bu düşünceyi anlayabilmeniz için "**geistige Reife: Zihinsel Olgunlaşma**"ya sahip olmanız gerekir (Y.N. Nedendir bilmiyorum ama, bu ifade bana "Savaşın galibi stratejist, ancak zafer kazandıktan sonra çarpışma ister." çağrışımını yaptı. Bkz. "Die Another Day", 1:51:06. Yani zihinsel olgunlaşma yoksa boşuna uğraşma!). Bu, **Romberg**'in 1932'de Münih Üniversitesi'nin açmış olduğu ödül yarışmasında aldığı yanıtıdır. Yani **Romberg** kibarca reddedilmiştir. Ama Başkan **Sommerfeld** onda bir ışık görmüş olmalı ki, **Romberg**'ten aynı çalışmayı doktora (PHD) olarak değerlendirmesini ve bunun için acele etmesini ister. **Romberg Sommerfeld**'in nasihatını dinler ve 26.07.1933'te "*Kanal Isık Işıklarının Kutuplaşması Hakkında (Zur Polarisation des Kanalstrahllichtes)*" çalışmasını doktora tezi olarak sunar<sup>(3)</sup>. Bu durumda **Romberg**, **Cahit Arf**e benzer. Çünkü onlar salt matematikçi değil; aynı zamanda matematik fizikçisidirler (Bkz. "The Collected Papers of Cahit Arf").

Şu halde **Romberg**'in (1.31)-(1.35)'teki yaklaşıklıkları solda (siyah renkli olanlar) ve (1.4)'teki yaklaşıklıklarımız sağda (kırmızı renkli olanlar) olmak üzere bu yaklaşıklıkları taraf tarafa toplarsak,

$$(1.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_0 = T_1 = K_0 \Rightarrow f_0 = K_0 \\ f_4 = U_1 = T_0 \Rightarrow f_4 = T_0 \\ \frac{f_2 + f_6}{2} = U_2 = T_1 \Rightarrow f_2 + f_6 = 2T_1 \\ \frac{f_1 + f_3 + f_5 + f_7}{4} = U_4 = T_2 \Rightarrow f_1 + f_3 + f_5 + f_7 = 4T_2 \\ \sum_{m=0}^7 f_m = \frac{K_0 + T_0}{=2K_1} + 2T_1 + 4T_2 = \frac{2K_1 + 2T_1}{=4K_2} + 4T_2 = 4K_2 + 4T_2 = 8K_3 \end{array} \right.$$

sonuçlarına göre

$$(1.42) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 = \frac{1}{1} \sum_{m=0}^0 f_{8m} = f_0 = K_0, \quad U_1 = \frac{1}{1} \sum_{m=0}^0 f_{8m+4} = f_4 = T_0, \\ T_2 = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^1 f_{4m} = K_1, \quad U_2 = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^1 f_{4m+2} = T_1, \\ T_4 = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 f_{2m} = K_2, \quad U_4 = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 f_{2m+1} = T_2, \\ T_8 = \frac{1}{8} \sum_{m=0}^7 f_m = K_3, \quad U_8 = \frac{1}{8} \sum_{m=0}^7 f_{m+\frac{1}{2}} = T_3 \end{array} \right.$$

ya da kısaca,  $i = 1, 2, 3, 4$  için

$$(1.43) \quad T_{2^{i-1}} = K_{i-1}, U_{2^{i-1}} = T_{i-1}$$

bağıntılarının geçerli olduklarını görürüz.

Bu sonuçla (1.35)'e göre (1.21)'i gerçekleyen

$$(1.44) \quad T_{2^i} = \frac{T_{2^{i-1}} + U_{2^{i-1}}}{2}$$

aritmetik ortalaması mevcut olur. Bu durumda (1.36)-(1.40) bağıntıları açık hale gelir!

Fakat **Prof. Byrnjulf Owren**, 2011 tarihli "*Werner Romberg: Vereinfachte numerische Integration*" makalesinde yukarıda ilk bakış attığım **Romberg**'in formüllerini orijinalden farklı olarak şu şekilde verdi (ki kendisi **Romberg**'in 1960'larda görev yaptığı **NTNU**'da (ki o sırada NTH idi) 1994'ten beri Matematik Bölümü'nde görev yapar. Bu

<sup>(3)</sup> Bu tez hakkında bilgi almak için "*Chemisches Zentralblatt, Band I, Nr. 4, 24.01.1934*"teki S. 507'ye (ki PDF'de 15. Sayfa) ve "*Degradierete Doktoren: die Aberkennung der Doktorwürde an der Ludwig-Maximilians-Universität München während der Zeit des Nationalsozialismus*"a bakarken sunulduğu yer için "*Ludwig-Maximilians-Münchener-Universität-1933*"e bakabilirsiniz.

arada, bu ilk gözlemden sonra “1.6.1. Romberg Metodu'nun Deşifreyonu”nda ispatını vermem, o sırada bu ispatı yapamadığım anlamına gelmez. Çünkü o sırada Mathematica ile birlikte yukarıdaki bulgulara erişince bile mutluluktan havalara uçmuştum: Bu bilgiler hiçbir kaynaktan geçmiyordu, dolayısıyla bu bulgularla Romberg'in metoduna ilk kez nüfuz ediliyordu ve bundan dolayı büyük bir sevinç içindeydim. İşte Romberg'in metodunu tamamen deşifre etmeyi, dolayısıyla ispatını yapmayı bundan sonra ciddi ciddi düşünmeye başladım. Tıpkı 2.1. Yol'da olduğu gibi):  $h = \frac{b-a}{n}$  ve  $f_0 = \frac{f(a)+f(b)}{2}$  başlangıç değerine göre  $0 < k$  için

$$(1.45) \begin{cases} T_n = h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f_k, f_k = f(a + kh), \\ U_n = h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}}, f_{k+\frac{1}{2}} = f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h\right) \end{cases}$$

yaklaşıklıkları

$$(1.46) T_{2n} = \frac{T_n + U_n}{2}$$

aritmetik ortalamasını gerçekler!

**Not 1.2 (Notasyon Sorunu).** Burada biraz durup düşünmek gerekiyor. Çünkü Romberg trapez yaklaşıklıklarını ve bunların Owen tarafından toplandığı (1.45)'teki ilk formülde T'yi “Trapez” kelimesinin baş harfi olarak alarak  $T_n$ 'yi yazdıktan sonra, alfabetik sıraya göre ondan sonra gelen  $U_n$ 'yi yazmıştır ve bu da Romberg'in orta noktalardan elde ettiği yaklaşıklıklarda, yani (1.45)'teki ikinci formülde kullanılmıştır (ki (1.46)'daki aritmetik ortalamada her ikisi de kullanılmıştır). Yani Romberg'in Şekil 1.1'de geometrik anlam ifade eden notasyonumuzdaki girişler ( $f(x)$ 'in sekant doğrusu) için  $K_n$ 'yi ve teğetler ( $f(x)$ 'in tanjant doğrusu) için  $T_n$ 'yi gösteren bir anlayış içinde olmadığını tespit ettim. Kaldı ki bu çalışmaya ilk çalışmaya başladığım zaman ben de Romberg gibi  $T_n$ 'yi  $A_n$  ile ve  $K_n$ 'yi  $B_n$  ile gösteriyor ve bunlarla konveks  $f(x)$  eğrisi üzerinde çalışıyordum (Bkz. “Romberg İntegrali Kronolojisi 1”). Ama sonra  $T_n$ 'nin invariant özelliği ve metodun en etkili kullanım şekli aklıma gelince derhal bu alfabetik notasyon yazımından vazgeçtim ve şekilde doğru parçaları  $f(x)$  eğrisi için ne anlam ifade ediyorsa ona göre çalışmaya başladım. Çünkü  $f(x)$  ne olursa olsun (ister konveks olsun ister konkav olsun) bu şekilde çalışmak daha kolaydır. Yani  $f(x)$  konkav (veya  $f(x)$ 'in konkav olduğu yerleri varsa) (1.15) ya da konveks (veya  $f(x)$ 'in konveks olduğu yerleri varsa) (1.19)'daki eşitsizlikler geçerli olacaktır ama (1.14) değişmeyecektir. İşte bu yüzden  $A_n$  ve  $B_n$  yerine  $T_n$  ve  $K_n$ 'yi yazdım!

Şimdi bu bölümü kapatmadan önce harddiskimin azizliğine uğrayıp bu bölümdeki bilgilerin yer aldığı dosyanın nasıl kaybolduğunu, ama bir şans eseri tekrar nasıl elde ettiğime ilişkin başımdan geçen talihsiz bir olayı aktarmama izin veriniz. Bu arada, şimdilerde artık bu tür talihsiz olayların önüne geçen Microsoft'un Onedrive programını kullanmanızı hararetle tavsiye ederim. Çünkü bilgisayarınızdaki harddisk çökmesi, virüs nedeniyle çalıştığınız dosya/larınızın bozulması, Windows'taki sistem dosyalarının bozulmasıyla sisteme erişimin engellenmesi vb. gibi durumlarda Onedrive uygulaması gerçekten de işe yarıyor. Bu konuda daha önce yaşadığım talihsiz olaylar şunlardır: Şimdiye kadar Windows XP'de cebirsel denklemlerin özel bir metotla (diferansiyellenebilir matrisler) genel çözümünü veren 80 sayfalık külliyat niteliğindeki dosyayı ve 2013'te de okuldaki bilgisayar sınıfındaki öğrencilerin kullandığı bir bilgisayara (ki bu kazara oldu. Yani öğrencilerin kullandıkları bilgisayarları temiz zannediyordum) flash belleği takmam suretiyle, bilgisayardaki bir virüsün Arşimet'in son derece önemli bir çalışmasını içeren dosyayı kaybettim. Tabii ki her seferinde başımdan aşağıya kaynar sular dökülmüş gibi hissettim kendimi. Bu nedenle, bana göre, Microsoft'un Onedrive uygulaması bir devrimdir!

### 1.3. Beklenmedik Bir Sürpriz!

İşin kötüsü ne idi biliyor musunuz? Yeni taşındığım muhitteki zırt pırt kesilen elektrikler yüzünden harddiskim (3 TB SEAGATE) çöktü (ki çöktüğü Windows 10'un Denetleme ve diğer programlar tarafından görülmüyordu. Bu durum harddiskin çok ağır çalışması nedeniyle kasayı 24.12.2016'da götürdüğüm bilgisayarcıya anlaşıldı) ve 21.12.2016, 17:47 itibarıyla harddiskimden harici harddiskime (1 TB HP) tüm dosyalarımı aktarıırken 73 saat 40 dakika çalıştığım A4 formatındaki 24 sayfalık “Romberg Metodu ve Ötesi” adlı dosyayı aktaramadım. Çünkü harddisk çökmüş ve kırılma tam da son olarak çalıştığım bu dosyanın üzerinden bir fay hattı gibi geçiyordu. Bu yüzden bu dosyayı ne açabiliyor (ki MS WORD'de açmaya çalıştığım zaman Satır 0-Sütun 0'da XML hatası görülmüyordu), ne kopyalayabiliyor (ki % 60'ına kadar kopyalanıyor ama orada takılıyordu) ve ne de taşıyabiliyordum (sadece dosyanın özelliklerine bakabiliyordum). Tam da makalemi tamamlamışken. Bu dosyanın ilk 10 sayfasında metodu anlatmış ve son 14 sayfasında da E-ATA 1 Algoritmaları'ndan transfer ettiğim birkaç ekstrapolasyonu yazmıştım. İşte böyle bir durumda harddiskin çökmesi, Mr. Bean'in 1871 tarihli “Whistler's Mother” yağlı boyalı tablosunu berbat etmesi gibi bir şeydi. Böyle bir şeyin insana nasıl acı verdiğini Los Angeles Müzesi Kuratörü David Langley'in, “Tanrım, tanrım, tanrım... (O JESUS, O God...)” demesinden anlayabilirsiniz!

Bu nedenle okulda hemen bu dosyadaki çalışma başlıklarını bir kâğıda yazarak ne yaptığımı görmeye, dolayısıyla oradan yeniden bu dosyayı geri çağırabilir miyim, diye bir deneme bile yaptım. Ama panik halde yaptığım bu denemede pek de başarılı değildim. Daha doğrusu, başlıkları doğru bir şekilde ortaya koysam bile, içeriğe geçtiğimde elim ayağım dolaşıyordu. Yani bir dosyayı kaybetmek ve onu yerine koyamamak, sizi bir yerde çok feci sinirlendiriyor ve işe baştan başlamak çok ağır geliyordu. İşte asıl çöküşü burada yaşadım. Örneğin 2002-2003'teki E-ATA 1 Algoritmaları'na bu çalışma nedeniyle 2016'da geri döndüğümde resmen zır cahil kalmıştım!



Resim 1.3. Mr. Bean'in, “Whistler's Mother” tablosundaki kadının başına hapsirip bozduktan sonra bulunduğu çözüm. Gayet hoş olmuş!

Fakat şanslı olduğum bir nokta vardı ki son kaydetme tarihi 01.12.2016, 17:35 ve toplam çalışma süresi 26:59:00 olan 16 sayfalık eskiz çalışmasını okulda da çalışırım hesabıyla daha önceden cep telefonuma kaydetmiştim (ki bu dosya cep telefonunda ağır yükleniyordu, dolayısıyla okulda bir ara bu dosyaya bakarken, “Keşke bu dosyayı DOCX değil, PDF formatında yükleyseydim!” diye hayıflanmış, kendi kendime kızmıştım. Bkz. “Romberg İntegrasyonu Kronolojisi 1”) ve okulda bu dosyayı görünce tüm üzüntüm gitti ve yeniden çalışma kararı aldım. Ancak onca harcanan zamanı ve bir o kadar emeğimin boşa geçtiğini görünce üzülmemek elde değildi. Bu yüzden 1 hafta boyunca moral olarak çökmüştüm ve dosyayı kurtarmanın yollarını arıyordum. Ancak Microsoft, bu tür durumlarda dosyayı kurtarmanın imkânsız olduğunu söylüyordu sitesinde! Özetle, bu dosyayı kurtarmak için yapılacak herhangi bir işlem kalmadığına göre, ben de cep telefonumdaki dosyadan bu sefer daha iyi bir çalışma çıkartacağıma dair inançla yeniden çalışmaya başladım ve solda gördüğümüz Mr. Bean'in berbat ettiği tablodaki gibi daha da mükemmel yaptım (!) Şaka tabii ki. O makaleyi burada gördüğünüz üzere mükemmelin ötesine taşıdım!

*Derya PAMUK TULUM*

## §2. Trapez Metodu İçin Ekstrapolasyonlar

**2.1. Richardson Ekstrapolasyonu.** Bu ekstrapolasyonun tarihi oldukça geniştir. Tarihi bilgilerimize göre bu ekstrapolasyonu ilk kez 1654'te **Huygens** başlatmıştır ve kronolojiye göre ondan sonra **Takebe** gelir. Japon matematikçi **Takebe Katahiro (Kenkō)** 1710'da, muhtemelen 1695'ten önce, (2.2)'yi kullanarak  $\pi$ 'nin 41 ondalığını hesapladı (Bkz. "[The early history of convergence acceleration methods](#)"). Söz konusu **Takabe**'nin el yazması ve linkteki makale daha yeni neşredilmiş olup, bunlardan çıkan sonuca göre **Huygens**'in algoritmasını ilk kez genelleştiren, dolayısıyla (2.2)'yi ilk keşfeden kişi, **Takebe** olmuştur.

Doğu'daki bu gelişmeye karşılık Batı'da ise **Huygens**'i takip eden **Jacques Frederic Saigey**, 1856 ve 1859'da,

$$(2.1) \begin{cases} A'_n = A_{2n} + \frac{A_{2n} - A_n}{3}, \\ A''_n = A'_{2n} + \frac{A'_{2n} - A'_n}{15}, \\ A'''_n = A''_{2n} + \frac{A''_{2n} - A''_n}{63} \end{cases}$$

gerçek iteratif algoritmalarını ispatlı bir şekilde verdi (Bkz. "[Richardson Extrapolation and Romberg Integration, Historia Mathematica, 11 \(1984\), 3-21/The Work of Saigey](#)", "[Extrapolation algorithms and Padé approximations: A Historical Survey/1.2. Richardson's Process, p. 3](#)" vb.). Ancak **Saigey** bundan sonraki algoritmaları vermek yerine işin kolayına kaçtı<sup>(4)</sup>. 1900'de **W. F. Sheppard**, Simpson 3-8 Kuralı, Boole Kuralı, Weddle Kuralı vb.'nin yamuk kuralındaki yaklaşıklıkların farklı integral aralıklarında birer lineer kombinasyonu olduğunu tespit eder ve Euler-Mclaurin formülündeki eliminasyonda  $1 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots$  için  $h_n = r_n \cdot h$  ile daha iyi bir yaklaşıklık üretir. 1903'te **R. M. Milne**,  $\pi$  için **Huygens**'in (2.23)'teki fikrini **Saigey**'in denklemlerinde determinantlar kullanarak geliştirdi. İronik olarak, bu sonuçlardan bazıları sonraki yazarlar tarafından yeniden keşfedildi. **Lewis Fry Richardson**, ilki 1910'da ve ikincisi 1927'de olmak üzere bu ekstrapolasyonu ilk eliminasyonda  $h^2$  katsayılarına göre yeniden düzenledi ve buna " **$h^2$ -ekstrapolasyonu**" ve ikincisine de " **$h^4$ -ekstrapolasyonu**" adını verdi. Onu destekleyen, daha doğrusu bu ekstrapolasyonu onun adına kotarmaya çalışan vatandaşı **J.A. Gaunt**, bu konuda şunları yazar: "*h'nin 4. kuvvetinin ötesine genişletmede önemli bir zorluk olmayacaktır; ama öyle bir inceliğin pratik değeri az olurdu (!) (... there would be no essential difficulty in extending the expansion beyond the fourth power of h; but such a refinement would have little practical value (!))*". İşte bu açıklama **Richardson**'un adının neden bu ekstrapolasyona verildiğini açıklar. Çünkü **Richardson** ve **Gaunt** un bu ekstrapolasyon hakkında yaptıkları çalışma **Saigey**'inkinden farklı değildi (Bkz. "[The Collected Papers of Lewis Fry Richardson, Vol. 1/The deferred approach to the limit, p. 36-37, Ordinary differential equations, p. 37-41](#)"). Bu kitaptaki "[1927:1 The Deferred Approach To The Limit. Part I-Single Lattice](#)" bölümüne bakınız). 1936'da ise **K. Kommerel**, **Huygens**'in orijinal fikrinden hareketle **Saigey**'in denklemlerinden **Milne**'nin prosedürüne eşdeğer bir yaklaşıklıklar dizisi elde eder ve  $\pi$  için kullandığı tabloyla Romberg şemasının gerçek kâşifi olarak anılabilir. 1955'te **Romberg**, ilkin trapez yaklaşıklıkları için tekrarlı olarak bir eliminasyon kullandı ve bunun **Lothar Collatz**'in "[Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, 1955](#)" kitabından geldiğini ileri sürdü<sup>(5)</sup>.

Table of approximated values by increasing order

Interval length	Remainder of order:	$h^2$	$h^4$	$h^6$	$h^8$
8h	$T_1 = 0.78539\ 8163$ $U_1 = 1.11072\ 0735$				
4h	$T_2 = 0.94085\ 9449$ $U_2 = 1.02617\ 2153$	$S_2 = 1.00227\ 9878$ $V_2 = 0.99798\ 9293$			
2h	$T_4 = 0.98711\ 5801$ $U_4 = 1.00645\ 4543$	$S_4 = 1.00013\ 4584$ $V_4 = 0.99988\ 2006$	$R_4 = 0.99999\ 1566$ $W_4 = 1.00000\ 8187$		
h	$T_8 = 0.99678\ 5171$ $U_8 = 1.001608189$	$S_8 = 1.00000\ 8296$ $V_8 = 0.999992738$	$R_8 = 0.99999\ 9876$ $W_8 = 1.000000120$	$Q_8 = 1.00000\ 0008$ $X_8 = 0.999999992$	

\* For example, L. Collatz, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Springer, 1951, p. 6, equation (1.7)

**Tablo 2.1. Romberg**'in (1.55)'teki integraline ait alt ve üst sınır yaklaşımları. Bu tablonun ilk sütunundaki değerler  $I$ 'ya  $E$ 'siz doğal yaklaşımlar yani (1.14)'teki yaklaşıklıklardır ve 2, 3 ve 4. sütundaki değerler  $E$ 'li yaklaşımlardır (Y.N. Tablodaki kırmızı renkli veriler, **Jean Luc Chabert**'in **Romberg**'in tablosundaki hatalı verilerini (ki  $S_4$ 'te **Romberg** de hata yapmıştır:  $S_4 = \frac{4 \times 0.987115801 - 0.940859449}{3} = 1.000134585$ . Bkz. 38. sayfadaki [mavi tablo](#)) ve vermeye gerek görmediği diğer verileri gösterir. Bkz. "[History of Algorithms from Pebble to the Microchip by Jean Luc Chabert/14.6 Romberg's Integration Method S. 451-453](#)").

Prosedür **Eduard L. Stiefel**'in sentezleri ve 1961'de **Friedrich L. Bauer**'in hata analizinden sonra en geniş şekliyle bilinir oldu. Fakat **Romberg**, 1955'te (2.2)'yi nümerik integraller için kullanınca birden kıyamet koptu. Çünkü (2.2) ya çokgen algoritmalarında  $\pi$  için kullanılıyordu ya da diferansiyel denklemlerin çözümlerinde!

Çok ilginçtir, **Romberg**'in (2.2)'yi kullanması tıpkı **Saigey**'deki gibi ilkel idi. Çünkü onun bu ekstrapolasyon için orijinal kullanımını (1.36)-(1.38)'de açık bir şekilde görmekteyiz. Fakat **Jean Pierre Laurent**, 1963'te bu ilkel iteratif kullanımı en mükemmel şekle sokarak,

$$(2.2) E_{n+1,k} = \frac{4^k E_{n+1,k-1} - E_{n,k-1}}{4^k - 1} + O(h_n^{2k+2})$$

iterasyonunu sununca **Romberg**'in metodu dünya genişliğinde bilinir oldu!

Burada başlangıç değerleri (1.14)'e göre (ki bu, onların ilkel tanımlamasıdır ve doğrusu (2.5)'tedir),

$$(2.3) E_{n,0} = K_n, T_n$$

olmak üzere Tablo 2.1'deki **Romberg**'in örneği için

$$(2.4) K_n = E_{n,0}(K) < E_{n,1}(T) < E_{n,2}(K) < E_{n,3}(T) < \dots < I < \dots < E_{n,3}(K) < E_{n,2}(T) < E_{n,1}(K) < E_{n,0}(T) = T_n$$

sıralaması geçerli olur!

## Dijital Çağ'ın Başlangıcında Romberg Metodu

Burada hemen "*Bu metot Romberg'ten önce neden görülemedi?*" sorusu için **Jean Luc Chabert** gibi hemen kısa bir algoritmalar tarihçesine girecek olursam; **Jean Pierre Laurent**, (2.2)'yi verdiğinde tarihler, 1963'ü gösteriyordu ve ilk bilgisayar 1947'de IBM'in **ENIAC**'ıyla çoktan yapılmıştı bile! **D. F. Ferguson**, 1947'de bir hesap makinesiyle  $\pi$ 'nin 809 ondalığını hesapladı ve 1949'da da ENIAC ile  $\pi$ 'nin 2038 ondalığı hesaplandı. Bu son hesapta **Machin**'in 1706'da keşfettiği ve yakınsaklığı son derece

(4) **Saigey**'e hak vermemek mümkün değil, çünkü 4. algoritmaya karşılık gelen  $h^8$  için ispat oldukça ağırlaşıyordu. Bu nedenle **Saigey**, (2.1)'deki iterasyonlara ait kesirlerin paydalarındaki sayıların türetilmesinde yanlış bir varsayımda bulundu ama mühendis ve geometriçi **Guerin**, bu sayıların 3, 15, 63, 255, ... yani çift indisli **Mersenne asal formülü**nden (ki  $p = 2k$  için  $M_{2k} = 2^{2k} - 1 = 4^k - 1$ 'dir. Kaldı ki bu tür Mersenne sayıları asal değildir) geldiğini söyleyerek düzeltti. **Saigey**, **Guerin**'in bu sonucunu öğrendikten sonra onu kendisi için bulduğunu yazdı (Bkz. "[The History of Extrapolation Methods in Numeric Analysis/2. From Archimedes to Richardson, p. 5](#)").

(5) [Bu kitabı](#) sırf merakımı gidermek için KISSLY'den 6 \$'a satın aldım. Fakat KISSLY'nin bana verdiği kitap 1955 basımı çıktı, iyi mi! Ancak bu, tam da **Romberg**'in ünlü tezinin **Sigmund Selberg** tarafından sunulduğu yıl idi! (Bkz. "[Vereinfachte numerische Integration von Werner Romberg](#)").

hızlı olan  $\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239}$  ünlü formülü kullanıldı. Rivayete göre **Machin**, bu formülle 1 saat içinde  $\pi$ 'nin 100 ondalığını elle (!) topladı. Yani **Romberg** ve ardılları tam da dijital çağın başlangıcında (2.2)'yi vermişlerdi ve onun yöntemi Nümerik İntegral'de çığır açıyordu. Çünkü diğer metotlar bunun yanında nal topluyordu!

**2.1.1. Richardson Ekstrapolasyonu Uygulamaları.** Bu ekstrapolasyona ait 2 başat uygulama vardır.

**2.1.1.1. Aritmetik Ortalama Metodu.** Bu metot gerek (1.35), (1.44) ya da (1.46)'dan görüldüğü üzere **Romberg**'in asıl metodu, gerekse makalemizdeki (1.20)'den görüldüğü üzere Romberg metodunun geometrik yorumunun bir sonucudur.

Şu halde genel olarak (2.3)'ten

$$(2.5) \quad E_{n,0}(K) = K_n, E_{n,0}(T) = T_n$$

başlangıç değerlerine göre (2.2)'den elde edilen

$$(2.6) \quad \begin{cases} E_{n+1,k+1}(K) = \frac{4^{k+1}E_{n+1,k}(K) - E_{n,k}(K)}{4^{k+1} - 1} \\ E_{n+1,k+1}(T) = \frac{4^{k+1}E_{n+1,k}(T) - E_{n,k}(T)}{4^{k+1} - 1} \end{cases}$$

ekstrapolasyonik yaklaşıklıkları,

$$(2.7) \quad E_{n+1,k+1}(K) = \frac{E_{n,k+1}(K) + E_{n,k+1}(T)}{2}$$

aritmetik ortalamasını gerçekler!

**İspat. 1. Yol:** İspat (2.6)'dakilerle MEM'e dayanır. Bu yüzden (2.7)'yi doğru olarak kabul eder ve (2.6)'daki K'ye ait ilk iterasyonda (2.7)'yi kullanırsak,

$$\begin{aligned} E_{n+1,k+1}(K) &= \frac{4^{k+1}E_{n+1,k}(K) - E_{n,k}(K)}{4^{k+1} - 1} = \frac{4^{k+1} \cdot \frac{E_{n,k}(K) + E_{n,k}(T)}{2} - \frac{E_{n-1,k}(K) + E_{n-1,k}(T)}{2}}{4^{k+1} - 1} = \frac{4^{k+1}E_{n,k}(K) - E_{n-1,k}(K)}{4^{k+1} - 1} + \frac{4^{k+1}E_{n,k}(T) - E_{n-1,k}(T)}{4^{k+1} - 1} \\ &= \frac{E_{n,k+1}(K) + E_{n,k+1}(T)}{2} \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$(2.8) \quad E_{n+1,k+1}(K) = \frac{E_{n,k+1}(K) + E_{n,k+1}(T)}{2}$$

aritmetik ortalamayı yani (2.7)'yi bulmuş oluruz. Kaldı ki bu ispat aynı şekilde adım adım yapılarak MEM gereğince de bulunabilir!

**2. Yol:** Bu, ispattan çok (2.7)'nin doğrulanmasıdır. Yani (2.6)'daki T'ye ait 2. iterasyona göre,

$$\begin{aligned} E_{n,k+1}(T) &= \frac{4^{k+1}E_{n,k}(T) - E_{n-1,k}(T)}{4^{k+1} - 1} = \frac{4^{k+1}(2E_{n+1,k}(K) - E_{n,k}(K)) - (2E_{n,k}(K) - E_{n-1,k}(K))}{4^{k+1} - 1} = 2 \cdot \frac{4^{k+1}E_{n+1,k}(K) - E_{n,k}(K)}{4^{k+1} - 1} - \frac{4^{k+1}E_{n,k}(K) - E_{n-1,k}(K)}{4^{k+1} - 1} \\ &= E_{n+1,k+1}(K) - E_{n,k+1}(K) \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$(2.9) \quad E_{n+1,k+1}(K) = \frac{E_{n,k+1}(K) + E_{n,k+1}(T)}{2}$$

ile yine (2.7) elde edilir.

**Sonuç 2.1.** Burada Tablo 2.1'nin ilk sütunundaki veriler (1.42)'den bulunduktan sonra, bu veriler arasında (1.44) ya da (1.46) nedeniyle,

$$(2.10) \quad \begin{cases} T_2 = \frac{T_1 + U_1}{2}, & T_8 = \frac{T_4 + U_4}{2} \\ T_4 = \frac{T_2 + U_2}{2}, & T_{16} = \frac{T_8 + U_8}{2} \end{cases}$$

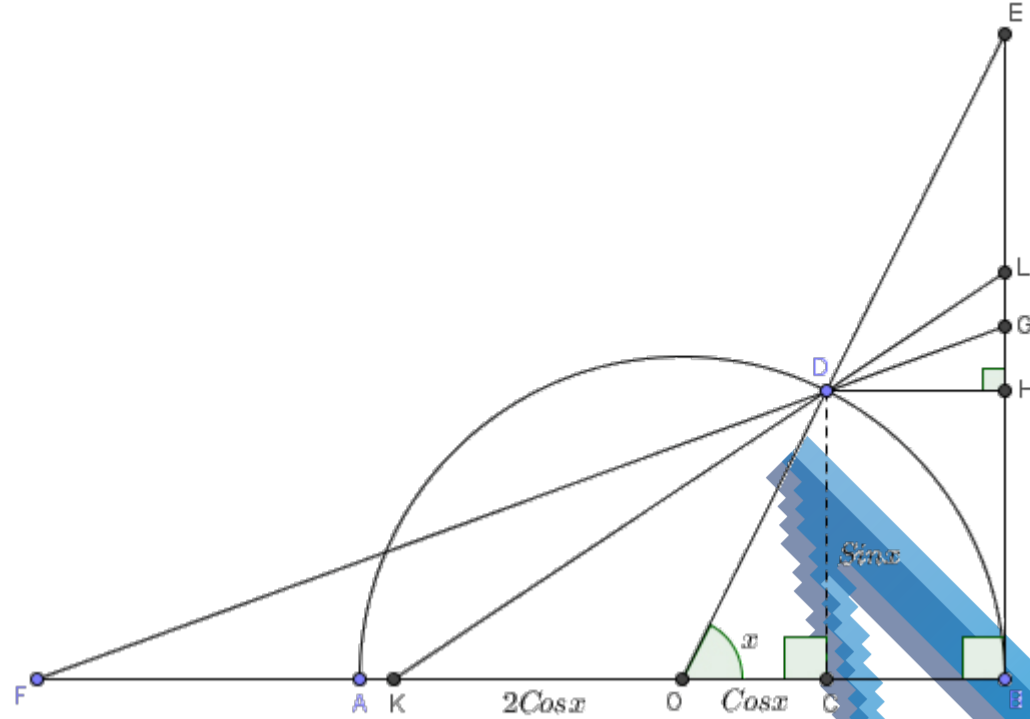
aritmetik ortalamalarının mevcut olduğunu biliyoruz!

Fakat aynı bağıntı (2.7) nedeniyle,

$$(2.11) \quad \begin{cases} S_4 = \frac{S_2 + V_2}{2}, & R_8 = \frac{R_4 + W_4}{2}, & P_{16} = \frac{Q_8 + X_8}{2} \\ S_8 = \frac{S_4 + V_4}{2}, & R_{16} = \frac{R_8 + W_8}{2} \\ S_{16} = \frac{S_8 + V_8}{2} \end{cases}$$

iterasyonlarında da mevcuttur. Ancak **Romberg**, hesaplamalarında bunları hiç kullanmadı; onların yerine (1.36)-(1.38)'i kullandı!

**2.1.1.2. Snellius Algoritması.** *Snellius, Ludolf van Ceulen*'in  $\pi$  için verdiği 1596 ve 1610'daki 20 ve 32 ondalıklı yaklaşıkları daha kısa yoldan bulabilmek için *Arşimet*'in çalışmasından hareketle geometriksel gözlemlere başladı. Fakat *Snellius*, bunlara "Teorem" demek yerine *Arşimet*'te olduğu gibi "Önerme (Propositio)" dedi ve ispatlarını yaptı. Daha sonra bu gözlemlerin doğru ve tam bir ispatı *Huygens*'in eline geçti. *Huygens*, bu ispatları inceledi ve yeni bir geometrik çalışmayla, yani



Şekil 2.1. *Huygens*'in topladığı çalışma, "De Circuli Magnitudine Inventa THEOR. 13-PROPOS. 16, S. 29-31".

şekline göre  $\forall x \in \mathbb{R}$  için geçerli olan

$$(2.12) \quad M_8 = \frac{3\sin x}{2 + \cos x} < x < \frac{2\sin x + \tan x}{3} = M_7$$

algoritmalarını verdi. Bunlardan  $M_7$ 'yi 1621'de *Snellius* ve  $M_8$ 'i 1458'de *Kardinal Nikola* vermiştir (Bkz. "Approximations of  $\pi$  & Squaring The Circle", Sayfa 331. Burada *Kusallı Nikola* çok ilginç bir kişilik olduğuna dikkat edelim. Çünkü kendisi bir Kardinal'dir ama, matematiğe ve tarihe aşırı derecede meraklıdır!). Fakat *Snellius*,  $M_7$ 'yi "Yansıma Kanunu" ile aynı yıl keşfetmesine rağmen bu kanunu yayınlamadı. Çünkü Yansıma Kanunu 984'te *İbn Sahl* tarafından keşfedilmişti ve onun *Alhazen (İbn-i Heysem)* yoluyla Avrupa'ya taşındığını biliyordu. Ancak *Snellius*'un yayınlamadığı bu kanun ve yukarıdaki çalışma daha sonra *Huygens* tarafından yayımlandı!

Şimdi *Huygens*'in yukarıdaki ispatına bakarsak şu sonuçların çıkmış olduğunu görürüz. İlk  $O$  merkezli ve  $[AB]$  çaplı birim çemberde, çemberin çapı  $|AF| = 1$  br yani yarıçap kadar uzatılıyor. Daha sonra çember üzerinde herhangi bir  $D$  noktası alınıyor ve bu noktadan  $O$  ve  $F$ 'den birer doğru geçiriliyor. Bu doğruların  $B$ 'deki teğetle kesim noktaları  $E$  ve  $G$ 'dir. Burada  $H$  noktası,  $[CD]$ 'nin  $[BE]$  teğet parçası üzerindeki dik izdüşümü olarak alınmıştır.

Şu halde  $FCD$  ve  $FBG$  dik üçgenlerindeki benzerlikten,

$$\frac{|FC|}{|FB|} = \frac{|CD|}{|BG|} \Rightarrow \frac{2 + \cos x}{3} = \frac{\sin x}{|BG|} \Rightarrow |BG| = \frac{3\sin x}{2 + \cos x}$$

eşitliklerine göre

$$(2.13) \quad |BG| = \frac{3\sin x}{2 + \cos x}$$

ile  $M_8$ 'i bulmuş oluruz.

Burada yeni olan  $M_7$ 'dir. Peki, *Snellius*, bunu nasıl keşfetti? Çünkü *Huygens*'in yukarıdaki açıklaması bana danişıklı dövüş gibi geldi!

Bu konu üzerinde 22.7.2002 tarihli "Arşimet'in Metodu M.V." albümümde durmamıştım ama, *Snellius* Ekstrapolasyonu'nu keşfettikten sonra aynı genelleştirmenin  $M_8$  için de geçerli olup olmadığına ilişkin bir araştırma yaparken bu soru tekrar karşıma çıkmış ve şu çözüm aklıma gelmişti (ki bu, *Kardinal*'in ekstrapolasyonunun çıkış yeridir):

$$(2.14) \quad M_7 = M_8^{-1}((\cos x)^{-1}, (\sin x)^{-1}).$$

Demek ki *Kardinal*'in ekstrapolasyonunun orijini veren bu bağıntıya göre,

$$M_8^{-1}((\cos x)^{-1}, (\sin x)^{-1}) = \left( \frac{3(\sin x)^{-1}}{2 + (\cos x)^{-1}} \right)^{-1} = \left( \frac{3 \cdot \frac{1}{\sin x}}{2 + \frac{1}{\cos x}} \right)^{-1} = \left( \frac{\frac{3}{\sin x}}{\frac{2\cos x + 1}{\cos x}} \right)^{-1} = \left( \frac{3\cot x}{2\cos x + 1} \right)^{-1} = \frac{(2\cos x + 1)\tan x}{3} = \frac{2\sin x + \tan x}{3} = M_7$$

dir. Burada *Snellius*'un algoritmasının orijinal şekli, kırmızı renkle vurguladığım yerdedir. Çünkü *Snellius*, kırmızı renkle gösterdiği algortmada  $x$  açısını 3'e böler (Bkz. "Approximations of  $\pi$  & Squaring The Circle", Sayfa 331'in sol başındaki  $M_7$ 'ye).

*Snellius*, muhtemelen *Kardinal*'den kalma  $M_8$ 'den  $M_7$ 'ye geçerken böyle bir sıçrama yaptı (Bkz. "2.1. Snell's rectification"). Çünkü Şekil 2.1'de bunu öngörmek kolay değildir. Örneğin şekilde  $A$  ve  $D$ 'den geçen bir doğru çizerseniz, bu doğru  $[BE]$  teğet parçası üzerinde  $L$ 'nin biraz altında ama ona çok yakın bir şekilde geçer. Bunu *Huygens*'in "De Circuli Magnitudine Inventa" kitabındaki Teorem 8-Önerme 8'de görmek mümkündür!

## Romberg İntegrali Kronolojisi 4

Şu halde **Snellius**'un  $M_7$  algoritması için çemberin çapı üzerinde O'dan  $|OC| = \text{Cos}x$ 'in 2 katı kadar uzaklıkta K noktasını gözönüne alırsak (ki K noktası çemberin dışında da ( $[AB]$  çapının uzantısı üzerinde) olabilir. Orijinalde **Huygens**'in şekli böyledir. Ama orada K noktası C olarak gözükür. Yani K noktasının çemberin içinde ya da dışında olması D noktasının seçimine bağlıdır) KCD ve KBL dik üçgenlerindeki benzerlikten,

$$\frac{|KC|}{|KB|} = \frac{|CD|}{|BL|} \Rightarrow \frac{3\text{Cos}x}{2\text{Cos}x + 1} = \frac{\text{Sin}x}{|BL|} \Rightarrow |BL| = \frac{(2\text{Cos}x + 1)\text{Tan}x}{3} = \frac{2\text{Sin}x + \text{Tan}x}{3}$$

eşitliklerine göre

$$(2.15) \quad |BL| = \frac{2\text{Sin}x + \text{Tan}x}{3}$$

ile  $M_7$ 'yi buluruz.

Fakat burada **Huygens**'e ait orijinal bir şey varsa, o da şudur:

**2.1.1.2.1. II'de Huygens Algoritması.** **Pfaff** (**Gauss**'un öğretmeni), 1800'de Arşimet Metodu'nu genelleştiren ve dairenin içine ve dışına çizilmiş düzgün n-genlerin

$$(2.16) \quad n\text{Sin}\left(\frac{\pi}{n}\right) = a_n < \pi < b_n = n\text{Tan}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

çevreleri için

$$(2.17) \quad a_{2n} = \sqrt{a_n b_{2n}}, \quad b_{2n} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$$

iteratif algoritmalarını verdi (Bkz. "[Pfaff-Borchard-Schwab Algoritması](#)", S. 480. Daha detaylı bilgi "[Arşimet'in Metodu M.V.](#)" albümümde mevcuttur).

Söz konusu bu algoritmalar  $x = \frac{\pi}{n}$  için şu çifte özdeşlikten elde edilmekteydi:

$$(2.18) \quad \text{Sin}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\text{Sin}x \cdot \text{Tan}\left(\frac{x}{2}\right)}{2}, \quad \text{Csc}x + \text{Cot}x = \text{Cot}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Aynı şekilde,

$$(2.19) \quad a_n < a_{2n} + \frac{a_{2n} - a_n}{3} < \pi$$

Huygens-1654

**Huygens**'in algoritması da

$$(2.20) \quad 2\text{Sin}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2\text{Sin}\left(\frac{x}{2}\right) - \text{Sin}x}{3} = \frac{8\text{Sin}\left(\frac{x}{2}\right) - \text{Sin}x}{3} < x$$

özdeşliğinden elde edilmektedir. Fakat bunun şekildeki gösterimi epey bir zorlamaya gider. Yani buna göre D'den geçen doğru çemberin çapını K'nin hemen biraz solunda ve [BE] teğet parçasını da L'nin hemen altında keser!

Burada şu sonuca odaklanmak gerekiyor: (2.19)'daki  $a_n$  alt sınırına bağlı Huygens algoritması,  $b_n$  üst sınırı için de geçerlidir!

Bu sonuç, **Huygens**'in 1654 tarihli "[De Circuli Magnitudine Inventa \(Çember Ölçüsünün Keşfi\)](#)" kitabında eksik bıraktığı noktadır! Ama şimdi, bunu aşağıdaki Snellius algoritması ile Huygens algoritması arasındaki ilişkide ispatlayarak Richardson ekstrapolasyonunu başlatan **Huygens**'in algoritmasını tam yetkinliğe kavuşturabiliriz.

**2.1.1.2.2. II'de Snellius-Huygens Algoritmaları Arasındaki İlişki.** Eğer **Pfaff**'in verdiği Harmonik Ortalama (HO) ile Aritmetik Ortalama (AO) arasındaki

$$(2.21) \quad \text{HO}(a_n, b_n) = b_{2n} < \frac{a_n + b_n}{2} = \text{AO}(a_n, b_n)$$

ilişkisinde  $b_n$  için (2.19)'daki gibi bir algoritma elde etmek istersek şu işlemleri yapmamız gerekir: Bu eşitsizliğin her 2 tarafını 4 ile çarpıp ve onlardan  $b_n$ 'yi çıkarıp 3'e bölersek,

$$\frac{4b_{2n} - b_n}{3} < \frac{4 \cdot \frac{a_n + b_n}{2} - b_n}{3} = \frac{2a_n + b_n}{3}$$

eşitsizliklerinden Snellius ve Huygens algoritmaları arasında şu ilişki geçerli olur:

$$(2.22) \quad \pi < \dots < \underbrace{\frac{4b_{2n} - b_n}{3}}_{\text{Huygens-1654}} \lesssim \underbrace{\frac{2a_n + b_n}{3}}_{\text{Snellius-1621}}$$



**Resim 2.1.** [Willebrord Snellius](#), **Kardinal** den sonra 1621'de 2. tür ekstrapolasyon algoritmasını keşfetti (ki bu, (2.35)'teki ilk iterasyondur). Aynı yıl "[Yansıma Kanunu](#)"nu da keşfetti ama hiçbir zaman yayımlamadı. Çünkü **Snellius tam bir Hristiyan** idi ve bu bilgi Batıya **Alhazen (İbni Heysem)** yoluyla ulaşmıştı. Ama o da bu kanunu 984'de keşfeden **İbn Sahl**'dan öğrenmişti (Bkz. "[Willebrord Snellius](#)"). O zaman Önsöz'deki örneklere ek olarak şunu rahatlıkla söyleyebiliriz: "**Optiğin babası İbni Heysem'dir ve Batıda Alhazen olarak tanınır. O, karanlık bir odada camiyi ters çevirdi!** (ki her şeyde olduğu gibi bunun da istismarını yapanlar çıkacaktır. Bkz. '[Atatürk'e Düşman Yazarlar](#)')"





**Resim 2.2.** *Christian Huygens*, *Snellius*'tan sonra 1654'te 3. tür ekstrapolasyon algoritmasını keşfetti. Bu, Richardson ekstrapolasyonunun ilk iterasyonudur.

Burada dikkat edilirse *Huygens*, adını altında andığımız algoritmayı vermez. Daha doğrusu, üst sınırlar için geçerli olan bu algoritma "*Oeuvres complètes. Tome XII. Travaux de mathématiques pures 1652-1656 (1910)*" kitabının 128-129. sayfalarındaki Teorem 5-Önerme 5'te ispatsız olarak verilir. Ayrıca bu teoremin devamı olarak, 168-169. sayfalarındaki Teorem 16-Önerme 19'da üst sınırlar ile ilgili bir diğer çıkarım verilir. Fakat bu çıkarımlar sadece birer nümerik gözlemden ibarettir!

Fakat *Huygens*'in  $\pi$ 'nin alt sınırı için Önerme 28 (S. 42) ve Önerme 29 (S. 43-44)'da verdiği ispat tamdır (Bkz. "*Oeuvres complètes. Tome XII. Travaux de mathématiques pures 1652-1656 (1910)*"daki Theoreme XIII-Propositionis XVI, S. 158-162. Özellikle 158 ve 159. sayfaların sonuna bakınız):

$$(2.23) \underbrace{a_{2n} + \frac{1}{3}(a_{2n} - a_n)}_{\text{Huygens-1654}} < a_{2n} + \frac{1}{3}(a_{2n} - a_n) + \frac{1}{3} \cdot \frac{(a_{2n} - a_n)^2}{2a_{2n} + a_n} = \frac{3a_{2n}^2}{2a_{2n} + a_n} < \pi < \frac{2a_{2n} + b_{2n}}{3}$$

İşte bu ispatla Modern Nümerik Analiz'i başlatan ilk matematikçinin *Huygens* olduğunu söylersek, bir hata yapmış olmayız. Çünkü *Huygens* bu ispatta *Kardinal*'in algoritmasından hareketle yeni ve genel bir çıkarımda (ki bu, Richardson ekstrapolasyonunun ilk iterasyonudur) bulunur ve anılan kaynaklara baktığımızda *Huygens*'in bu tür çok sayıda matematiksel çıkarımda bulunmuş olduğunu görürsünüz. Onun bu çıkarımlarına bakan bir kimse, *Huygens*'in modern anlamda Nümerik Analiz'in ilk başlatıcısı olduğunu açıkça görebilir.

Son olarak burada şu soruyu soralım kendimize: *Huygens*,  $\pi$  için *Kardinal*'in algoritması yerine *Snellius*'un algoritmasından hareketle aynı çıkarımda bulunsaydı, o zaman nasıl bir ispat yapmalıydı?

Bu sorunun yanıtı (2.21)'den hareketle (2.22)'nin nasıl elde edildiğindedir. İnanılır gibi değil, *Huygens*'in bunu nasıl atladığına bir türlü aklım ermiyor. Çünkü o, tüm bu çalışmaları *Snellius*'a borçluydu. Ama bu ispat için (2.17)'deki 2. bağıntıyı bilmek gerekiyordu!

Şimdi *Snellius* algoritmasının ekstrapolasyonda nasıl geçebileceğine bir bakalım. Ama bir şans eseri daha, burada da *Snellius-Huygens* ikilisini birlikte anacağız!

**2.1.1.2.3. Ekstrapolasyonda Snellius-Huygens Algoritmaları.** Bunun için (2.6)'daki ilk iterasyonda  $k = 0$  alırsak (1.20)'ye göre *Huygens*'in (2.23)'teki algoritmasından

$$E_{n+1,1}(K) = \frac{4E_{n+1,0}(K) - E_{n,0}(K)}{4 - 1} = \frac{4K_{n+1} - K_n}{3} = \frac{4 \cdot \frac{K_n + T_n}{2} - K_n}{3} = \frac{2T_n + K_n}{3}$$

Huygens-1654 Snellius-1621

eşitliklerine göre (ki isimlerini altına yazdığım bu algoritmalar  $\pi$ 'de yani (2.22)'de eşit değil, yaklaşık idiler),

$$(2.24) E_{n+1,1}(K) = \frac{2T_n + K_n}{3}$$

şeklinde *Snellius* algoritmasına ulaşmış oluruz. Fakat buradaki sınırlar  $\pi$ 'de terslenir yani yerleri değişir. Çünkü  $\pi$ 'de  $T_n$  daima alt sınır ve  $K_n$  de daima üst sınırdır. Bu durumda (2.24)'ün  $\pi$ 'de de geçerli olabilmesi için,  $f(x)$ 'in konveks olması ya da konveks olduğu parçalarının mevcut olması gerekir (Bkz. "*Romberg İntegrali Kronolojisi 1*").

Tarihi bilgilerimize göre (2.24) 1911'de *Becker* tarafından keşfedilmiştir (Bkz. "*Survey of Extrapolation Processes In Numerical Analysis/3. Numerical integration*", p. 442, (28)). Fakat *Becker* (2.24)'ün *Snellius*'un algoritması olduğundan habersizdir. Bu gerçek 2002'deki *Snellius* Ekstrapolasyonu nedeniyle 02.11.2016, 22:54'te dikkatimi çekti ve onu (1.20)'deki aritmetik ortalama özelliğindeki gibi bir özellik olarak kazandırmak benim için büyük bir onur oldu!

Şu halde *Snellius* algoritmasını ekstrapolasyona böylece kazandırdığımız göre, bu algoritmanın bir diğer varyasyonunu için şu sonuca bir bakalım:

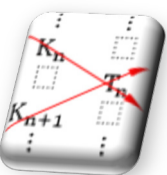
**Sonuç 2.2.** Eğer (2.24)'te (1.20)'deki aritmetik ortalama bağıntısını kullanırsak,

$$E_{n+1,1}(K) = \frac{2T_n + K_n}{3} = \frac{T_n + (T_n + K_n)}{3} = \frac{T_n + 2K_{n+1}}{3}$$

eşitliklerinden şu algoritmayı elde ederiz ki bu, (2.24)'ün dualitesidir:

$$(2.25) E_{n+1,1}(K) = \frac{T_n + 2K_{n+1}}{3}$$

Burada dikkat edilirse yandaki şemada *Snellius* algoritmasının nasıl çalıştığı görülmektedir. Buna göre aşağıdaki ok (2.24)'ü gösterir ve 2 katsayısı  $T_n$ 'e gelirken, yukarıdaki ok (2.25)'i gösterir ve 2 katsayısı bu sefer  $K_{n+1}$ 'e gelir (ki  $K_{n+1}$  ile  $T_n$ 'nin, eş sayıda eşit bölmelere sahip olduklarından, 1'ya yaklaşımları hemen hemen eşit). Ancak *Snellius* algoritmasını bu ok işaretlerine göre nasıl alırsanız alın, her ikisi de aynı sonucu verir. Ama bunlardan değerli olanı (2.24)'tekidir. Neden?



Şimdi "*Snellius* algoritmasından ne olacak?" demeyelim; çünkü bunun da (2.7)'deki Aritmetik Ortalama'daki gibi bağıntısı vardır.

**2.1.1.2.3.1. Richardson Ekstrapolasyonu'nun Snell Formu.** Öncelikle *Snellius* algoritmasının (2.6)'daki ilk iterasyonda  $k = 0$  için

$$(2.26) E_{n+1,1}(K) = \frac{2E_{n,0}(T) + E_{n,0}(K)}{3}$$

şeklinde olduğunu (2.24)'ten biliyoruz ve bunu eğer  $k = 1$  için aynı iterasyonda kullanırsak,

$$E_{n+1,2}(K) = \frac{16E_{n+1,1}(K) - E_{n,1}(K)}{15} = \frac{16 \cdot \frac{2E_{n,0}(T) + E_{n,0}(K)}{3} - \frac{2E_{n-1,0}(T) + E_{n-1,0}(K)}{3}}{15} = \frac{2 \cdot \frac{16E_{n,0}(T) - E_{n-1,0}(T)}{15} + \frac{16E_{n,0}(K) - E_{n-1,0}(K)}{15}}{3} =: \frac{2E_{n,0}^{(2)}(T) + E_{n,0}^{(2)}(K)}{3}$$

eşitliklerinden

$$(2.27) \quad E_{n+1,2}(K) = \frac{2E_{n,0}^{(2)}(T) + E_{n,0}^{(2)}(K)}{3}$$

iterasyonunu elde eder ve sonuçta bu işlemi diğer  $k$ 'lar için yaparsak MEM gereğince,

$$(2.28) \quad \begin{cases} E_{n,0}^{(1)}(K) = E_{n,0}(K) = K_n, & E_{n,0}^{(k)}(K) = \frac{4^k E_{n,0}^{(k-1)}(K) - E_{n-1,0}^{(k-1)}(K)}{4^k - 1}, \\ E_{n,0}^{(1)}(T) = E_{n,0}(T) = T_n, & E_{n,0}^{(k)}(T) = \frac{4^k E_{n,0}^{(k-1)}(T) - E_{n-1,0}^{(k-1)}(T)}{4^k - 1} \end{cases}$$

olmak üzere

$$(2.29) \quad E_{n+1,k}(K) = \frac{2E_{n,0}^{(k)}(T) + E_{n,0}^{(k)}(K)}{3}$$

genel iterasyonunu elde etmiş oluruz. Yani Richardson ekstrapolasyonu Snell bağıntısına göre değişmedi; Snell formunda kaldı!

Diğer taraftan, eğer Snell bağıntısını  $T_n$  ve  $K_n$  başlangıç değerlerine göre değil de doğrudan (2.6)'dakilere göre yazmak istersek şu sonuç çıkar:

**2.1.1.2.3.2. Aritmetik Ortalama-Snellius Bağıntısı Arasındaki İlişki.** Genel olarak  $I$ 'ya yakınsayan (2.7)'deki aritmetik ortalama gibi Snell ortalaması da vardır. Bunun için (2.24) ile (2.25)'teki Snell bağıntılarının  $E$ 'ye göre genel ifadelerini gözönüne ele alırsak [RİK 2](#)'deki (2.15) ya da tersine göre

$$(2.30) \quad E_{n+1,k+1}(K) \geq I \geq \frac{2E_{n,k+1}(T) + E_{n,k+1}(K)}{3} \left( = \frac{E_{n,k+1}(T) + 2E_{n+1,k+1}(K)}{3} \right)$$

eşitsizlikleri geçerli olur. Bu eşitsizliklerdeki yön (küçük ya da büyük olması yönü)  $k$  değerine göre sıralı olarak değişir ve aritmetik ortalama ile Snell ortalaması  $I$ 'nın ters yönlerinde kalırlar. Çünkü

$$E_{n+1,k+1}(K) \stackrel{(2.7)}{=} \frac{E_{n,k+1}(T) + E_{n,k+1}(K)}{2} \geq \frac{2E_{n,k+1}(T) + E_{n,k+1}(K)}{3} \Rightarrow 3E_{n,k+1}(T) + 3E_{n,k+1}(K) \geq 4E_{n,k+1}(T) + 2E_{n,k+1}(K) \Rightarrow E_{n,k+1}(K) \geq E_{n,k+1}(T)$$

eşitsizliklerinden

$$(2.31) \quad E_{n,k+1}(K) \geq E_{n,k+1}(T)$$

sonucu çıkar. Söz konusu bu eşitsizlik Tablo 2.1'deki **Romberg**'in örneğinde  $k$  tek ise küçük ( $<$ ) ve  $k$  çift ise büyük ( $>$ ) olur.

**2.3.3. E-ATA 1 Algoritmalarının Uygulama Alanları:** Genel olarak E-ATA 1 Algoritmaları'nın uygulama alanları, polinomal ekstrapolasyonların (ki örneğe Richardson ekstrapolasyonu) uygulama alanları ile aynıdır. Buna göre E-ATA 1 Algoritmaları yalnızca yakınsak çokgen algoritmaların yakınsaklığını hızlandıran ekstrapolasyonlar değil; aynı zamanda yakınsak diziler, seriler ve integrallerin de yakınsaklığını hızlandıran ekstrapolasyonlardır. Örneğin yakınsak integrallerin nümerik hesabında taban olarak Richardson ekstrapolasyonunu kullanan Romberg İntegrali verilebilir.

Buna göre E-ATA 1 algoritmaları şu alanlarda kullanılabilir:

1. Çokgenel Algoritmalar,
2. Nümerik Türev,
3. Nümerik İntegral.

**Alıntı 2.1.** 2003'te E-ATA 1 Algoritmaları'nın 3 maddede hangi alanlarda kullanılacağını belirtmiştim (Bkz. "ATA 1 Algoritmaları", S. 39). İnanılır gibi değil, 14 yıl önce ama **Romberg** öldükten sonra, muhtemelen 2003 yazında, orada "**Romberg İntegrali**"nden bahsetmişim!

yordu. Bak, yine çocuklaştın: Ama aynı yaklaşımlar günümüzde de kullandığından rahatlıkla 4,000 yıldan söz edebiliriz! Fakat bu albümle tam  $\pi$ 'nin Geometrik Dönemi'ni kapattığımı düşünürken karşıma **Kardinal Nikola, Snellius** ve **Huygens** tarafından verilen ilk ekstrapolasyon formülleri çıktı. Aslında bunlardan albüm çalışmaları sırasında **Snellius**'tan bahsetmiştim (bkz. "[1. Nesil Arktanjanant Fonksiyonu İle Pi Sayısının Hesabı, Ver. 3](#)"), dolayısıyla albümdeki çalışmalardan sonra soluğu hemen Snellius algoritmasında aldım. Fakat bu algoritmadan bir ekstrapolasyon çıkartmak hiç de kolay olmadı. Çünkü Snellius Ekstrapolasyonu'nun aşama aşama (4 versiyondur) gerçekte ne anlam ifade ettiğini gözlemlemeliydim. Sonra işin teorisine girdim ve **Richardson, Snellius, Kardinal**'in ekstrapolasyonlarını ve daha birçok ekstrapolasyon yazdım. İşin ilginç yanı, lineer ekstrapolasyonu çifte formda yazmıştım (ki bunlardan biri, burada Alıntı 2.3'te verdiğim (2.39)'dur). Hem de 2003'te. Buna göre Richardson ekstrapolasyonu her 2 formdan da daha ilk seferinde elde edilmekte idi. Ama o sırada yalnızca  $\pi$  ile ilgilendiğim için yukarıdaki Alıntı 2.1'de görüldüğü üzere E-ATA 1 Algoritmaları'nın hangi alanlarda kullanılabileceğine ilişkin bir de not bırakmıştım. Evet, orada Romberg İntegrali'nden de bahsetmişim. Bu notu 2003 yazında yazdım. Ama **Romberg**'in öldüğünü o sırada değil 2016'da öğrendim. Aynı şekilde, 2002'de Snellius Ekstrapolasyonu'nu araştırırken şimdiki Hollanda Kralı'nın babasının vefat etmiş olduğundan da haberim yoktu. Yine bu üzücü olaydan haberim, "[Prens Claus Fonu](#)" adlı web sitesinin ana sayfasının sol

**2.2. E-ATA 1 Algoritmaları'ndan Transferler.** E-ATA 1 Algoritmaları [RİK 1](#), [RİK 2](#), [RİK 3](#) ve buradaki Bölüm 1'de görüldüğü üzere Trapez Metodu için tam biçilmiş kaftandır!

Peki E-ATA 1 Algoritmaları nereden çıktı?

Bunun hikâyesi çok uzun ama kısaca anlatmam gerekirse ilk elde şunları söyleyebilirim: Hikâye 22.07.2002'deki "[Arşimet'in Metodu M.V.](#)" albümümle başlar (ki bu albüm A4 formatında 243 sayfalık 10 adet e-kitaptan oluşur). Aslında bu albümü tam olarak ifade etmem gerekirse, " [\$\pi\$ 'nin Geometrik Dönemi \(The Geometric Period of  \$\pi\$ \)](#)" demem gerekirdi. Çünkü albüm, M.Ö. 1800<sup>+</sup> – 1650 aralığına tarihlenmiş [Susa tabletinden](#), M.Ö. 250'deki [Arşimet'in "Cemberin Ölçüsü Hakkında"](#) çalışmasına ve buradan da 16-17. yy. Avrupası'na, özellikle Hollanda, kadar uzanan 3500 yıllık bir dönemi kapsayan çalışmalar içerir. Buna " [\$\pi\$ 'nin Geometrik Dönemi](#)" denir. Çünkü bu dönemde düzgün çokgenlerle dairenin çevresi ve alanına yani  $\pi$ 'ye yaklaşıldı.

tarafındaki Prens **Claus von Amsberg**'in "Kültür temel ihtiyaçtır! (Culture is a basic need!)" misyonuna ilişkin aşağıdaki sözünden sonra yine Google'da onu daha yakından tanımak isteyince oldu. Arka arkaya gelen bu vefat haberleri beni bayağı bir sarstı. İşin kötüsü şu ki, Prens **Claus von Amsberg**, tam da Snellius ekstrapolasyonuna çalışırken (10.09.2002/01:45-27.10.2002/05:40) 6.10.2002'de ölmüştü ve 2002'de şimdiki gibi geniş imkânlar yoktu. Örneğin, Snellius ekstrapolasyonunu keşfetme yolculuğuna çıkarken elimde **Snellius**'un "**CYCLOMETRICUS: De circuli dimensio secundum**" kitabı yoktu (Bkz. "[21.rar/Addendum Files/AA.zip/AA.nb](#)"deki 3. sekme ve "[21.rar/Addendum Files/ATA Algorithm.zip/ATA Algorithm.pdf](#)"deki 6. sayfa).

Şimdi bu kısa bilgilendirmeden sonra E-ATA 1 Algoritmaları'ndan transferlerimize geçebiliriz.

**2.2.1. Kardinal Nikola Ekstrapolasyonu, 1458-2003, 2018.** Eğer (2.6)'daki ilk ekstrapolasyonda (2.7)'deki aritmetik ortalamayı kullanılırsak,

$$E_{n+1,k+1}(K) = \frac{4^{k+1}E_{n+1,k}(K) - E_{n,k}(K)}{4^{k+1} - 1} = \frac{4^{k+1} \cdot \frac{E_{n,k}(K) + E_{n,k}(T)}{2} - E_{n,k}(K)}{4^{k+1} - 1}$$

$$= \frac{2^{2k+1}E_{n,k}(T) + (2^{2k+1} - 1)E_{n,k}(K)}{2^{2k+2} - 1}$$

eşitliklerinden

$$(2.32) \quad E_{n+1,k+1}(K) = \frac{2^{2k+1}E_{n,k}(T) + (2^{2k+1} - 1)E_{n,k}(K)}{2^{2k+2} - 1} + O(h_n^{2k+4})$$

ekstrapolasyonunu elde etmiş oluruz. Bu, (2.6)'daki ilk Richardson ekstrapolasyonunun çifte sınırlı yazımıdır. Ben, bu ekstrapolasyonu sağdaki Alıntı 2.2'deki (150)'de gördüğüm üzere 2003'te keşfetmiş ama bunun **Kardinal**'e ait olduğunu bilmiyorum, **Huygens**'e ait olduğunu zannediyordum. Fakat 20.06.2018, 06:00'da **Kardinal**'in algoritmasından Snellius ekstrapolasyonunda olduğu gibi bir ekstrapolasyon çıkarttığımda karşıma yine bu çıktı (Bkz. "**Romberg İntegrali Projesi 2016-2018**", EK 4). Ama buradakinin daha kolay olduğunu söyleyebilirim!

**Hollandalılara Zor Bir Soru (!): Huygens**, (2.23)'te **Kardinal**'in algoritmasından yeni bir çıkarımda bulunacağına, onu genelleştirseydi, (2.32)'yi değil ama  $k = 0$  için

$$(2.33) \quad E_{n+1,1}(K) = \frac{2T_n + K_n}{3}$$

algoritmasını (ki bu, (2.24)'teki Snellius algoritmasıdır) görebilir miydi?

Prens **Claus von Amsberg** bir keresinde şöyle dedi: "Belirleyici güç; kişinin kültürü, dili ve yaşam tarzının saygı gördüğü çevrede, gelişme ve ilerlemenin yalnızca toplumun kendisi tarafından gerçekleştirildiği büyüme farkındalığıdır. Kişinin kendi kültürü ve geleneklerine saygısı ve güveni olmaksızın ilerlemenin gerçekleşmesi zordur (Prince Claus once said, "The decisive factor is the growing realization that development and progress can be realized only by people themselves, in an environment where there is respect for one's own culture, own language and own lifestyle. Without respect and trust in one's own culture and traditions, progress is difficult to achieve."), [Annual Report 2018-Prince Claus Chair](#), S. 31".



Şimdi Hollanda Prensi **Claus von Amsberg**'in bu sözü gereğince Snellius ekstrapolasyonuna geçmeden önce, şu muhteşem hatırlatmayı yapmak istiyorum:



## Snellius Algoritması'nın 400. Yıldönümü

**Snellius Algoritması-1621.** Çapı 1 birim olan çemberin içine ve dışına çizilmiş düzgün n-genlerin

$$(1) \quad a_n = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) < \pi < n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = b_n$$

çevrelerinden  $\pi$ 'ye daha hızlı yakınsayan bir algoritma vardır:

$$(2) \quad \pi < \frac{2a_n + b_n}{3} = S_{n,0}(a, b).$$

**Snellius**'un algoritmasının 400. yıl dönümüne ilişkin gerekli bilgileri **Ludolf van Ceulen**'in ölümünün 400. yıl dönümü nedeniyle Hollanda'da çıkan EUCLIDES dergisinin 85 ve 86. sayılarındaki "[In De Ban Van De Cirkel](#)", "[vijfendertig decimalen](#)" ve "[Leermeester en leerling in gesprek: VAN CEULEN'S EN SNELLIUS' FUNDAMENTA ARITHMETICA ET GEOMETRICA](#)"dan alabilirsiniz. Güzel, bu kaynaklarda neler anlatıldığına ilişkin bir örnek olarak ikincisinin başlangıcındaki "**1.1. Een dialog (Bir Giriş)**" için bir denemede bulunabilirim: "Daha önceden tanıştığınız (ki burada [85. sayı](#) dakinden bahsediliyor) büyük matematikçi **Ludolph van Ceulen**'in

**1.2.2.1.1. ATA 1-1-2-2-1-1 ALGORİTMASI (Ters Trigonometrik Fonksiyonları Veren Poligon Algoritmaları'nın Tersleri için Başlangıç Değeri Hızlandırılmış Snellius-Huygens Algoritması'nın 1. Formülü):**  $S_m^{(n)}(\alpha)$  ifadesi (25)'e göre kosekant serisi için  $M_m^{(n)}(\alpha)$  ve kotanjant serisi için  $N_m^{(n)}(\alpha)$  olarak gözönüne alınırsa, (125)'ten

$$(147) \quad M_m^{(0)}(\alpha) = a_m^{-1}(\alpha), N_m^{(0)}(\alpha) = b_m^{-1}(\alpha)$$

başlangıç değerleri için (126)'dan

$$(148) \quad M_m^{(n)}(\alpha) = \frac{2^{2kn} M_{m+k}^{(n-1)}(\alpha) - M_m^{(n-1)}(\alpha)}{2^{2kn} - 1},$$

$$N_m^{(n)}(\alpha) = \frac{2^{2kn} N_{m+k}^{(n-1)}(\alpha) - N_m^{(n-1)}(\alpha)}{2^{2kn} - 1}$$

olmak üzere

$$(149) \quad M_m^{(n)}(\alpha) = \alpha^{-1} + \frac{2(2^{2n+1} - 1)B_{2n+2}}{2^{(kn+2m)(n+1)}(2n+2)!} \alpha^{2n+2} + O\left(\left(\frac{\alpha}{2^m}\right)^{2n+4}\right),$$

$$N_m^{(n)}(\alpha) = \alpha^{-1} - \frac{2^{2n+2}B_{2n+2}}{2^{(kn+2m)(n+1)}(2n+2)!} \alpha^{2n+2} + O\left(\left(\frac{\alpha}{2^m}\right)^{2n+4}\right)$$

sistemi elde edilir. Bu sistem  $\alpha^{-1}$ 'e göre çözümlenirse,

$$(150) \quad S_m^{(n)}(\alpha) = \frac{2^{2n+1}M_m^{(n)}(\alpha) + (2^{2n+1} - 1)N_m^{(n)}(\alpha)}{2^{2n+2} - 1} + O\left(\left(\frac{\alpha}{2^m}\right)^{2n+4}\right)$$

olarak bulunur. Bu formüle "**Ters Trigonometrik Fonksiyonları Veren Poligon Algoritmaları'nın Tersleri için Başlangıç Değeri Hızlandırılmış Snellius Algoritması'nın 1. Formülü**" denir.

Bu dizinin elemanlarının tersleri,

$$(151) \quad S_m^{-(0)}(\alpha) < S_m^{-(1)}(\alpha) < S_m^{-(2)}(\alpha) < \dots < S_m^{-(n)}(\alpha) < \dots < \alpha$$

şeklinde daima bir alt sınırdır ve herhangi bir  $m$  doğal sayısı için

$$(152) \quad S_m^{-(n)}(\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$$

olur ki bundan dolayı bu formüle de "**Ters Trigonometrik Fonksiyonları Veren Poligon Algoritmaları'nın Tersleri için Başlangıç Değeri Hızlandırılmış Huygens Algoritması'nın 1. Formülü**" denir. O halde şu eşitlik geçerli olur:

$$(153) \quad H_m^{(n)}(\alpha) = S_m^{-(n)}(\alpha^{-1}).$$

**Alıntı 2.2.** ATA 1-1-2-2-1-1 Algoritması, A1A, S. 29-31.

en ünlü öğrencisi **Willebrord Snellius** idi. Bugün **Snellius**, ışığın kırılma yasasını keşfetmesi ve ölçmesiyle tanınıyor. Bununla birlikte, saf matematikle, özellikle geometri problemlerini çözmekle de ilgileniyordu. **Van Ceulen** o alandaki öğretmeni idi. Dersleri ve sonraki iş birlikleri hakkında fazla bir şey bilinmiyor. [‘Fundamenta Arithmetica et Geometrica’](#) kitabı yine de çalışmalarına bir ışık tutuyor. **Snellius**’un **Van Ceulen**’in **‘Aritmetik ve Geometri Temelleri’** nin bir tercümesi ve uyarlaması olan bu çalışma, sadece **Van Ceulen** ve **Snellius**’un birlikte ve her birinin kendileri için çalıştıkları geometri problemleri hakkında bir şeyler öğrenmek için değil, aynı zamanda **Van Ceulen**, **Snellius** ve çağdaşlarının sayıları ve geometrik büyüklükleri bağlama girişimlerinde karşılaştıkları zorlukları da gösterir.

Hem *Fundamenta* hem de *Fondamenten* 1615’te ortaya çıktı. O zamanlar **Snellius (1580-1626)**, geç hümanist bilimlerin kalesi olan Leyden Üniversitesi’nde olağanüstü bir matematik bilimleri profesörüydü. Leyden Üniversitesi’nde ilk matematik profesörü olan babası **Rudolf Snellius**’un uzun yıllar asistanlığı yaptıktan sonra (o zaman da bile üniversitede kadrolu pozisyonlar azdı) halefi olmuştu. 1613’te ölen **Rudolf**, yetenekli bir öğretmen gibi görünüyor, ancak o bir matematik uzmanı değildi. Bu onun durumunda da gerekli değildi. Çünkü nihayetinde bir profesör prensipte bir öğretmendi, araştırmacı değil (6). Bununla birlikte, Leyden’deki araştırmalar diğer üniversitelerden daha fazla saygı görüyordu ve genç olan (**Snellius**) babasından daha derinlemesine gitti. Bunun için sadece kavrayışa değil, aynı zamanda çok fazla bilgiye de ihtiyacı vardı: Matematik bilimleri bir şekilde niceliksel olan her şeyi kapsıyordu ve **Snellius** geometri, aritmetik, navigasyon, ölçme, astronomi ve hatta Antik Çağ’dan gelen para hakkında kitaplar yayımladı. **Snellius**’un zamanında matematik hala klasik geleneğe çok derin bir şekilde bağlıydı, bu nedenle **Snellius**’un Latince ve Yunanca hakkında iyi bir bilgiye sahip olması ve Antik Çağ’dan gelen eserlerden haberdar olması elverişliydi. En önemli öğretmeni **Josephus Justus Scaliger**, üst düzey bir hümanist bilim adamıydı ve maalesef kendi matematiksel yeteneklerini aşırı derecede abartmış ve bu nedenle **Snellius**’un diğer öğretmeni **Van Ceulen** ile çatışmıştır. **Van Ceulen (1540-1610)**, **Snellius**’tan daha yaşlı bir nesilden geliyordu. **Snellius**’un aksine, Latince ve Yunanca bilmediği için klasik kaynaklara erişimi yoktu. Ancak, bunu büyük bir yaratıcılık ve benzersiz bir hesaplama dürtüsü ile telafi etti. **Van Ceulen** saf matematiğe odaklanırken, **Snellius** ayrıca karma matematik (gerçeklikten nesnelere sayıldığı veya ölçüldüğü) okudu. Her ikisi de kendi dönemlerinde saygın uzmanlardı ve ara sıra komitelere katılmaları da isteniyordu. Aralarındaki bir diğer önemli benzerlik, her ikisinin de iyi matematiği savunması ve kötü matematik olduğunu anladıkları şeye alenen karşı çıkmasıdır. **Van Ceulen**,  $\pi$ ’nin yanlış belirlenmesinden endişe duyarken, **Snellius** özellikle kavramların doğru kullanımına ve özellikle geometrik ve aritmetik büyüklüklerin ayrılmasına meraklıydı (Bkz. 4.4).”

Şimdi  $\pi$ ’nin hesabında aynı sorunla karşılaşan **Snellius**’un çözümünün yani algoritmasının geliştirilmiş şeklini 400 yıl sonra verebiliriz.

**2.2.2. Snellius Ekstrapolasyonu 1621-2002.** **Snellius**’un 1621’de keşfettiği (2.12)’deki  $M_7$  algoritmasının geliştirilmiş şekli şöyledir:  $\forall n \in \mathbb{N}$  için düzgün çokgen ya da türevi  $E_{n,0}(K) = K_n$  ve  $E_{n,0}(T) = T_n$  başlangıç değerleri olmak üzere (2.4)’ü (ya da tersini) gerçekleyen

$$(2.34) \quad \begin{cases} E_{n,k}(K) = \frac{4^k E_{n+1,k-1}(K) - E_{n,k-1}(K)}{4^k - 1} + O(h_n^{2k+2}), \\ E_{n,k}(T) = \frac{4^k E_{n+1,k-1}(T) - E_{n,k-1}(T)}{4^k - 1} + O(h_n^{2k+2}) \end{cases}$$

ekstrapolasyonik yaklaşıklıklarına göre sinüs ve tanjant serilerinden şu ekstrapolasyon geçerli olur:

$$(2.35) \quad S_{n,k}(T, K) = \frac{2^{2k+3}(2^{2k+4} - 1)B_{2k+4}E_{n,k}(T) - (k+2)E_{n,k}(K)}{2^{2k+3}(2^{2k+4} - 1)B_{2k+4} - (k+2)} + O(h_n^{2k+4}).$$

Burada tanjant serisinin katsayısından gelen  $B_{2k+4}$ ’ler [Bernoulli sayıları](#)dır ve  $S_{n,k}$ ’ler [“2.rar/Addendum\\_Files/AA.zip/AA.nb”](#) nin 2. sekmesindeki iterasyonlardır.

Fakat **Snellius** ekstrapolasyonu sinüs ve tanjant serilerinin Richardson ekstrapolasyonuna göre bir lineer kombinasyonu olduğundan, yalnızca buna ilişkin konveks  $f(x)$  için düzgün çokgen ya da türevi  $T_n < I < K_n$  algoritmalarının yakınsaklaştırılmalarında geçerlidir. Bu nedenle **Snellius** ekstrapolasyonu,  $\pi$ ’nin Geometrik Dönemi’ne ışık tutan özel bir ekstrapolasyondur. Yani bu ekstrapolasyonu yalnızca **Snellius**’a özel olarak yazdım dersen bir hata olmaz. Örneğin (2.35)’ten  $k = 0$  için

$$S_{n,0}(T, K) = \frac{2^3(2^4 - 1)B_4R_{n,0}(T) - 2R_{n,0}(K)}{2^3(2^4 - 1)B_4 - 2} = \frac{8.15 \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) \cdot R_{n,0}(T) - 2R_{n,0}(K)}{8.15 \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) - 2} = \frac{-4T_n - 2K_n}{-4 - 2} = \frac{2T_n + K_n}{3}$$

eşitliklerine göre derhal

$$(2.36) \quad S_{n,0}(T, K) = \frac{2T_n + K_n}{3}$$

**Snellius** algoritmasını elde ederiz!

Çünkü  $f(x)$  konkav iken

$$\begin{aligned} S_{n,k}(T, K) &= \frac{2^{2k+3}(2^{2k+4} - 1)B_{2k+4}E_{n,k}(T) - (k+2)E_{n,k}(K)}{2^{2k+3}(2^{2k+4} - 1)B_{2k+4} - (k+2)} = \frac{2^{2k+3}(2^{2k+4} - 1)B_{2k+4}E_{n,k}(T) - (k+2)E_{n,k}(T) + (k+2)E_{n,k}(T) - (k+2)E_{n,k}(K)}{2^{2k+3}(2^{2k+4} - 1)B_{2k+4} - (k+2)} \\ &= \frac{2^{2k+3}(2^{2k+4} - 1)B_{2k+4}E_{n,k}(T) - (k+2)E_{n,k}(T)}{2^{2k+3}(2^{2k+4} - 1)B_{2k+4} - (k+2)} + \frac{(k+2)E_{n,k}(T) - (k+2)E_{n,k}(K)}{2^{2k+3}(2^{2k+4} - 1)B_{2k+4} - (k+2)} = E_{n,k}(T) + \frac{k+2}{2^{2k+3}(2^{2k+4} - 1)B_{2k+4} - (k+2)} (E_{n,k}(T) - E_{n,k}(K)) > E_{n,k}(T) \end{aligned}$$

ile

$$(2.37) \quad E_{n,k}(K) < \dots < I < \dots < E_{n,k}(T) < S_{n,k}(T, K)$$

ya da  $f(x)$  konveks iken

(6) **Snellius**’un babasının bu durumu bana [Challenger faciası](#) nı hatırlattı. 28.01.1986’da “**Öğretmen Uçuşu**” olarak adlandırılan mekik, kalkışından 73 saniye sonra patladı. Patlama yakıt sızıntısı yüzünden oldu. Ama facia göz göre göre geldi. Çünkü önceki gece bazı NASA mühendisleri, soğuk havanın mekikteki contaları etkileyeceğini ve bunun sonucunda da işlevlerini yerine getiremeyeceğinden dolayı kalkışın iptal edilmesini istemişlerdi. Faciadan sonra bayraklar yarıya indi ve araştırma için bir komisyon kuruldu. Rogers komisyonu şöhretlerden oluşuyordu. Nobel ödüllü **Richard Feynman**, absürd conta deneyinin sonuçlarını açıklarken salonda buz gibi bir hava esti ve çaresizlikten kimse ağzını açamadı. Bana göre bu durum **Feynman**’ın akademisyenlik (öğretmenlik) yönünden kaynaklanıyordu ve [Christa McAuliffe](#) için rezil olmayı bile göze almıştı (Bkz. [“Challenger: Son Uçuş”](#)).

$$S_{n,k}(T, K) = E_{n,k}(T) - \frac{k+2}{2^{2k+3}(2^{2k+4}-1)B_{2k+4} - (k+2)}(E_{n,k}(K) - E_{n,k}(T)) < E_{n,k}(T)$$

ile

$$(2.38) S_{n,k}(T, K) < E_{n,k}(T) < \dots < I < \dots < E_{n,k}(K)$$

eşitsizlikleri gerçekleşiyorsa Snellius ekstrapolasyonu bir işe yaramaz. Ama (2.4)'ten görüldüğü üzere herhangi bir  $f(x)$  için bir keyfiyet söz konusudur, dolayısıyla  $E_{n,k}(T)$  ile  $S_{n,k}(T, K)$ 'lar birbirine yapışık ikizler gibi  $I$ 'ya yakınsalar. Aynı durum  $E_{n,k}(K)$  ile  $S_{n,k}(K, T)$  için de geçerlidir.

**1.4.3. ATA 1-1-s-3 ALGORİTMALARI (Ters Trigonometrik ve Hiperbolik Fonksiyonları Veren Poligon Algoritmaları ve Tersleri için Başlangıç Değeri Hızlandırılarak Genelleştirilmiş Richardson Ekstrapolasyon Algoritması):**

Yine Not 3&4'teki 2. sonuçları genelleştirebiliriz. Bu durumda

$$(276) C_m^{(0)}(\alpha) = y_m(\alpha), C_m^{(n)}(\alpha) = R_m^{(n)}(\alpha)$$

dizileri gözönüne alırsak,

$$(277) C_{tm}^{(n+s)}(\alpha) = \frac{2^{2m(n+s)}C_{(t+1)m}^{(n+s-1)}(\alpha) - C_{tm}^{(n+s-1)}(\alpha)}{2^{2m(n+s)} - 1} + O\left(\left(\frac{\alpha}{2^m}\right)^{2(n+s)+2}\right)$$

olmak üzere

$$(279) C_m^{(n+s)}(\alpha) \xrightarrow{n,s \rightarrow \infty} \alpha$$

yakınsaması gerçekleşir.

**Alıntı 2.3.** ATA 1-1-s-3 Algoritması, 13.05.2003, 23:14, A1A, S. 51.

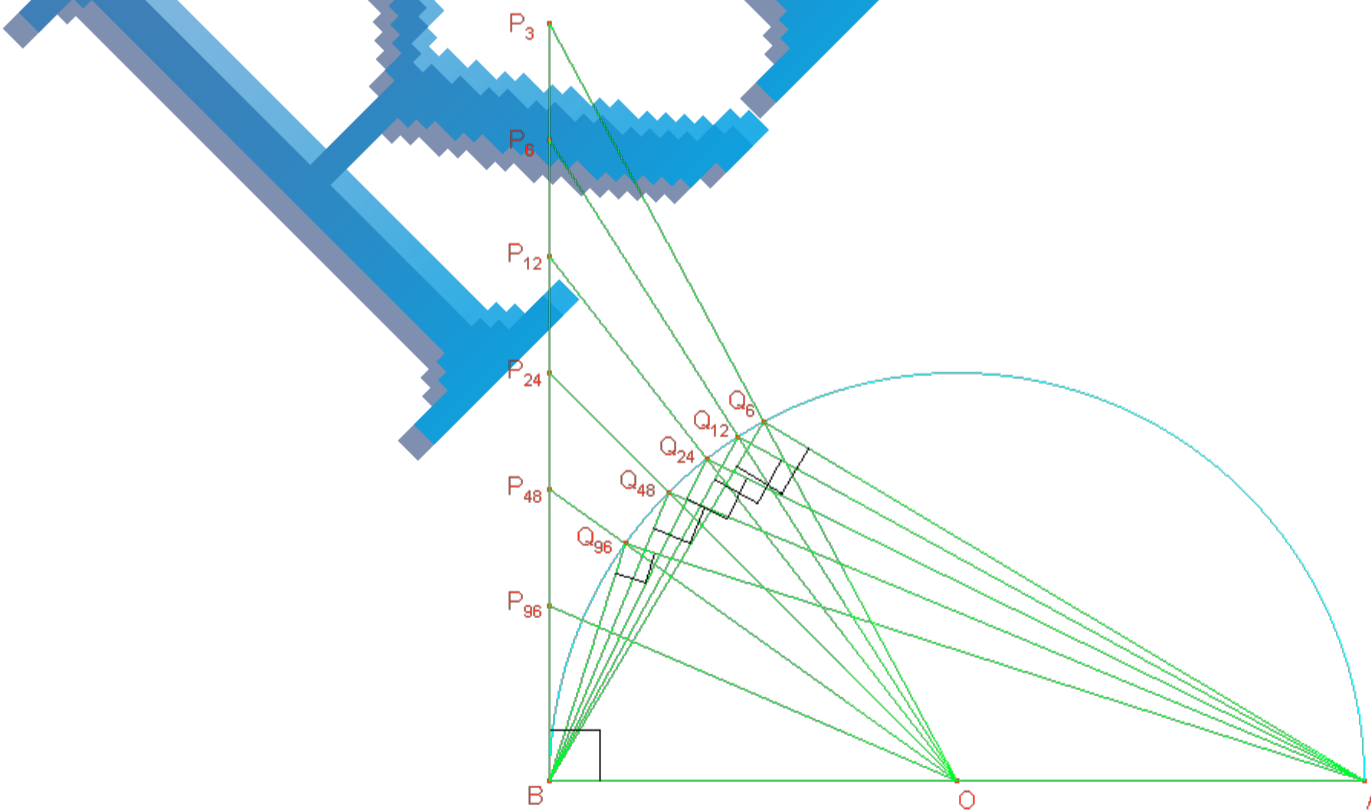
$$(2.40) h_{\frac{m}{h}}^{2k} = \left(\left(\frac{h_n}{=h}\right)_m\right)^{2k} = (h_m)^{2k} = \frac{h_m^{2k}}{\text{Genelde}}$$

eşitlikleri nedeniyle (2.39)'a " $h_m^{2k}$ -ekstrapolasyonu" da denilebilir. Ancak  $m = 1$  için özel bir durum vardır; çünkü bu durumda (2.50)'deki ekstrapolasyon elde edilir ki **Lewis Fry Richardson**, buna " $h^{2k}$ -ekstrapolasyonu" der (Bkz. "[VIII. The Deferred Approach to the Limit: Part I. Single Lattice by Lewis Fry Richardson, Part II. Interpenetrating Lattices by Arthur Gaunt](#)").

Bu parçada son olarak yukarıdaki son 2 ekstrapolasyonla tarihi bir çalışmadaki kesirleri analiz edelim.

**Önerme 3'teki Kesirlere Bakmak Gerekir!**

**Arşimet**, M.Ö. 250'de "[Çemberin Ölçüsü Hakkında](#)" risalesinde 3 önerme verir. Teoremlerini papirüslere yazdığına inanılan **Arşimet**'in bu risalesi M.S. 5. yy.'da **Eutokios** tarafından yorumlanır. Eğer bu yorumdaki Önerme 3'teki şekilleri birleştirirsek karşımıza şu şekil çıkar:



**Önerme 3.** **Arşimet**'in 2 şeklini birleştirdiğimiz bu şekilde temel bir geometri bilgisiyle karşılaşırız: "Aynı yayı gören çevre açının ölçüsü, merkez açının ölçüsünün yarısıdır." O halde  $|AB| = d$  birim çaplı dairenin dışındaki düzgün teğetler çokgeni olan eşkenar üçgenin bir köşesi  $P_3$  noktası olarak göz önüne alırsak, merkez açının ölçüsü  $m(\widehat{BOP_3}) = 60^\circ$  olur ve buradan çevre açının ölçüsü  $m(\widehat{BAQ_6}) = 30^\circ$  olarak elde edilir ki  $Q_6$  noktası da daire içindeki düzgün kirişler 6-geninin bir köşesi olur. Böylece dairenin dışındaki eşkenar üçgen içindeki düzgün 6-genin birer eşkenar üçgen olan eş parçalarından birinin 2 eş parçaya ayrılmasıyla elde edilen dik üçgenleri  $[AB]$  çapı üzerinde toplamış oluruz. İkinci olarak,  $BOP_3$  dik üçgeninin açortayı  $[OP_6]$  ve  $BAQ_6$  dik üçgeninin açortayı  $[AQ_{12}]$  ile oluşan  $BOP_6$  ve  $BAQ_{12}$  dik üçgenlerinde de aynı işlemleri yaparsak,  $[AB]$  çapı üzerinde dairenin dışına çizilmiş düzgün 6-gen ve içine çizilmiş düzgün 12-genin eş parçalarından biri olan dik üçgenler ortaya çıkmış olur ki, işlem bu şekilde devam ettirildiği takdirde diğer düzgün çokgenlere ait

dik üçgenler [AB] çapı üzerinde ortaya çıkarlar. Fakat bu şekildeki bir düşünüşün tek bir amacı vardır: Dairenin içine ve dışına çizilmiş düzgün çokgenlere ait dik üçgenler arasındaki ilişkilerden yararlanmaktır. Ancak **Arşimet**'in düşüncesi bu değildir. Çünkü aksi takdirde çalışmasını 2 bölüme ayırmazdı ve bu bölümler arasında ilişkiler olurdu!

**Arşimet**'in çalışmasında ise şunlar olmuştur: Yine d birim çaplı daire ele alınmış ve bunun içine düzgün 6-gen ve dışına düzgün 3-gen (eşkenar üçgen) çizilmiş ve sonra bunların kenarları 2'ye bölünerek dairenin içine ve dışına düzgün kırışlar ve teğetler 6-gen, 12-gen, 24-gen, 48-gen ve 96-genler çizilmiştir. Bu çizimlere ilişkin **Eutokios**'un hesaplarından  $\pi$  için şu kesirleri elde ederiz (ki aşağıdaki kırmızı renkli kesirler, "**Önerme 3**"ün ifadesinde  $\pi$  için teklif edilen kesirlerdir):

$$(2.41) \left\{ \begin{array}{l} 3 = T_0 = \bar{T}_0 = 6\sin\frac{\pi}{6} < T_1 = 12 \cdot \frac{780}{3013\frac{3}{4}} < \bar{T}_1 = 12\sin\frac{\pi}{12} < T_2 = 24 \cdot \frac{240}{1838\frac{9}{11}} < \bar{T}_2 = 24\sin\frac{\pi}{24} < T_3 = 48 \cdot \frac{66}{1009\frac{1}{6}} < \bar{T}_3 = 48\sin\frac{\pi}{48} < \\ 3\frac{10}{71} < T_4 = 96 \cdot \frac{66}{2017\frac{1}{4}} < \bar{T}_4 = 96\sin\frac{\pi}{96} < \pi < 96\tan\frac{\pi}{96} = \bar{K}_4 < 96 \cdot \frac{153}{4673\frac{1}{2}} = K_4 < 3\frac{1}{7} \\ < 48\tan\frac{\pi}{48} = \bar{K}_3 < 48 \cdot \frac{153}{2334\frac{1}{4}} = K_3 < 24\tan\frac{\pi}{24} = \bar{K}_2 < 24 \cdot \frac{153}{1162\frac{1}{8}} = K_2 < 12\tan\frac{\pi}{12} = \bar{K}_1 < 12 \cdot \frac{153}{571} = K_1 < 6\tan\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3} = \bar{K}_0 < \frac{1351}{390} = K_0. \end{array} \right.$$

Tarihi bilgilerimize göre, saf geometrik çalışmalardan oluşan "**Çemberin Ölçüsü Hakkında**" kitapçığının içinde yer aldığı Arşimet Palimpsesti orijinal Grekçe metninin bilinen tek kopyası idi. Palimpsest 29 Ekim 1998/Perşembe, 14:35 EDT'de mahkemenin açık artırmayla satışına son dakika itirazına karşı galip gelen Christie's'de 2.202.500 \$'a satıldı (Bkz. "**RİK 3/Atatürk Hedef Almıyor!, S. 30**"). Aynı gün Manhattan'da Yunan Kültür Bakanı **Evangelos Venizelos**, Arşimet Palimpsesti'nin Atina Ulusal Kütüphanesi'ne geri getirilmediği takdirde, Kudüs Ortodoks Patrikliği'nin dava açmakla tehdit ettiğini belirtmişti. Kudüs Ortodoks Patrikliği, Christie's'i dava etti ve 174 sayfalık metnin 1920'lerde İstanbul'dan çalındığını iddia etti. Mezatevi, şimdiki sahiplerinin cildi 1920'lerde kanuni olarak satın alan bir Fransız'ın neslinden olduklarını ileri sürdü. Christie's, Arşimet Palimpsesti'nin "**Matematiksel Teoremlerin Metodu Hakkında (On The Method of Mathematical Theorems)**" için tek kaynak ve "**Yüzen Cisimler Hakkında (On Floating Bodies)**" adlı çalışmasının orijinal Yunanca metninin bilinen tek kopyası olduğunu söyledi. El yazması, aynı zamanda "**Daire Çevresi Ölçmesi Hakkında (On The Measurement of the Circle)**", "**Küre ve Silindir Hakkında (On the Sphere and the Cylinder)**", "**Spiraller Hakkında (On Spiral Lines)**" ve "**Düzlemsel Şekillerin Dengesi Hakkında (On the Equilibrium of Planes)**" çalışmalarının metinlerini de içeriyor. Acaba 31.08.2002, 13:30'daki "**Önerme 3**"ün yeni bir yorumu, başta **Evangelos Venizelos** olmak üzere Yunanlı kardeşlerimizi biraz olsun teskin etmiş miydi? (Bkz. "**RİK 3/Yunanlılar Sok Geçiriyor!, S. 31**")

Bununla birlikte, yine Cumhurbaşkanımızın bahsetmediği **Giyasettin Cemşit**'e kadar kesirlerin ondalık açılımı bilinmiyordu (ki kendisi aynı zamanda **Arşimet**'in yöntemini kullanarak  $2\pi$ 'nin 60 tabanındaki 6; 16, 59, 28, 1, 34, 51, 46, 14, 50 ile, dolayısıyla  $\pi$ 'nin 8 atmışlığını ama 10 tabanında da 3.1415926535897932424236650917035 ile 16 ondalığı doğru olarak verdi. Diğer ilim adamlarımız ve çalışmaları hakkında bilgi almak için **Prof. Dr. Necmettin Erbakan**'ın "**İnsanlık Tarihinde İlimi Yapanlar Müslümanlardır, Batı Hiçbir İlim Kurmamıştır!**" konuşmasını izleyiniz), dolayısıyla söz konusu bu kesirlerin neye göre ve nasıl seçildiği bilinmiyordu. İşte şimdi bu kesirlerin nasıl seçilmiş olduğunu aşağıdaki 2 farklı analizimden görebilirsiniz.

**1. Analiz.** (2.39)'a göre (ki bunu ATA'nın baş harfiyle gösterelim, yani "A" ile kısaltalım) ilkin  $n = 1 = k$  için  $A_{m,0}(X) = X_m$  ve  $A_{2m,0}(X) = X_{2m}$  olduklarından,

$$(2.42) A_{m,1}(X) = \frac{4^m X_{2m} - X_m}{4^m - 1}$$

iterasyonunu elde ederiz ki bu, **Huygens**'in (2.23)'ünden farklıdır!

Şimdi bu iterasyonla (2.41)'deki kesirleri analiz edersek **Huygens**'e göre alt sınırlar için

$$(2.43) A_{1,1}(X) = \frac{4X_2 - X_1}{4 - 1} = \frac{4 \times \frac{96 \times 66}{2017\frac{1}{4}} - \frac{48 \times 66}{1009\frac{1}{6}}}{3} = 3 \frac{6911991}{48857795} = 3.141(471612)$$

ve üst sınırlar için

$$(2.44) A_{1,1}(Y) = \frac{4Y_2 - Y_1}{4 - 1} = \frac{4 \times \frac{96 \times 153}{4673\frac{1}{2}} - \frac{48 \times 153}{2334\frac{1}{4}}}{3} = 3 \frac{12366975}{87272939} = 3.141(704578)$$

elde edilirken,  $m = 2$  için alt sınırlar için

$$(2.45) A_{2,1}(X) = \frac{4^2 X_4 - X_2}{4^2 - 1} = \frac{16 \times \frac{96 \times 66}{2017\frac{1}{4}} - \frac{24 \times 240}{1838\frac{9}{11}}}{15} = 3 \frac{115450911}{816058315} = 3.141(473849)$$

ve üst sınırlar için

$$(2.46) A_{2,1}(Y) = \frac{4^2 Y_4 - Y_2}{4^2 - 1} = \frac{16 \times \frac{96 \times 153}{4673\frac{1}{2}} - \frac{24 \times 153}{1162\frac{1}{2}}}{15} = 3 \frac{5134773}{36219625} = 3.141(767702)$$

sonuçlarının elde edildiklerini yani **Huygens**'inkilerle hemen hemen aynı olduklarını görürüz. Oysa bu sonuçların gerçekte 6 ama **Arşimet**'in  $\sqrt{3}$  için vermiş olduğu kesirlere göre ise minimumda 4 ve maksimumda 5 ondalıkla doğru olması gerekiyordu! Yani bu sonuçlar, **RİK 2**'nin 10. sayfasındaki Tablo 2.2'deki sonuçları doğrudur!

**Not 2.1.** Bu parçada **Arşimet**'in "**Çember Ölçüsü Hakkında**" çalışmasındaki  $\pi$  için verilen kesirleri **RİK 2**'deki "**2.1.1.1. Eutokios'un Kesirleri Kurgu Muydu?**" adlı parçasına göre biraz daha esaslı analiz yaptım. Ama bu iş, **EK 1** ve **EK 3**'teki gibi adeta arkeolojik bir araştırmaya benzer. Bu nedenle "**EKLER**" bölümünde konunun tarihçesini geniş bir şekilde ele alarak saygı ziyaretlerinde bulundum!

**2. Analiz.** Romberg İntegrali'ne ilişkin ilk makalemde (02.11.2016, 22:44 (Oluşturma)-01.12.2016, 17:35 (Son Kaydetme) tarihli ve 850 KB'lık WORD dosyası) (2.41)'deki kesirlere (2.35)'i uyguladığımda,

$$(2.47) \begin{cases} S_{4,0}(T, K) = \frac{2^3(2^4 - 1)B_4E_{4,0}(T) - 2E_{4,0}(K)}{2^3(2^4 - 1)B_4 - 2} = \frac{2T_4 + K_4}{3} = 3.1415(48627 \dots), \\ S_{3,1}(T, K) = \frac{2^5(2^6 - 1)B_6E_{3,1}(T) - 3E_{3,1}(K)}{2^5(2^6 - 1)B_6 - 3} = \frac{64T_4 - 16T_3 + K_3 - 4K_4}{45} = 3.141(456080 \dots), \\ S_{2,2}(T, K) = \frac{2^7(2^8 - 1)B_8E_{2,2}(T) - 4E_{2,2}(K)}{2^7(2^8 - 1)B_8 - 4} = \frac{17408T_4 - 5440T_3 + 272T_2 + 64K_4 - 20K_3 + K_2}{12285} = 3.141(471727 \dots), \\ S_{1,3}(T, K) = \frac{2^9(2^{10} - 1)B_{10}E_{1,3}(T) - 5E_{1,3}(K)}{2^9(2^{10} - 1)B_{10} - 5} = \frac{32505856T_4 - 10665984T_3 + 666624T_2 - 7936T_1 - 4096K_4 + 1344K_3 - 84K_2 + K_1}{22495725} \\ = 3.141(4704961 \dots), \\ S_{0,4}(T, K) = \frac{2^{11}(2^{12} - 1)B_{12}E_{0,4}(T) - 6E_{0,4}(K)}{2^{11}(2^{12} - 1)B_{12} - 6} = \frac{1}{255765804525} [370977800192T_4 - 123176222720T_3 + 8083439616T_2 - 120289280T_1 \\ + 353792T_0 + 1048576K_4 - 348160K_3 + 22848K_2 - 340K_1 + K_0] = 3.141(4704369 \dots). \end{cases}$$

sonuçlarını görünce şoka girmiştim (Bkz. [Van Ceulen'in mezarındaki kitabesine yazılan \(4.16\)&\(4.17\)'deki değerlere](#)). Çünkü ilk sonuç Hollandalılar'ın öve öve bitiremedikleri 1621'de **Snellius**'tan geliyordu. Ama Hollandalıların kastettikleri sonuç buradaki değil, (4.3)'teki idi. Yani onlara göre **Snellius**, **Arşimet**'in  $\pi$  için en son verdiği 2 ondalığı doğru olan (2.41)'deki kırmızı renkli alt ve üst sınır kesirlerinden 4 ondalıklı mükemmel bir yaklaşıklık bulmuştu. Çünkü **Snellius**'un algoritması bu haliyle kuadratik yakınsama yapıyordu (ki bunda tabii ki kesirlerin payı büyüktü. Yani **Snellius**, kesirlerin azizliğinden yararlanıyordu). İşte Hollandalıların şaşıracağı şey de bu idi zaten. Sağolsun **Snellius** amca, algoritmasıyla bana çok yardımcı oldu. Örneğin, **Heron**'un **Arşimet**'e ithaf ettiği  $\pi$  için alt ve üst sınır kesirlerinde bir gariplik (anormali) olduğunu ilk kez yine onun algoritmasıyla anlamıştım (Bkz. (4.6)&(4.7)). İlkin bu garipliğin ne olduğuna ilişkin **Heiberg** ve **Tannery** gibi bazı tahminlerde bulundum ve sonra **Arşimet**'in böyle bir çalışma yapmış olmasının imkânsız olduğunu gösterdim (Bkz. "[RİK 3/4.7. HERON'un 'METRICA'sında  \$\pi\$  İçin Verilen Sınırlar Hakkındaki Araştırma Sonuçları](#)"). Ama bu sonuçla birlikte **Heron**'un  $\pi$  için verdiği kesirlerin nereden geldiğini çözmem uzun bir süre mümkün olmadı. Çünkü **Heron** bu kesirlerden başka bir şey söylemiyordu. Sonra (4.29)&(4.30)'a göre **Heron**'un kesirlerinin **Ptolemaeus**'un çalışmasından gelmiş olabileceği düşündüm (Bkz. "[RİK 3/4.6. PTOLEMAEUS'a Bir Saygı Ziyareti](#)"). Nihayet 3 yıl 3 gün sonra bu sırrı çözdüm (Bkz. "[RİK 3/EK 3: HERON'un 'METRICA'sında  \$\pi\$  İçin Verilen Sınırların Deşifasyonu Hakkında](#)"). Tabii bu arada **Ptolemaeus**'a da bir saygı ziyaretinde bulundum. Hem de ne saygı ziyareti! Eğer mezarı olsaydı orayı da ziyaret ederdim. **Snellius**, kalk oradan (bkz. "[Snellius'un Pieterskerk Kilisesi'nin zeminindeki mezarı](#)"), ben yatacağım! Kronokçi **Bronchorstius**'a göre **Snellius** hiçbir heyecan belirtisi göstermeden öldü. Bunun nedenini **Andreas Rivetus**'tan şöyle öğreniyoruz: "Ölümünden 2 saat önce Tanrı'nın kendisine vermiş olduğu kutsal bir görevi yapmak için üniversiteye (Leyden) gitmeye hazırlanıyordu. Sonra Tanrı'nın çağrısını boynunu bükerek kabul etti!", "[WILLEBRORD SNELLIUS \(1580-1626\) A Humanist Reshaping the Mathematical Sciences](#)", 2.10. *Death and Beyond*, S. 108.

Burada (2.47)'deki sonuçlara neden şaşırduğuma gelince, ilk sonuçta Snellius algoritmasıyla  $\pi$ 'nin 4 ondalığını doğru olarak görürken sonrakilerde 2002'de yaptığım gibi doğru basamak sayısı artacağına ilkinden daha kötü sonuçlar üretmeye başladı (Bkz. "[21.raf/Addednum\\_Files/AA.zip/AA.nb](#)")deki 2. sekmedeki Machin formülüne göre Snellius ekstrapolasyonunun ilk 10 iterasyonundan elde ettiğim sonuçlara). Bu, **Arşimet**'in alt ve üst sınır kesirlerinin birbirine eşlik etmemelerinden kaynaklanıyordu. Ama bu hesapta bir nokta net olarak dikkatimizi çeker: Tüm dikkatler (2.41)'deki kırmızı renkli son kesirlerde olduğu için bunlar hedeflenmiş ve bu yüzden son kesirler birbirine eşlik eder hale getirilmeye çalışılmış, bunun sonucunda da Snellius algoritmasıyla  $\pi$ 'nin 4 (ki gerçekte 6) ondalığını doğru görüyoruz!

Peki diğer alt ve üst sınır kesirler neden birbirlerine eşlik etmiyordu?

Bu soru 2002'de Önerme 3'teki hesaplara baktığım zaman da karşıma çıkmıştı. Bana göre 60 tabanından dönüştürülen üst sınır kesirlerin **Arşimet**'ten geldiği açıktır. O,  $\pi$  için  $3\frac{1}{7}$ 'yi hedefler ve bu hedefe ulaşmak kolay olduğundan gerçek kesirlere başvurmaz. Oysa aynı kolaylık alt sınır kesirlerine ulaşılmasında yok ve buradan  $\pi$  için hedeflenen  $3\frac{10}{71}$ 'e ulaşılmasında alt sınır kesirlerin üst sınır kesirlere göre daha iyi seçilme zorunluluğu ortaya çıkar. İşte bu yüzden **Eutokios**'un alt sınır kesirleri ile **Arşimet**'in üst sınır kesirleri  $\pi$ 'ye eş yaklaşımda bulunmazlar, dolayısıyla birbirlerine eşlik etmezler. Ama hesaplarıma göre eşlik etmeyen asıl kesirler, **Arşimet**'inkiler değil **Eutokios**'un kesirleridir. Çünkü **Eutokios** yanlış bir hedef seçmişti! Ama **Eutokios** doğru hedef seçmiş olsaydı bile, (2.41)'de üzerini çizgiyle gösterdiğim gerçek değerlere **Van Ceulen** ve **Snellius** gibi gerçek kesirlerle yaklaşımları gerekiyordu. Hele **Van Ceulen**, tam bir hesap makinesi gibiydi!

**2.3. Lineer Ekstrapolasyonlar Hakkında.** Bu makalede lineer ekstrapolasyonlardan 1 tane örnek verdim; 2 tane değil. Çünkü (2.2)'deki Richardson ekstrapolasyonu (2.39)'dan  $m = 1$  için elde edilir. İşin ilginç yanı şu ki ben, (2.39)'u en genel şekilde "[Romberg İntegrali 2016-2018](#)" adlı kitabıma yazdıktan çok sonra 2003'teki "[E-ATA 1 Algoritmaları](#)"na yeniden baktığım sırada farkettim. Yani en genel haldeki (2.39)'u asimptotik hatasıyla birlikte 2018'de yeniden keşfettiğimde 2003'teki keşfimdenden haberim yoktu ve onu "[E-ATA 1 Algoritmaları](#)"ndaki [Alıntı 2.3](#)'te tekrar görünce çok şaşırıldım!



Resim 2.3. Lewis Fry Richardson, 1 Ağustos 1913'te Eksdalemuir Gözlemevi'ne müfettiş olarak atandı.

## Romberg İntegrali Kronolojisi 4

Bir diğer ilginçlik şudur: Lineer ekstrapolasyonlara ait çalışmamın seyri **Lewis Fry Richardson**'un kiyle hemen hemen aynıdır. Çünkü **Richardson**, ilkin 1910'da

$$(2.48) \quad \phi(x, h) = f(x) + h^2 f_2(x) + h^4 f_4(x) + h^6 f_6(x) + \dots \text{ to infinity}$$

açılımına göre  $\lim_{h \rightarrow 0} \phi(x, h)$  ile  $f(x)$ 'e yaklaşım için bir teori ortaya atar ve 1927'de de söz konusu bu yaklaşım için

$$(2.49) \quad f(x) = \frac{h_2^2 \phi(x, h_1) - h_1^2 \phi(x, h_2)}{h_2^2 - h_1^2}$$

ekstrapolasyonunu tanımlar (Bkz. "[VIII. The Deferred Approach to the Limit: Part I. Single Lattice by Lewis Fry Richardson, Part II. Interpenetrating Lattices by Arthur Gaunt](#)"). O, bu ekstrapolasyona " **$h^2$ -ekstrapolasyonu**" ve aynı eliminasyonla  $f_4(x)$ 'ü de yok ettiği zaman elde ettiği ekstrapolasyona " **$h^4$ -ekstrapolasyonu**" adını verir. Ona göre işleme bu şekilde devam edildiği takdirde aşağıdaki (2.50)'deki  $h^{2k}$ -ekstrapolasyonu elde edilir. Sonrakiler **N. Bogolouboff** ve **N. Kryloff** adlı Rus matematikçilerinden hareketle buna "**Limite Gecikmeli (Kesikli) Yaklaşım (The Deferred Approach to the Limit)**" dediler. Buna göre (2.2)'nin (2.49)'un özel bir hali olduğunu ama günümüzdeki kullanım şeklinin de bu olduğunu görürüz. Dolayısıyla **Richardson**'un öncekilerden farkı, (2.2)'yi teorize etmiş olmasıdır!

Şu halde (2.2) için (2.39)'da  $m = 1$  alırsak,

$$(2.50) \quad R_{n,k}(X) = \frac{4^k R_{n+1,k-1}(X) - R_{n,k-1}(X)}{4^k - 1} + O(h_n^{2k+2})$$

şeklinde Richardson ekstrapolasyonunu bulmuş oluruz ve bunun tablosu şu şekildedir:

$X_0$	$R_{0,1}$	$R_{0,2}$	$R_{0,3}$	$R_{0,4}$
$X_1$	$R_{1,1}$	$R_{1,2}$	$R_{1,3}$	
$X_2$	$R_{2,1}$	$R_{2,2}$		
$X_3$	$R_{3,1}$			
$X_4$				
$\vdots$				

**Tablo 2.2.** (2.50)'ye göre yukarı sağ dik üçgen (Bkz. Romberg tabloları için "[Shanks, J. A.: Romberg Tables for Singular Integrands in: The Computer Journal 15 \(4\) \(1972\) S. 360](#)").

İkinci olarak (2.39)'da  $m = 2$  alırsak,

$$(2.51) \quad R_{2n,k}(X) = \frac{16^k R_{2n+2,k-1}(X) - R_{2n,k-1}(X)}{16^k - 1} + O(h_{2n}^{2k+2})$$

ekstrapolasyonunun tablosu ise şu şekilde ortaya çıkar:

$X_0$	$R_{0,1}$	$R_{0,2}$	$R_{0,3}$	$R_{0,4}$
$X_1$	$R_{1,1}$	$R_{1,2}$	$R_{1,3}$	
$X_2$	$R_{2,1}$	$R_{2,2}$		
$X_3$	$R_{3,1}$			
$X_4$	$R_{4,1}$			
$\vdots$				

**Tablo 2.3.** (2.51)'e göre yukarı sağ dik üçgen. İterasyon kırmızı renkli yaklaşıklıklar arasında yürür. Yani Tablo 2.2'de seri olarak yürütülen bu işlem, bu tabloda 2'şer 2'şer atlamayla gerçekleşir!

Şu halde bu tablolara göre **Romberg**'in (1.55)'teki örneğini ele alırsak  $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  için (2.39)'dan şu sonuçları elde ederiz:

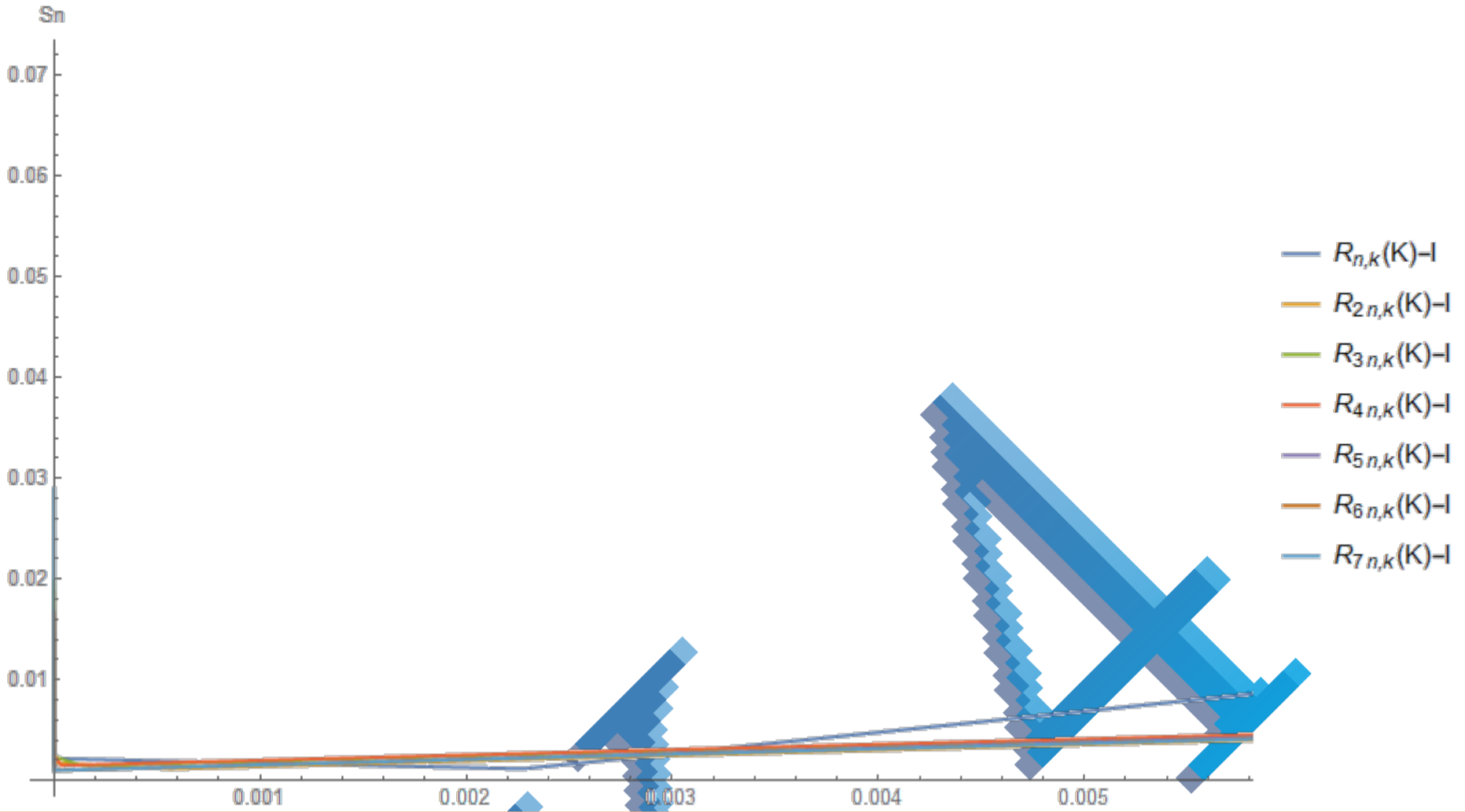
k	$R_{n,k}(K) - I$	$R_{2n,k}(K) - I$	$R_{3n,k}(K) - I$	$R_{4n,k}(K) - I$	$R_{5n,k}(K) - I$	$R_{6n,k}(K) - I$	$R_{7n,k}(K) - I$	...
0	-0.214602	-0.214602	-0.214602	-0.214602	-0.214602	-0.214602	-0.214602	...
	0.446705	0.11715	0.115438	0.114834	0.121413	0.116924	0.115518	...
1	0.00227988	0.000563643	0.000140521	0.000035106	$8.775 \times 10^{-6}$	$2.19365 \times 10^{-6}$	$5.48408 \times 10^{-7}$	...
	0.0011717	0.0011573	0.0014639	0.0015126	0.0010402	0.0010038	0.0010094	...
2	$-8.43453 \times 10^{-6}$	$-1.29787 \times 10^{-7}$	$-2.02159 \times 10^{-9}$	$-3.1564 \times 10^{-11}$	$-4.93098 \times 10^{-13}$	$-7.70431 \times 10^{-15}$	$-1.20378 \times 10^{-16}$	...
	0.0021712	0.001759	0.0023759	0.0025003	0.0020529	0.0018958	0.0018897	...
3	$8.14402 \times 10^{-9}$	$1.95591 \times 10^{-12}$	$4.76005 \times 10^{-16}$	$1.16126 \times 10^{-19}$	$2.83458 \times 10^{-23}$	$6.92003 \times 10^{-27}$	$1.68944 \times 10^{-30}$	...
	0.0037841	0.0038032	0.0040865	0.0036231	0.0038159	0.0041181	0.0044899	...
4	$-1.98305 \times 10^{-12}$	$-1.85987 \times 10^{-18}$	$-1.76808 \times 10^{-24}$	$-1.68491 \times 10^{-30}$	$-1.60656 \times 10^{-36}$	$-1.53206 \times 10^{-42}$	$-1.46107 \times 10^{-48}$	...
	0.0070982	0.0073374	0.0095728	0.0117015	0.0103091	0.0078986	0.0082515	...
5	$1.20958 \times 10^{-16}$	$1.10778 \times 10^{-25}$	$1.02842 \times 10^{-34}$	$9.57078 \times 10^{-44}$	$8.91185 \times 10^{-53}$	$8.29942 \times 10^{-62}$	$7.72935 \times 10^{-71}$	...
	0.0145	0.0187356	0.0197744	0.0161698	0.0167484	0.0166338	0.0289654	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

**Tablo 2.4.** İlk satırlardaki sonuçlar, (1.50)'ye göre  $n = 0$  ve  $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  için (2.39)'dan elde edilen çıktıları ve ikinci satırlardaki kırmızı renkli sonuçlar ise, bu çıktılarına erişilmesinde geçen süreyi  $S_n$  cinsinden gösterirler. Her bir sütundaki sonuçlar program yeniden başlatılarak elde edilmiştir, dolayısıyla ilk satırdaki sonuçlar ilk yüklenme nedeniyle sonraki satırlardakilerden daha fazla süre almıştır. Tüm bu hesaplamalar **MATHEMATICA 11**'de yapılmıştır!

Tablo gayet açıktır, yani (2.39)'daki kesme hatasından (büyük O sembolü içindeki farktan) Richardson ekstrapolasyonundan elde edilen ilk sütundaki sonuçlar ile diğer sütundakiler arasında bariz bir farkın olacağı açık idi. Bu durumda aklımıza şu soru geliyor: **Romberg**, 1955'te (2.50) ile tablonun ilk sütunundaki sonuçları elde ederken, (2.51) ile ikinci sütundaki sonuçları ve daha ötesinde diğer sütunlardaki sonuçları da vermesi olası mı idi? Kesinlikle evet! Yani (2.51)'in ve daha ötesinde (2.39)'un 1955'te de verilebiliyor olması, onlar için kötü şans ama bizim için iyi şanstır. Fakat **Romberg**'in, **Huygens**'in (2.23)'teki algoritmasını genelleştirerek (2.2)'yi diğerlerinden bağımsız olarak yeniden keşfetmesi, daha da ilginçtir! **Jean Luc Chabert**'e göre bu, 1951 basımlı kitaptaki "**6. sayfadaki (1.7) denklemi**"den gelir (Bkz. [Tablo 2.1](#)'in altında (\*) ile gösterilen dipnot için [452. sayfa](#)'daki (\*) olan 2 yere). Ama bendeki 1955 basımlı kitapta Sınır Değer Problemi'nin (bkz. "[Sayısal Yöntemler](#)"deki 8. bölüme) denklemi olan (1.7) [4. sayfanın başında](#) geçer. Yani **Romberg, Jean Luc Chabert**'e göre, (1.36)&(1.37)'yi (1.7) denkleminde çıkarttı!



Diğer taraftan Tablo 2.4'teki sonuçları grafikte değerlendirirsek, her bir sütundaki çıktıları Mathematica 11'de listeyerek ve bu listeleri de ListLinePlot ile grafiklediğimiz zaman şu şekilde karşılarız:



Şekil 2.2. Tablo 2.4'ün grafiklendirilmesi. Bunlardan en hızlısı, düşeyde 0'a en yakın olan grafikdir. Bu, grafiğin sağ tarafındaki etiketlerde açık mavi renkle gösterilen en altta olanıdır.



Bu şekilde Tablo 2.4'teki her bir sütundaki sonuçlar yatay eksende noktalar olarak ama ListLinePlot ile bu noktaların birbirine bağlanmasıyla kesikli doğrular ve düşeyde ise bu sonuçlara erişilmesinde geçen süre saniye cinsinden gösterilmiştir. Fakat bu sonuçlar hızla 0'a yakınsadıklarından her bir grafikte yalnızca 2 nokta ve diğerleri 0'a çok yakın olduklarından düşey eksende 0'a yığılmış olarak görülürler. İşte bu grafikler içinde mavi renkli  $R_{n,k}(K) - I$ 'nin grafiği diğerlerinin üzerinde, sanki üvey evlatmış gibi ayrı görünür. Bu,  $R_{n,k}(K) - I$ 'nin 0'a yakınsamasının diğerlerine göre zayıf olduğunu gösterir. Bununla birlikte,  $R_{2n,k}(K) - I$ ,  $R_{3n,k}(K) - I$ ,  $R_{4n,k}(K) - I$ ,  $R_{5n,k}(K) - I$ ,  $R_{6n,k}(K) - I$  ve  $R_{7n,k}(K) - I$ 'nin grafiklerinin tek bir doğruymuş gibi görünmesinin nedeni de (ki bunların 0'a yakınsama hızları arasındaki farkı, düşey eksende 0'a yakın 3. noktalardan kolaylıkla anlayabilirsiniz. Bunun için şekli yeterince büyütürseniz en alttaki yani 0'a en yakın olan grafiğin  $R_{7n,k}(K) - I$  olduğunu görürsünüz. Bu, Tablo 2.4'teki en hızlı ekstrapolasyondur), bunların 0'a yakınsamasının  $R_{n,k}(K) - I$ 'den daha iyi olduklarını gösterir. İşte bu sonuçla **Romberg**'in 1955'te kullandığı  $R_{n,k}(K)$ 'nin solda gördüğümüz gibi tarihin çöp sepetine tam anlamıyla atılmış olduğunu görüyoruz. Buna neden olan şey, 2003'te (2.39)'daki 2. genel ekstrapolasyon formülünü keşfetmemdir. Çünkü bu formülü ilkin 2018'de değil, [Alıntı 2.3](#)'teki (277)'de görüldüğü üzere 14.05.2003'te keşfetmişim!

Şimdi de (2.2) için **Richardson**'un (2.48)&(2.49)'daki teorik yaklaşımına karşılık ben de kendi ilk teorik yaklaşımımı vereyim!

**Teorem 2.1 (23.01.2017, 07:50:22).** Genel olarak 1. mertebeden ekstrapolasyon,  $q < p$  ( $p, q \in \mathbb{N}$ ) için

$$(2.52) \quad E_{\lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor, 1}(X) = \frac{4^{p-q}E_{p,0}(X) - E_{q,0}(X)}{4^{p-q} - 1}$$

dir. Bu, **Huygens**'in 1654'te keşfettiği (2.23)'ün en genel şeklidir!

**İspat.** (2.52)'yi **Saigey**'in çalışmasındaki gibi elde etmek istersek Euler-Maclaurin formülünü

$$(2.53) \quad E_1 = I + ax^2 + bx^4 + cx^6 + dx^8 + \dots$$

şeklinde gözönüne almamız gerekir (ki **Saigey**,  $I$  integrali yerine  $2\pi$ 'ye yakınsayan düzgün çokgen algoritmaları (düzgün çokgenlerin çevrelerine ilişkin algoritmalar) kullanmıştı. Bkz. "[The work of SAIGEY](#)"). Buna göre  $q < p$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$  için

$$(2.54) \quad \begin{cases} E_p = I + a\left(\frac{x}{2^{p-1}}\right)^2 + b\left(\frac{x}{2^{p-1}}\right)^4 + c\left(\frac{x}{2^{p-1}}\right)^6 + d\left(\frac{x}{2^{p-1}}\right)^8 + \dots = I + \frac{a}{4^{p-1}}x^2 + \frac{b}{4^{2p-2}}x^4 + \frac{c}{4^{3p-3}}x^6 + \frac{d}{4^{4p-4}}x^8 + \dots \\ E_q = I + a\left(\frac{x}{2^{q-1}}\right)^2 + b\left(\frac{x}{2^{q-1}}\right)^4 + c\left(\frac{x}{2^{q-1}}\right)^6 + d\left(\frac{x}{2^{q-1}}\right)^8 + \dots = I + \frac{a}{4^{q-1}}x^2 + \frac{b}{4^{2q-2}}x^4 + \frac{c}{4^{3q-3}}x^6 + \frac{d}{4^{4q-4}}x^8 + \dots \end{cases}$$

asimptotik açılımlarındaki  $x^2$ 'li terimleri yok etmek için ilkini  $4^{p-q}$  ile çarpmak ve bunu ikincisinden çıkartmamız gerekir!

Bu işlemin sonucunda

$$(2.55) \quad 4^{p-q}E_p - E_q = (4^{p-q} - 1)I - \frac{4^{0,p} - 4^{0,q}}{4^{0,p+1,q-1}}ax^2 - \frac{4^p - 4^q}{4^{p+2q-2}}bx^4 - \frac{4^{2p} - 4^{2q}}{4^{2p+3q-3}}cx^6 - \frac{4^{3p} - 4^{3q}}{4^{3p+4q-4}}dx^8 - \dots$$

eşitliğinden görüldüğü gibi  $x^2$ 'nin katsayısının 0 (sıfır) olduğunu görür ve bu durumda  $I$  için ilk yaklaşım algoritmasını,

## Romberg İntegrali Kronolojisi 4

$$(2.56) \quad I \cong \frac{4^{p-q}E_p - E_q}{4^{p-q} - 1}$$

olarak elde etmiş oluruz.

Şimdi bu yaklaşımda  $E_p =: E_{p,0}$  ve  $E_q =: E_{q,0}$  alır ve  $\Gamma$ 'yı  $E_{\lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor,1}$  olarak tanımlarsak,

$$(2.57) \quad E_{\lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor,1}(X) = \frac{4^{p-q}E_{p,0}(X) - E_{q,0}(X)}{4^{p-q} - 1}$$

şeklinde 1. mertebeden genel bir ekstrapolasyona ulaşmış oluruz. Burada  $\lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor$  tam kısmı “**Floor**” alınırsa tablodaki üçgen yukarıya doğru (bkz. Tablo 2.2-2.3), “**Ceiling**” alınırsa üçgen aşağıya doğru olur. Bunlardan ikincisi (ki ilkinde hiç denk gelmedim) yaygın olarak kullanılır ki bu,  $p = n + 1$  ve  $q = n$  için  $\lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor_{\text{Ceiling}} = \lfloor \frac{n+1+n}{2} \rfloor_{\text{Ceiling}} = \lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor_{\text{Ceiling}} = n + 1$  demektir (Ceiling: Tavan. Bkz. “*Romberg's Method*”). Fakat *Petrie* “*The Pyramids & Temples of Giza*” kitabında görüldüğü üzere genelde zeminde ölçüm aldığı için bizim de zeminde çalışmamız gerekir. Ancak ben zaten 2003'ten beri bu şekilde çalışıyordum!

**Sonuç 2.3.** Eğer  $E_{\lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor,1}$ 'in tam kısmından kurtulmak istersek (2.57)'de  $p \rightarrow 2p$  ve  $q \rightarrow 2q$  için

$$(2.58) \quad R_{p+q,1}(X) = \frac{4^{2(p-q)}R_{2p,0}(X) - R_{2q,0}(X)}{4^{2(p-q)} - 1}$$

sonucu bize bir fikir verebilir. Fakat (2.57)'nin genel şekli yani k. mertebeden ekstrapolasyon için

$$(2.59) \quad R_{\lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor_{\text{Floor}},k}(X) = \frac{4^{(p-q)k}R_{p,k-1}(X) - R_{q,k-1}(X)}{4^{(p-q)k} - 1}$$

formu kesin bir fikir verir. Çünkü  $p \rightarrow (n + 1)m$  ve  $q \rightarrow nm$  alırsak (2.39)'u elde eder ve bunun da ispatını aynı şekilde yaparız!

**Teorem 2.2 (23.01.2017, 07:50:22).** Genel olarak 2. mertebeden ekstrapolasyon,  $q < p$  ( $p, q \in \mathbb{N}$ ) için

$$(2.60) \quad \begin{cases} E_{\lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor,1}(X) = \frac{4^{p-q}E_{p,0}(X) - E_{q,0}(X)}{4^{p-q} - 1} \\ E_{\lfloor \frac{3p+q}{2} \rfloor,1}(X) = \frac{4^{p-q}E_{2p,0}(X) - E_{p+q,0}(X)}{4^{p-q} - 1} \end{cases}$$

indirgeme bağıntılarına göre

$$(2.61) \quad E_{\lfloor \frac{\lfloor \frac{3p+q}{2} \rfloor + \lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor}{2} \rfloor,2}(X) = \frac{4^{2p} \cdot E_{\lfloor \frac{3p+q}{2} \rfloor,1}(X) - E_{\lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor,1}(X)}{4^{2p} - 1}$$

dir.

**İspat.** Yine *Saigey*'in yöntemine göre  $q < p$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$  için (2.53)'ten

$$(2.62) \quad \begin{cases} E_p = I + \frac{a}{4^{p-1}}x^2 + \frac{b}{4^{2p-2}}x^4 + \frac{c}{4^{3p-3}}x^6 + \dots \\ E_q = I + \frac{a}{4^{q-1}}x^2 + \frac{b}{4^{2q-2}}x^4 + \frac{c}{4^{3q-3}}x^6 + \dots \\ E_{p+q} = I + \frac{a}{4^{p+q-1}}x^2 + \frac{b}{4^{2(p+q)-2}}x^4 + \frac{c}{4^{3(p+q)-3}}x^6 + \dots \end{cases}$$

asimptotik açılımlarına göre

$$(2.63) \quad 4^{p-q}E_{2p} - E_{p+q} = (4^{p-q} - 1)I - \frac{4^p - 4^q}{4^{3p+2q-2}}bx^4 - \frac{4^{2p} - 4^{2q}}{4^{5p+3q-3}}cx^6 - \dots$$

eşitliğinden

$$(2.64) \quad I \cong \frac{4^{p-q}E_{2p} - E_{p+q}}{4^{p-q} - 1}$$

olarak (2.56)'daki gibi bir ilk ekstrapolasyon elde etmiş oluruz.

Şimdi bu yaklaşımda  $E_{p+q} =: E_{p+q,0}$  ve  $E_{2p} =: E_{2p,0}$  başlangıç değerlerine göre  $\Gamma$ 'yı  $E_{\lfloor \frac{3p+q}{2} \rfloor,1}$  şeklinde tanımlarsak,

$$(2.65) \quad E_{\lfloor \frac{3p+q}{2} \rfloor,1}(X) \cong \frac{4^{p-q}E_{2p,0}(X) - E_{p+q,0}(X)}{4^{p-q} - 1}$$

şeklinde 1. mertebeden bir ikinci genel ekstrapolasyona ulaşmış oluruz.

## Romberg İntegrali Kronolojim 4

İkinci olarak (2.55) ve (2.63)'ün lineer kombinasyonunda  $x^4$ 'ün katsayısını 0 yapmak istersek,

$$(2.66) \quad 4^{2p}(4^{p-q}E_{2p} - E_{p+q}) - (4^{p-q}E_p - E_q) = (4^{p-q} - 1)(4^{2p} - 1)I + \frac{(4^p - 1)(4^{2p-2q} - 1)}{4^{3p+q-3}}cx^6 + \dots$$

olduğunu görür ve buradan I için 2. mertebeden ekstrapolasyonu p ve q indislerine bağlı olarak şu şekilde bulmuş oluruz:

$$(2.67) \quad I \cong \frac{4^{2p} \cdot \frac{4^{p-q}E_{2p} - E_{p+q}}{4^{p-q} - 1} - \frac{4^{p-q}E_p - E_q}{4^{p-q} - 1}}{4^{2p} - 1}.$$

Şu halde bunu (2.52)'deki gibi tam olarak ifade edersek;

$$(2.68) \quad \begin{cases} E_{\lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor, 1}(X) = \frac{4^{p-q}E_{p,0}(X) - E_{q,0}(X)}{4^{p-q} - 1} \\ E_{\lfloor \frac{3p+q}{2} \rfloor, 1}(X) = \frac{4^{p-q}E_{2p,0}(X) - E_{p+q,0}(X)}{4^{p-q} - 1} \end{cases}$$

indirgeme bağıntılarına göre 2. mertebeden p ve q indislerine göre şu genel ekstrapolasyonu elde etmiş oluruz:

$$(2.69) \quad E_{\lfloor \frac{\lfloor \frac{3p+q}{2} \rfloor + \lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor}{2} \rfloor, 2}(X) = \frac{4^{2p} \cdot E_{\lfloor \frac{3p+q}{2} \rfloor, 1}(X) - E_{\lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor, 1}(X)}{4^{2p} - 1}.$$

**Sonuç 2.4.** Teorem 2.2'ye verilebilecek ilk örnek şudur:  $p = n + 1$  ve  $q = n$  için (2.68)'e göre 1. mertebeden ekstrapolasyonlar

$$(2.70) \quad \begin{cases} E_{n,1}(X) = \frac{4E_{n+1,0}(X) - E_{n,0}(X)}{3} \\ E_{2n+1,1}(X) = \frac{4E_{2n+2,0}(X) - E_{2n+1,0}(X)}{3} \end{cases}$$

olmak üzere (2.69)'dan 2. mertebeden şu ekstrapolasyon geçerli olur:

$$(2.71) \quad E_{n,2}(X) = \frac{4^{2n+2}E_{2n+1,1}(X) - E_{n,1}(X)}{4^{2n+2} - 1}.$$

Yine (2.68)&(2.69)'daki ekstrapolasyonların tam sayılı indisleri için  $p \rightarrow 2p$  ve  $q \rightarrow 2q$  alırsak,

$$(2.72) \quad \begin{cases} R_{p+q,1}(X) = \frac{4^{2p-2q}R_{2p,0}(X) - R_{2q,0}(X)}{4^{p-q} - 1}, \\ R_{3p+q,1}(X) = \frac{4^{2p-2q}R_{4p,0}(X) - R_{2p+2q,0}(X)}{4^{p-q} - 1} \end{cases}$$

indirgeme bağıntılarına göre 2. mertebeden şu genel ekstrapolasyonu elde ederiz:

$$(2.73) \quad R_{2p+q,2}(X) = \frac{4^{4p}R_{3p+q,1}(X) - R_{p+q,1}(X)}{4^{4p} - 1}.$$

İşte bu teoremlerden sonra Romberg Metodu'nda asıl sıçramayı **E-ATA M Algoritmaları**'na bir giriş olan aşağıdaki ekstrapolasyonlarda yaptım!

**2.4. Yüksek Mertebeden Ekstrapolasyonlar Hakkında.** Seyir defterime göre lineer ekstrapolasyonlardan (2.39)'u ilk kez 02.01.2017, 23:34 (Oluşturma)-22.01.2017, 22:26 (Son Değiştirme) tarihli ve 3.25 MB'lık çalışma dosyamda **Arşimet-Eutokios**'un kesirleri için kullandım. Çünkü ilk makalemde bu kesirleri analiz ederken [bir anomali](#) dikkatimi çekmiş ve orada (2.39)'un "**ATA 1-1-3 Algoritmaları**"ndan geldiğini söylemişim. Fakat (2.39)'u 13.05.2003, 23:14'ten 26.07.2019, 11:34'e kadar Romberg Metodu'nda hiç kullanmadım. Çünkü web sitemdeki (2.39)'a ait "[Lineer Dışkestirim 1](#)"deki programların hepsini şu tarihlerde Mathematica'da çıkartmış ve bunları çalışır halde [RİK 3](#) için web sunucuma koymuştum:

	E-ATA1-2.1.nb	27.07.2019 15:04	Wolfram Notebook	50 KB
	E-ATA1-2.2.nb	27.07.2019 17:00	Wolfram Notebook	57 KB
	E-ATA-YM-1.nb	29.07.2019 20:23	Wolfram Notebook	80 KB
	RichardsonExtrapolationAppliedTwice...	26.07.2019 09:38	Computable Docu...	99 KB
	Romberg-1.nb	26.07.2019 14:37	Wolfram Notebook	65 KB
	Romberg-2.nb	26.07.2019 11:16	Wolfram Notebook	30 KB
	Romberg-3.nb	26.07.2019 11:34	Wolfram Notebook	31 KB

**Tablo 2.5.** (2.39)'a ait ekstrapolasyonların Mathematica'da yazıldığı ilk dosyalar.

	E-ATA1-2.2.cdf.rar	22.01.2020 12:53	WinRAR arşivi	16 KB
	E-ATA1-2.2.nb.rar	21.01.2020 14:17	WinRAR arşivi	17 KB
	E-ATA1-2.3.cdf.rar	22.01.2020 12:52	WinRAR arşivi	16 KB
	E-ATA1-2.3.nb.rar	21.01.2020 14:17	WinRAR arşivi	17 KB
	E-ATA1-2.m.nb.rar	21.01.2020 14:17	WinRAR arşivi	20 KB
	RIM1.nb.rar	21.01.2020 14:19	WinRAR arşivi	20 KB
	RIM2.cdf.rar	22.01.2020 12:54	WinRAR arşivi	16 KB
	RIM2.nb.rar	21.01.2020 14:19	WinRAR arşivi	11 KB
	RIM3.cdf.rar	22.01.2020 12:54	WinRAR arşivi	16 KB
	RIM3.nb.rar	21.01.2020 14:17	WinRAR arşivi	12 KB

**Tablo 2.6.** Tablo 2.5'teki dosyaların web sunucumdaki son şekli. Bkz. "[RİK 3/3.1. Mathematica Programları](#)", S. 35-37.

Ancak Romberg Metodu'na ilk ciddi bakışım aşağıdaki keşifle oldu. Çünkü bu keşfi yapmasaydım muhtemelen bu çalışmayı da diğer çalışmalarımda olduğu gibi bir kenara bırakacaktım. Ama iyi ki bu keşfi yapmışım ve 2017 yazında Romberg Metodu için hiçbir kaynakta göremeyeceğiniz harika çalışmalarda bulundum (ki bunları bir sonraki çalışmam RİK 5'te göreceksiniz). Bu arada Romberg Metodu için çalışmalarımı kronoloji halinde vermemden rahatsız olanlar olabilir. Ama James Bond serisinin "[Başka Gün Öl \(Die Another Day\)](#)" filminin 1:31:21'inde **Gustav Graves**'in (Albay **Tan-Sun Moon**) "*Avın heyecanı takiptedir! (The pleasure of the kill is in the chase)*" dediği gibi "*Keşfin heyecanı takiptedir!*" olduğuna inanıyorum. Çünkü beni başarıya götüren şey bu idi!

2.4.1.  $p^2$ -inci Mertebeden Ekstrapolasyon (Prototip). Genel olarak  $k, m, p \in \mathbb{Z}^+$  ( $1 < p$ ) için

$$(2.74) \quad A_{\binom{p+1}{2} \left[ \binom{p}{1} + \binom{p}{2} \right]^{k-1} m, k} (X) = \frac{4^{(p^{2k}-p^k)m} A_{p^2 \left[ \binom{p}{1} + \binom{p}{2} \right]^{k-1} m, k-1} (X) - A_{p \left[ \binom{p}{1} + \binom{p}{2} \right]^{k-1} m, k-1} (X)}{4^{(p^{2k}-p^k)m} - 1}$$

ya da kısaltılmış şekli olarak,

$$(2.75) \quad A_{\binom{p+1}{2}^k m, k} (X) = \frac{16^{\binom{p^k}{2} m} A_{p^2 \binom{p+1}{2}^{k-1} m, k-1} (X) - A_{p \binom{p+1}{2}^{k-1} m, k-1} (X)}{16^{\binom{p^k}{2} m} - 1}$$

ekstrapolasyonu mevcuttur (19.02.2017, 03:09:48). Burada her bir iterasyondaki ardışık 2 terimin oranlarının  $k \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$  ya da  $k, m \rightarrow \infty$  için limitleri

$$(2.76) \quad \begin{cases} \frac{A_{\binom{p+1}{2}^k m, k} (X)}{A_{\binom{p+1}{2}^{k-1} m, k-1} (X)} \xrightarrow{k, m \rightarrow \infty} p^2, \\ \frac{A_{p^2 \binom{p+1}{2}^k m, k} (X)}{A_{p^2 \binom{p+1}{2}^{k-1} m, k-1} (X)} \xrightarrow{k, m \rightarrow \infty} p^2, \\ \frac{A_{p \binom{p+1}{2}^k m, k} (X)}{A_{p \binom{p+1}{2}^{k-1} m, k-1} (X)} \xrightarrow{k, m \rightarrow \infty} p^2 \end{cases}$$

dir. Yani bu sonuçlar, (2.75)'teki her bir iterasyonun  $\Gamma$ 'ya  $p^2$ -inci mertebeden yaklaştığını gösterir. Fakat (2.50)'deki Richardson ekstrapolasyonu ilkin Şekil 2.2'den görüldüğü gibi (2.39) ile tarihin çöp sepetine atılırken, ikinci olarak bu yeni ekstrapolasyonlarla bu sefer tam anlamıyla yani bir daha çıkmamacasına tarihin çöplüğüne gömülmüştür. Vatanımıza ve milletimize hayırlı, uğurlu olsun! Neden? Çünkü Richardson ekstrapolasyonu  $\Gamma$ 'nin basamakları lineer olarak toplanırken, bu yeni ekstrapolasyonda  $p^2$ -inci mertebeden toplanmaktadır. Böylece 1654'te **Huygens** ile başlayan ve **Takebe** (1710. Muhtemelen 1695'ten önce), **Saigey** (1856, 1859), **Guerin**, **Richardson** (1910, 1927), **Romberg** (1955), **Laurent** (1963) ile devam eden bu macera sona ermiş oldu (Y.N. Bu listede mutlaka atladıklarım olmuştur. Örneğin **Takebe**'ye ilk kez 22.05.2002, 23:29:51 tarihli "[Arktanjant Fonksiyonu'nun İlk Gerçek Formülü ile Pi Sayısının Hesabı Ver. 3](#)" çalışmamın 62. sayfasındaki  $\pi$ 'nin kronolojisinde yer vermiştim (ki **Takebe**'nin algoritmasının **Naoki Osada** tarafından verilen modern bir sunumu için "[7.1. The birth of the Richardson extrapolation](#)" parçasına bakabilirsiniz) ama onun orijinal çalışmasına ilişkin bir kaynağa ilk kez 22.06.2018, 19:09'da "[The early history of convergence acceleration methods](#)" adlı makalesinde ulaştım. Eğer linki tıklarsanız ne demek istediğim daha iyi anlaşılır. Hayır, **Naoki Osada**'ya, literatüründeki bu dosyanın önceleri zırt pırt yer değiştirmesine ve şimdi tanıtım olarak birkaç sayfa sunmasına da kızmıyorum; onların İmparator **Meiji** ile başlayan ve korona virüsten bin beter Batılılaşma hastalığına tutulmalarına kızmıyorum (Y.N. İnternette ararsanız da bulamayacağınız bu makaleyi şimdi sitemde bulabilirsiniz. Böylece **Seji Fujino**'nun **Romberg** ile neden röportaj yaptığı anlaşılabilir). Çin'de de durum bundan farklı değil. Onlar da bazı gelenek ve göreneklerini artık terk etmeye başlamışlar. Bkz. "[Önce Çin fenerleri kayboldu...](#)". Te Han Hanedanlığı'ndan kalma [ejderha dansı](#) da yasaklanmış, iyi mi! Bkz. "[Çin de ejderhan dansi' yasağı isyan çıkardı](#)". **Chan**, orada neler oluyor öyle? Biz senin atalarını andığın bu filmlerle büyüdük. Bkz. "[Genç Usta](#)"daki "[Fut San \(Aslan Dansı\)](#)"na).

2.4.1.1. **Kuartik Ekstrapolasyon**. Söz konusu (2.74) ya da (2.75) formülü için ilkin (2.59)'a benzer

$$(2.77) \quad A_{3^k m, k} (X) = \frac{4^{(2^{2k}-2^k)m} A_{(3^k+3^{k-1})m, k-1} (X) - A_{(3^k-3^{k-1})m, k-1} (X)}{4^{(2^{2k}-2^k)m} - 1}$$

kuartik iterasyonunu keşfetmiştim (18.02.2017, 00:30:25). Çünkü 4'ün kuvvetini (2.59)'daki gibi yazdığım zaman, iterasyonun yakınsaklık hızı istikrarlı değildi. Dolayısıyla iterasyonun Zyklon B gazı gibi en etkin olduğu (ki soldaki [Giftgas](#)'ın Zyklon B'nin metal kutusunun [çok güzel eksiksiz ve bozulmamış mükemmel bir örneği](#)dir), pardon yakınsaklık hızının en iyi olduğu 4'ün kuvvetlerini araştırdım ve şu tabloyla karşılaştım:

$$\begin{aligned} A_{3m,1}(X) &= \frac{4^{2m} A_{4m,0}(X) - A_{2m,0}(X)}{4^{2m} - 1} \\ A_{9m,2}(X) &= \frac{4^{12m} A_{12m,1}(X) - A_{6m,1}(X)}{4^{12m} - 1} \\ A_{27m,3}(X) &= \frac{4^{56m} A_{36m,2}(X) - A_{18m,2}(X)}{4^{56m} - 1} \\ A_{81m,4}(X) &= \frac{4^{240m} A_{108m,3}(X) - A_{54m,3}(X)}{4^{240m} - 1} \\ A_{243m,5}(X) &= \frac{4^{992m} A_{324m,4}(X) - A_{162m,4}(X)}{4^{992m} - 1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tablo 2.7. (2.77)'nin açılımı.

Çok ilginçtir, tablodaki ilk iki iterasyon (2.39)'a haiz iken sonrakiler bu kurala uymaz. Neden? İşte tam bu noktada ben de **Saigey**'de olduğu gibi içinden çıkılmaz bir duruma düşmüştüm (ki **Saigey**, (2.1) iterasyonunun ilk 3'ünü verirken sonrakileri verememişti). Ama sonra aşağıdaki Tablo 2.8'de görüldüğü üzere bunu düzelterek (2.77) formülasyonuna ulaşmayı başardım. Bu formülasyonu şöyle buldum: "56'yı genel yöntemle değil yani (2.59) formuna göre değil, kuvvet araştırması sırasında gördüm ve onu seçerek ilkin (2.77)'yi bu yeni



kuvvetlere göre yazdım. Sonra (2.77)'den başarılı sonuçlar gelince, (2.77)'den hareketle (2.78)'i yazdım ve ondan da başarılı sonuçlar gelince bunları (2.74)'te genelleştirdim. Neden bu kadar çok sevdiğime gelince, Tablo 2.7'nin 3. satırındaki 4'ün kuvvetini 54 yerine 56 almam ve diğer kuvvetleri öncekilere bakarak yazmamla oluşan (2.77) formülasyonu tamamen deneysel idi. Ama bu anomaliyi açıklamam gerekiyordu!"

Yani bu keşif **Karl Fritsch**'inkinden farklı değildi ve o, Zyklon B'nin en etkin (maksimum aktifleşme) olduğu ortamın, tamamen kapalı bir ortam (yeraltı odaları) olduğunu fark etmişti (ki zaman zaman bizler de aşırı sigara içilen ortamlarda aynı duruma maruz kalır, hatta duman altında kalıp boğulduğumuz olur). İnsanların kitlesel olarak yok edilmesi konusunda Zyklon B gazını kullanmak tamamen **Rudolf Hess**'in fikriydi ama o, bu gazın mucidi olarak Auschwitz'in Komutanı **Karl Fritsch** olduğunu söyler. Yazılarında, "Kesinlikle hızlı ve mutlak bir ölümü garanti ediyor. Özellikle hava püskürtmeli odalarda kuru bir şekilde uygulanması önerilir!" diye belirtir (Bkz. "[Kavgam Belgeseli, 1:31:19-1:31:37](#)").

Diğer taraftan burada şuna dikkat etmek gerekir: (2.77)'de aslında m yerine m<sub>k</sub> yazmam ve indirgemeleri m<sub>k</sub> üzerinden yapmam gerekiyordu. Bu, makineler için şarttır; ama elle yapıldığı zaman buna gerek yoktur. Yani Tablo 2.7'de yer alan A<sub>9m,2</sub>'deki A<sub>6m,1</sub> için A<sub>3m,1</sub>'de m → 2m ve A<sub>12m,1</sub> için A<sub>3m,1</sub>'de m → 4m almak ve A<sub>27m,2</sub>, A<sub>81m,2</sub>, A<sub>243m,2</sub>, ...'de de aynı işlemin yapılması gerekir. Kaldı ki bu işlem (2.77), (2.78) ve genelde (2.74) (ya da (2.75))'te de geçerlidir!

Örneğin Tablo 2.1'deki **Romberg**'in integraline ait (2.77) ya da Tablo 2.7'de açıkça verilen iterasyonlardan şu sonuçlar elde edilir (ki bu sonuçları lineer bir ekstrapolasyonla toplamak çok zaman alır. Bkz. (2.39)):

(m, k)	A <sub>(3<sup>k</sup>-3<sup>k-1</sup>)m,k-1</sub> - I	A <sub>(3<sup>k</sup>+3<sup>k-1</sup>)m,k-1</sub> - I	A <sub>3<sup>k</sup>m,k</sub> (X) - I
(1,1)	-0.01288	-0.00080	2.07245 × 10 <sup>-6</sup>
(1,2)	5.04112 × 10 <sup>-10</sup>	3.00405 × 10 <sup>-17</sup>	-6.89545 × 10 <sup>-21</sup>
(1,3)	-9.56706 × 10 <sup>-38</sup>	-1.84255 × 10 <sup>-71</sup>	2.76382 × 10 <sup>-70</sup>
(1,4)	1.74277 × 10 <sup>-136</sup>	6.16218 × 10 <sup>-269</sup>	-1.56522 × 10 <sup>-266</sup>
(1,5)	-5.0097 × 10 <sup>-529</sup>	-5.05257 × 10 <sup>-1054</sup>	1.07453 × 10 <sup>-1016</sup>
⋮	⋮	⋮	⋮

**Tablo 2.8.** İlk satırlardaki kırmızı renkli sonuçlar, (2.77)'nin (2.59) lineer formuna göre yazılmasıyla ve ikinci satırdaki sonuçlar ise, (2.77)'den elde edilen sonuçlardır.

Çok ilginçtir, Romberg Metodu'nun programını (7) **MATHEMATICA**'da yazıp I'nın sonuçlarını bir tablo halinde görüntülemeye çalıştığım zaman, **MATHEMATICA** bana, tüm ayarları en yükseğe çıkarmama rağmen 5. adımdan sonrasını gösteremedi! Bilgisayarınız ne kadar güçlü olursa olsun bu olur. Çünkü bilgisayar iç içe geçmiş (2.50)'deki iterasyonları işletirken belli bir adımda boğulur. Yani bu, kaçınılmaz bir sonuçtur!

**2.4.1.2. Nonik Ekstrapolasyon. Firavunlar Aşkınaaaa...** (2.77)'deki kuartik iterasyonu keşfetmemin hemen ardından şu iterasyonu yazdım (18.02.2017, 00:30:30):

$$(2.78) \quad A_{6^k m, k}(X) = \frac{4^{(3^{2k}-3^k)m} A_{(3^2 \cdot 6^{k-1})m, k-1}(X) - A_{(3 \cdot 6^{k-1})m, k-1}(X)}{4^{(3^{2k}-3^k)m} - 1}$$

İnanılır gibi değil, ben, bu ekstrapolasyonu aşağıdaki 7. dipnotta sözüme ettiğim "**Romberg Metodu.nb**" dosyasında (2.77)'yi yazdıktan sonra ona baka baka kopyalarken şöyle düşünmüştüm: "Genel olarak (2.59)'a göre (2.74)'te u = p<sup>2</sup>m ve v = pm için 4'ün kuvvetinin u - v = p<sup>2</sup>m - pm = (p<sup>2</sup> - p)m ve ekstrapolasyonun genel teriminin indisinin  $\left\lfloor \frac{u+v}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p^2 m + pm}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(p^2+p)m}{2} \right\rfloor$  olduğu açıktır. Peki, burada bize ne lazım? Bu indisin de bir tamsayı olması gerekiyordu, değil mi? İşte bu sorunu  $\left[ \binom{p}{1} + \binom{p}{2} \right]^{k-1} = \binom{p+1}{2}^{k-1}$  çarpanıyla aştım. Çünkü A'ların indislerindeki u ve v'yi bununla genişletirseniz, eşitliğin sağ tarafındaki A'ların indisleri zaten birer tamsayı idiler ve bu genişletme sonrasında da tamsayı oldular. Ama bu sefer eşitliğin sol tarafındaki A'nın indisi de bir tam sayıdır:  $\left\lfloor \frac{u+v}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(p^2+p) \binom{p+1}{2}^{k-1} m}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \binom{p+1}{2} \binom{p+1}{2}^{k-1} m \right\rfloor = \left\lfloor \binom{p+1}{2}^k m \right\rfloor = \binom{p+1}{2}^k m$ . Bu nedenle ilkin p = 2 için (2.77)'yi buna göre yazdıktan sonra hemen ardından p = 3 için (2.78)'i yazdım. Ve işte, (2.77), (2.78) ve bunların genelleştirilmiş şekli olan (2.74) ve bunun da toplanmış şekli olan (2.75) ilk keşfettiğim şekliyle yukarıda duruyorlar!"

Burada (2.78)'in açılımı aşağıdaki tablolardan soldakininde olup, bunlar Tablo 2.1'deki I integraline ait sağdaki sonuçları üretirler:

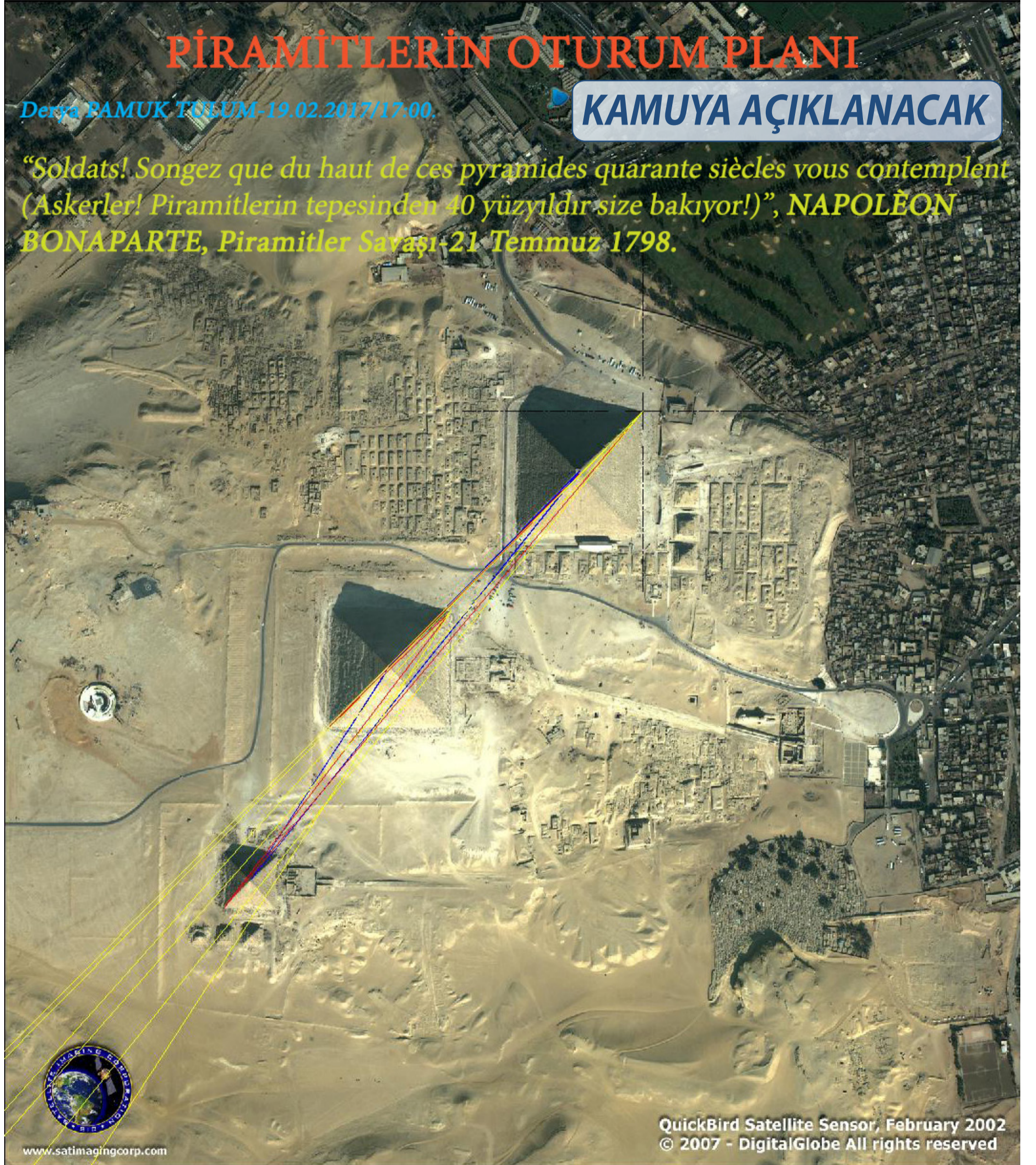
k	A <sub>6<sup>k</sup>m,k</sub> (X)	(m, k)	A <sub>(3·6<sup>k-1</sup>)m,k-1</sub> - I	A <sub>(3<sup>2</sup>·6<sup>k-1</sup>)m,k-1</sub> - I	A <sub>6<sup>k</sup>m,k</sub> - I
1	A <sub>6m,1</sub> (X) = $\frac{4^{6m} A_{9m,0}(X) - A_{3m,0}(X)}{4^{6m} - 1}$	(1,1)	-0.00322	-7.84366 × 10 <sup>-7</sup>	5.04459 × 10 <sup>-10</sup>
2	A <sub>36m,2</sub> (X) = $\frac{4^{72m} A_{54m,1}(X) - A_{18m,1}(X)}{4^{72m} - 1}$	(1,2)	1.79055 × 10 <sup>-24</sup>	8.02912 × 10 <sup>-68</sup>	-1.79936 × 10 <sup>-74</sup>
3	A <sub>216m,3</sub> (X) = $\frac{4^{702m} A_{324m,2}(X) - A_{108m,2}(X)}{4^{702m} - 1}$	(1,3)	-2.36092 × 10 <sup>-215</sup>	-5.33294 × 10 <sup>-638</sup>	1.82611 × 10 <sup>-655</sup>
4	A <sub>1296m,4</sub> (X) = $\frac{4^{6480m} A_{1944m,3}(X) - A_{648m,3}(X)}{4^{6480m} - 1}$	(1,4)	6.48553 × 10 <sup>-1956</sup>	2.90537 × 10 <sup>-5857</sup>	-3.09661 × 10 <sup>-5907</sup>
5	A <sub>7776m,5</sub> (X) = $\frac{4^{58806m} A_{11664m,4}(X) - A_{3888m,4}(X)}{4^{58806m} - 1}$	(1,5)	-8.14586 × 10 <sup>-17709</sup>	-1.48281 × 10 <sup>-53113</sup>	4.63515 × 10 <sup>-53261</sup>
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

**Tablo 2.9.** (2.78)'in açılımı.

**Tablo 2.10.** (2.78) ile noniksel (9. mertebeden) yaklaşımlar.

(7) Bu program [Mathematica Resources](#)'da yoktu (ki 26.07.2019, 09:38:43'te **Wolfram Demonstrations Project**'ten öğrendiğime göre sadece demosu vardı. Bkz. "[RİK 3/53. Mathematica Programları ve Demoları/3.1. Mathematica Programları/Madde 1](#)"). Ben de bunun üzerine "[Chapter 6: Numerical Integration/6.3.2. Algorithm](#)"daki (ki orijinalde "[Chapter 6: Numerical Integration/6.3.2. Algorithm](#)"de idi) programı Mathematica'da "**Romberg Metodu**" adlı bir notebooka yazdım, 18.02.2017, 01:31.

**Not 2.2.** p<sup>2</sup>-inci mertebeden ekstrapolasyonları nasıl keşfettiğimi tarih, zaman ve yer göstererek yukarıda anlattım. Bundan sonraki gelişmeler şöyle oldu: (2.77) ve (2.78)'i uygulamalarıyla birlikte **Romberg Metodu.nb** dosyasına yazdıktan sonra **Sonuç** bölümüne bunların genel şekli olan (2.74)'ü ve onun da indislerinin toplanmış şekli olan (2.75)'i yazıp Mathematica dosyasını kapattım (ki daha sonra bilgisayarıma format attığımdan bu dosyayı almayı unutmuşum. Yani orijinal keşiflerimin olduğu bu dosya şimdi kayıptır ama ondan aldığım sonuçları yukarıda verdim). Fakat ben, bunları yazdıktan yaklaşık 14 saat sonra **Petrie'nin Üçgenleştirme Metodu**'na göre Giza Piramitleri'nin köşeleri ve merkezlerinin koordinatlarından (bkz. "[Chap. 13. Positions and Orientation of the Pyramids](#)". Detaylı bilgi için "[Chap. 5. Coordinates](#)" bölümüne bakınız) [Giza Piramitleri Oturum Planı](#)'nı keşfettim <sup>(8)</sup>:



**Resim 2.4.** *Bauval*'a göre Giza piramitlerinin bu şekildeki oturumu, Orion kuşağındaki Alnitak, Alnilam ve Mintaka'nın dizilimini gösterir (Bkz. "[Tanrıların Evi Orion'da \(The Orion Mystery\)](#)"). Çok ilginçtir, *Neil Armstrong*, Ay yüzeyindeyken gökyüzünde Güneş ve Dünya'dan başka bir şey göremediğini söylemişti (Bkz. "[Neil Armstrong'un BBC ile röportajı, 1970](#)"). Fakat Orion o sırada [tam yükselişte](#) idi ve [sol kolu Dünya'ya gösteriyordu](#) (Y.N. Bu fotoğrafları Starry Night Pro Plus V. 8.1.0.2050 programında Kartal (Eagle)'ın tam iniş saatinde (20.07.1969, 20:17:40 UTC) çektim. Siz artık *Armstrong*'un Ay yüzeyine indiği ve [APOLLO 11](#)'deki fotoğrafları ona göre yorumlarsınız).

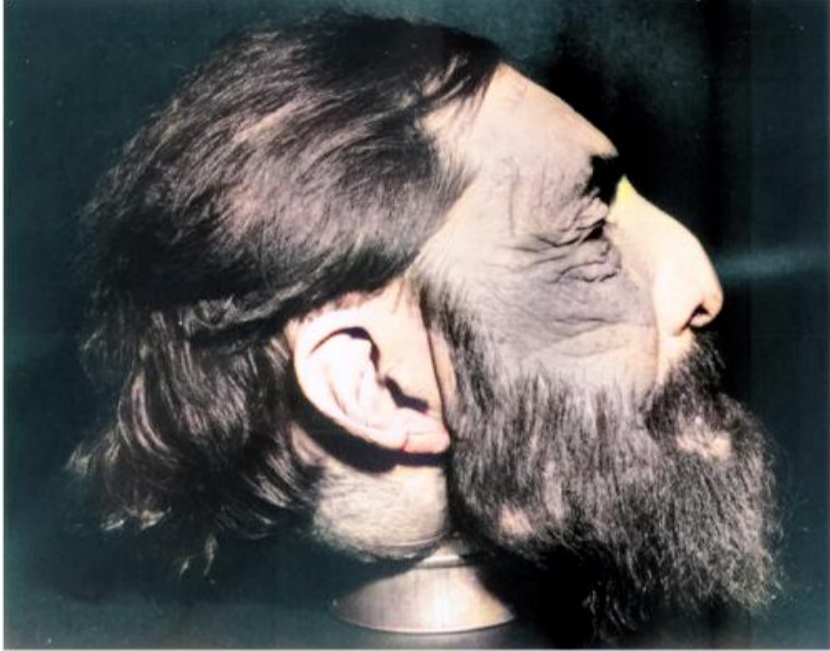
<sup>(8)</sup> İnanılır gibi değil, aynı günün saat 17:00'sinde de *Petrie*'nin verilerine göre Snelliusvari şekilde Giza Piramitleri'nin Oturum Planı'nı keşfettim. Her ikisi de çok değerli keşifler ama piramitler söz konusu olunca matematiksel keşiflerimi bir kenara bırakırım!

Ve bu çalışmayı bir kenara bırakmak zorunda kaldım. İmkânı yok, FİRAVUNLAR çağırıyordu beni!!! Bağlasanız bile duramazdım. Yani bırakın (2.74) (ya da (2.75))'ün doğru olup olmadığını kontrol etmeyi, hiçbir şey yapamadım bile (ki bunların doğru olup olmadığını piramitlerdeki araştırmalarım nedeniyle 29.05.2017'ye kadar kontrol edemedim). Çünkü söz konusu FİRAVUNLAR ise, bunu reddetme şansınız olamazdı. Ya da şöyle düşünelim: FİRAVUN size bir emir verdiği zaman, sizin bunu ikiletmeden yerine getirmekten başka bir şansınız olmazdı. Örneğin, M.Ö. 1025'te yazılmış [Anastasi I papirüsünde](#) FİRAVUN'un büyük bir rampa yapılması emrinin yerine getirilmesinde bir ordu kâtibinin, **Hori**, meslektaşı **Amenemope**'nin ehliyesizliğini onun yüzüne nasıl vurduğu ve Devlet memurlarının görevlerinin niteliği hakkında bilgiler verilir (Bkz. şu [posta](#)). Ama benim seçimim, bu şansı kaçırmamaktan yanaydı!

Söz konusu bu keşif **Petrie**'nin hiç tahmin etmediği yerden çıktı. Çünkü ona göre piramitlerin merkezleri ve köşeleri arasında hiçbir bağlantı (ilişki) yoktu:

“Piramitlerin köşeleri ya da merkezleri arasında herhangi tam bir ilişki gözükmez; ve çevre duvarlarının düzensizliği ve zeminin gözükmemesi ve doğallığından herhangi bir bağlantı planlanmış gibi görünmez (There does not appear to be any exact relation between their centres, or between the corners; and from the nature and appearance of the ground, and the irregularity of the peribolus walls, it would not seem likely that any connection had been planned)”, *Ch 13. Positions and orientation of the Pyramids/Sec 92. Relative positions of Pyramids.*

Arkeolog **Sör Mortimer Wheeler**, hayatında tanıdığı 4 dâhiden **Petrie**'yi anlatırken bu konuda kritik bir bilgi verir (ki altını çizdim): “Tüm hayatım boyunca tanıdığım Mısır bilimci **Sör Flinders Petrie**. Onu Kudüs'te ölüm döşegindeyken görmeye gittim (Bkz. [Resim 4.6.2](#)). Ve dördüncüsü, Avrupa'daki ilk uygarlığın (Minos) kâşifi **Sör Arthur Evans**. O dördü, sanırım o dördü, aynı sınıftaki başka birini düşünemiyorum. Hepsî dâhiydi. Hepsî neredeyse insanüstü insanlardı. Hepsinde, benim aklıma gelen kimsenin sahip olmadığı bir şey vardı. Ve kahramanlar istiyorsanız, onlara kahraman demek istiyorsanız, bu canavarca bir kelime, onlara uygulayabilirsiniz. Ama hepsinde hataları bulmaya hemen başlamalıyım. Ki bu zor olmaz. Mesela **Flinders Petrie**, onda bir kusur mu arıyorsunuz? **Sör Flinders Petrie**'nin kusurunu herkes bulabilir. Size söylüyorum, zihnini diğer her şeyi dışlayarak o sırada düşündüğü tek şeye odaklayan bir adamdı. Örneğin, [Mısır'a gittiğinde yaptığı ilk şeylerden biri, daha önce kimsenin yapmadığı büyük piramitlerin \(Giza Piramitleri\) çok ince doğru bir planını yapmaktı. Bir milimetrenin kesrine kadar. Bu tarz bir şey!...](#)”, *“5. The Genius of Flinders Petrie”*. Oysa ben bu piramitlerde hep teyakkuz halindeydim ve nerdeyse bakmadığım hiçbir taşın altı kalmamıştı ancak FİRAVUNLAR ve piramit yapımcıları, bu piramitlerle ilgili tüm sırları kendileriyle birlikte öteki tarafa götürmüşlerdi! İşte bu nedenle ben, tam onu mat ettiğimi düşünürken, farkında olmadan ben de mat oluyordum aynı zamanda. Çünkü keşif anında Master Plan'daki en büyük sırrı gördüm ve aniden boğazım düğümlendi (ki bakmayın siz, **Hawass**'ın “Hayatım bu piramitlerde geçti!” demesine. Benim hayatım gerçekten de bu piramitlerde geçti). Sanki biri boğazımı sıkarak gibi boğazımda çok acayip bir tat oluştu ve bir bardak kola içmem bile bu kötü tadı yok edemedi!!!



**Resim 2.5. Petrie'nin kayıp kafası.** **Gibson**'a göre **Petrie**'nin vücudu Kudüs'teki Protestan mezarlığına gömülürken kafası da Londra'ya gönderildi (Bkz. “[The Archaeologist Who Lost His Head](#)”, “[Bring Me The Head Of Flinders Petrie](#)”). Ama bunun bir efsane olduğunu söyleyenler de var (Bkz. “[The Legend of Petrie's Head. An Artist's Response](#)”). Peki İngilizler, ne diyor buna?

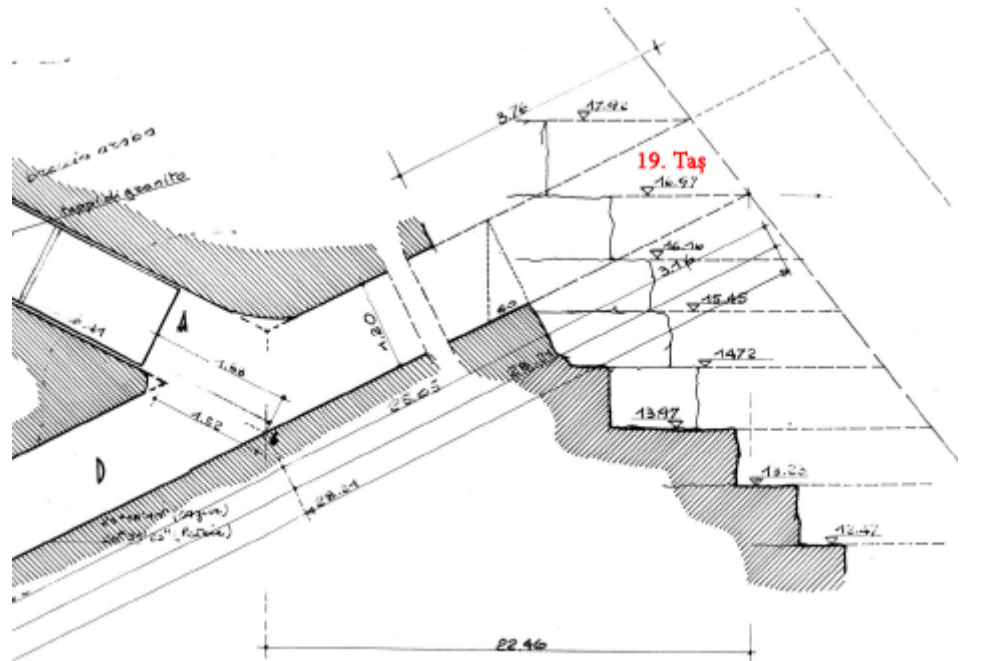
İşte bu yüzden 19.02.2017, 17:00-29.04.2017, 19:30 tarihleri arasında “**Firavunlar Zamanındaki Mühendislik: GİZA Piramitleri Oturum Planı**” adlı araştırma makaleme odaklanmak zorunda kaldım ve 01.06.2017'ye kadar piramitlerde çalıştım. Bu çalışmanın sonucunda çıkarttığım Resim 2.4'teki plana göre her FİRAVUN Giza Platosu'nda sanki bir mezarlık satın alır gibi kendisine yer ayırtmış ve piramitini plandaki yere diktirtmiştir. İlk **KHUFU** gelmiş ve piramitini Giza tepeliğinin kuzeydoğu köşesine yaptırtmış. Ondandı sonra gelen **KHAFRE** ise, piramitini tepenin ortasına planlı bir şekilde diktirtmiş. Böylece tepelikte geriye bir boş yer kalıyor ki bu da **MENKAURE**'nin piramitiyle doldurulmuştur. Fakat **MENKAURE**'nin mühendisleri, piramiti konumlandırmadan önce, düzlenen tepelikte inceden inceye ölçümler yapmışlar ve bu 3 piramiti birbirlerine göre mükemmel bir şekilde konumlandırmışlar. Yani bütün iş **MENKAURE**'nin mühendislerinde bitmiştir. İşte onların bu sırrını **Petrie**, her ne kadar yukarıdaki gözleminde yanılmış olsa da Giza Platosu'nda **48 noktayı** işaretleyerek “**Üçgenleştirme Metodu (Triangulation Method)**” ile elde ettiği koordinatlarla ve ben de bazı matematiksel yöntemler kullanarak çözdük (ki **Petrie**'nin kullandığı yöntemin babası **Snellius**'tur. Bkz. “[Snellius-Pothenot Problem](#)”). Yani bu sırrı her ikimiz de yalnızca matematik yaparak çözdük! Ama Giza piramitlerinin diğer sırlarını keşfedilmek için soldaki kafanın içini iyice sömürmemiz gerekiyor. Çünkü **Sakıp Sabancı**'nın “**Bu kafa, bu kafa, bu kafa!...**” dediği gibi tüm sırların çözümü bu kafanın içindedir!

Çok sonra, 29.05.2017, 08:58:27'de “(2.77) ve (2.78) neden bu kadar hızla yakınıyor?” sorusunun yanıtı için ilkin (2.77)'nin doğru olup olmadığını kontrol ettiğim zaman, doğru olduğuna ilişkin ilk sonuçları görünce “**İyi ki de Tablo 2.7'nin 3. satırındaki 4'ün kuvvetini 54 yerine 56 almışım!**” diye çok sevdiğimi hatırlıyorum! Sadece sevinmemiştim; o sırada bu çifte mutluluk karşılık bende birden göçme oldu. Anladığım kadarıyla, bu, bana Firavunlar'ın bir armağanı idi!!! Sonra aynı yöntemle (2.78) ve bunların geliştirilmiş olan (2.75)'i (ya da (2.74)) kontrol edince onların da doğru olduklarını gördüm!

### Ekstrapolasyon Ustaları: SMYTH-PETRIE

Öncelikle Büyük Piramit'teki Giriş Koridoru'nun tavanının **19. Taş** ile (ki önceki ve sonraki taşlardan **daha kalın** olmasıyla adeta “**ben buradayım!**” diye bağırdı zaten) kesiştiğini görmek zor değildi ama **Petrie**, koridorun eksik parçasını mükemmel bir şekilde ekstrapole ederek **124.2±0.3 BI** tahmininde bulundu!

**Petrie** bu iş için mevcut koridorun hemen başında (ki bu, **127.9 BI**'tir) bir istasyon kurarak piramitin kaplama taşından bu noktaya kadar her bir taşın hem seviyesini (yükseklik) hem de yatayda aldığı yolu ölçümlendi (bkz. “[Petrie'nin Günlükleri 1880-1881, S. 233-234, 241-242-PDF'de 33-34, 41-42](#)”) ve mevcut koridorun uzunluğunu piramitin kaplama hattıyla kesiştirerek bu eksik parçanın ne olabileceğini araştırdı. Örneğin ilkin platformu da hesaba kattığı için C.P.S. 20. Taşı göstererek hatalı sonuç veriyordu. O, bu konuda şöyle der: “**Bu C.P.S.'de 20. Taş sırasında işaretlidir ama gerçekte 19. Taş sırasındadır (ki 1 ve 2. Taşın yükseklikleri toplamı 79 BI'tir ama gerçekte 1. Taşın yüksekliği, platformun kalınlığı 20 BI olduğundan 59 BI'tir)**”, [Petrie'nin Günlükleri 1880-1881, S. 242-PDF'de 42](#).



**Şekil 2.3. Petrie'nin, Büyük Piramit'teki Giriş Koridorunu orijinal haliyle görüntülemesi.**

Hemen bunu tercüme edersem şöyle bir sonuç çıkıyor: **Petrie** giriş koridorunun piramitten çıkış seviyesine platformun kalınlığını da kattığı için, C.P.S. bu çıkış seviyesini 19. Taşı 20 BI (ki **Vyse** kaplama taşının olduğu yerde 21 BI'tir) aşarak 20. Taşın içinde (ki 20. Taşın yüksekliği 20 BI'ten fazlaydı) gösteriyordu.

Burada sözü edilen giriş koridoru, şekilde görüldüğü üzere ana kaya kütesinden oyulmuş Azalan Koridora ek olarak kireç taşlarıyla örülen ek yapıdır. **Petrie**, bunun koridorların zemindeki kesim noktasından piramit çıkışına kadar uzunluğunu 1110.64±0.3 BI olarak verdi. Fakat **Smyth**'in koridorun batı tarafındaki ölçümlerine göre (9 Şubat 1865) bu,

$$(2.79) \quad 124.2 \text{ BI} + 963 \text{ BI} + 2 \frac{2}{7} \text{ RC} \times \tan\left(\sin^{-1} \frac{29}{65}\right) = 124.2 \text{ BI} + 963 \text{ BI} + \frac{2 \frac{2}{7} \text{ RC} \times \frac{29}{6\sqrt{94}}}{59.68678050 \dots \approx 60 \text{ CM}} = 1110.698732 \dots \text{ BI}$$

demektir (ki **Maragioglio-Rinaldi**'ye göre tavandaki (çatı) bir noktanın çekül zemindeki izdüşüm uzunluğu 60 CM'dir. Bkz. "*L'Architettura Delle Piramidi Menfite Parte IV-TAVOLE*", TAV. 4/FIG. 1 Sezione S-N, S. 5). Bu sonuçla **Smyth**'in bir ekstrapolasyon ustası olduğu görülür!

Şu halde her 2 ölçümün Snell ve aritmetik ortalamalarını alırsak Giriş Koridoru'nun koridorların tabandaki kesim noktasından (bkz. *Plate XIV*'teki **P noktası**na ve daha fazla bilgi için *Great Pyramid 24, 25, 26*'daki mesajlara) piramit çıkışına kadar uzunluğunu

$$(2.80) \quad 1110.659577 \dots \text{ BI} = \frac{2 \times 1110.64 + 1110.698732 \dots}{3} < 1110.664738 \dots \text{ BI} = 53 \frac{6}{7} \text{ RC} < \frac{1110.64 + 1110.698732 \dots}{2} = 1110.669366 \dots \text{ BI}$$

olarak elde etmiş oluruz (ki ortadaki sonuç sınırların aritmetik ortalamasına oldukça yakındır). Bu sonuç ise **Petrie**'nin önerdiği 1110.64±0.1 BI aralığının içindedir. Fakat bulgularıma göre gerçek bu da değil. Çünkü koridorların kesim noktası tabanda (zemin) değil tavanda alındı ve bu noktadan aşağıya bir çekül sarkıtılmış olmalı (Bkz. "*Great Pyramid Passages, Vol. I, 1910*". Bu kitabın 172. sayfasındaki LXVIII. şablonda **John Edgar**, ilk tıkaç bloğunun alt tarafının bir çekül onun tabandaki dik izdüşümüne bakarken sağ işaret parmağıyla duvarda bir şeyi gösteriyor. O, orada ilk tıkaç bloğun orijinalde işaret ettiği parmağına kadar uzanmış olduğunu görüyor ve aslında oradan çekül kontrol etmenin gerektiğini düşünüyor. **John Edgar**, bu kitabın basımı sırasında 10.06.1910'da ölür ve 296. sayfadaki CLXI. şablondaki Kraliçe Odası'nda ayakta duran kardeşi **Morton Edgar** bu kitabın I ve II. ciltlerinin basımlarını üstlenir. Bana göre **John Edgar Christ**'in çağrılısı olarak Büyük Piramit'e hacı olmaya gelmişti). **Petrie**'ye göre bu, 1110.90 BI'tir (ki Şekil 2.3'te koridorların tavandaki kesim noktasının mevcut olmadığı görülür. Çünkü bu noktada hasar meydana gelmiş, bundan dolayı tavandaki kesim noktası kaybolmuştur). Ama gerçek uzunluk bundan biraz fazladır! Özetle, bu iş **Sör Mortimer**'in çok övdüğü **Petrie**'nin dehasının da üzerindeydi! Bu konuda şimdilik şunu söyleyebilirim: Büyük Piramit, tüm büyük beyinleri eritmiştir. Çünkü Büyük Piramit, sır/larını açmadan kimse on/lara erişemez!



#### **Mısır'ın En Büyük 10 Keşfinin En Büyüğü: Firavun KHUFU'nun Gündüz Teknesi**

**Hawass**'a göre [en büyük keşifler tesadüf sonucu bulunanlardır](#). Örneğin, **KHUFU**'nun teknesini (ki Nil **KHUFU**'nun döneminde [Büyük Sfenks'in önündeki tapınağın hemen önünde](#) yken yani orijinalde bu tekne çukuru Nil'den yaklaşık 1 KM gerideyken, şimdi Nil bu tekne çukurundan yaklaşık 9 KM uzaklıkta kaldı. Bunun içinde [Merer'in günlüğüne](#) göre **KHUFU** tarafından açtırılan kanallar olmakla birlikte Nil'in doğuya kayması da vardır) 1952'de keşfeden **Kemal El-Malak**, Büyük Piramit'in güney tabanındaki enkaz ve moloz yığınlarını temizlerken yerde dikkatlice yerleştirilmiş 4 büyük blok kireç taşı gördü ve bir tanesini kırarak içerde ne olduğunu merak etti. **Kemal El-Malak KHUFU**'nun teknesinin üzerindeki toplam 42 taştan [soldaki 20. Taşı kırmıştır](#) (ki **Salima İkrım**'ın kastettiği 4 büyük bloktan biri bu iken diğerleri onun etrafındakilerdir) ve delikten içeriye baktığı zaman **Hawass**'a, "[Tarih kokluyorum.](#)" dedi. Bu tekne çukuru ve içindeki tekne parçaları ikincisinde olduğu gibi (ki her 2 tekne çukurunda **DJEDEFRE**'nin kartuşları (ki kartuşlar onun Kral olduğunu gösterir) çıkmasına rağmen 2. Tekne çukurunu kapatan bir kireç taşı bloğunun üzerinde 'nın Hanedanlığına ait [14. Yıl, 2. Ay \(Hasat mevsiminin ilk ayı\), 19. Gün](#) yazıtı çıktı. Üçgenin içinde yazan sayı 90'dır) muhtemelen Büyük Piramit'in inşaatı sırasında yapılmıştı ve tekneler Lübnan'dan getirilme sedir ağacından yapılmış olduklarından içerisi ağırlıklı olarak sedir ağacı olmak üzere küf kokuyordu. Ama o, **KHUFU**'ya yakın olabilmek için bu kötü kokuya aldırılmıyordu bile!

*Derya PAMUK TULUM*



**§3. Mathematica Programları.** Bu bölümde (2.75)'teki p<sup>2</sup>-inci mertebeden ekstrapolasyondan 3 program vereceğim. Fakat bunlar "[RİK 3/3.1. Mathematica Programları](#)"ndaki gibi Mathematica programları değil. Çünkü bunlar keşifleri nedeniyle Önsöz'de geçen [Lunokhod 1](#) gibi prototip halindedirler, dolayısıyla bu aşamada Mathematica programlarını yazmaya gerek görmedim (Y.N. Yaşı 50'nin üzerinde olanlar, [Lunokhod 1](#)'in üzerindeki "СССР" yazısının ne anlama geldiğini bilirler. 1990'da Bostancı'da satın aldığım [Braun 5410](#)'nun üzerinde de "DDR" yazıyordu. Google'da DDR'da üretilen bu traş makinesini aradım ama bulamadım. Ancak yetkili servisleri hala çalışıyormuş. Bende hala sıfır ve kutusunda. O günün anısına saklıyorum). Hem bunlar p<sup>2</sup>-inci mertebeden yani yüksek mertebeden ekstrapolasyonlar olduklarından Mathematica programlarını yazsak bile, bu sefer de ilk birkaç çıktıyı gördükten sonra ev bilgisayar sistemleri nedeniyle duracak ve bir hata mesajı alacaksınız. Genelde hafıza yetersizliğinden dolayı Mathematica bu tür bir hesabı döndürürken şu hata mesajlarını verir:

**General:** The current computation was aborted because there was insufficient memory available to complete the computation.

**Throw:** Uncaught SystemException returned to top level. Can be caught with Catch[... , SystemException].

Eğer bu mesajları alırsanız sisteminizde hafıza yetersizliği var demektir. Ama sadece hafıza yetersizliği mi? Sisteminizdeki tüm bileşenleri bilimsel araştırmalar yapabilecek kapasiteye ulaştırmanız gerekir. Bu nedenle ilk elde acilen CPU (ki CPU'da çekirdek sayısı ve işlemci hızı başat rol oynar. Şimdilik [Intel Core™ i9-7980X](#) işlemcisi rahat rahat işinizi görür) ve RAM'inizi (DDR 4'lü 64 GB ve üzeri. Tavsiyem 256 GB'tır) artırmanız gerekir. Yani sizin [şuradaki](#) gibi bir iş istasyonuna ya da mümkün olursa bir süper bilgisayara ihtiyacınız olacak. Çünkü (2.75) ev bilgisayar kullanıcılarına hitap etmez (ki Technopat, böyle bir iş istasyonunu toplamıştı: "[44 çekirdekli PC topluyoruz!](#)").



Resim 3.2. Oscar Feld'in 95461,52 \$'lık PC toplaması.

Ben olsam, o iş istasyonunda her bir slota 64 GB olmak üzere (ki desteklediği belirtiliyor) RAM'i 1 TB'a çıkartırdım (ki bu iş istasyonu makalemi yazarken toplanmıştı. Ama şimdi öğrendiğime göre "[Scatter-Volt](#)" takma adını kullanan [Oscar Feld](#), 1 ay sonra yaklaşık 100,000 \$'lık bir iş istasyonu daha kurmuş ve sanki bir öncekindeki beklentimi duymuş olacak ki buna 4 TB'lık RAM koymuş! Ancak insanların bu PC karşısında çıldırması gerçekten de görülmeye değerdir (Bkz. [§3.2](#). Onların bu halini görünce aklıma birden 9/11 geldi!). Ama bence acele etmeyin, çünkü DDR5'li RAM'ler 2018'de piyasaya çıkacakmış. "[DDR5 RAM'lerin çıkış tarihi açıklandı!](#)" haberine göre ilk kez 128 GB'lık RAM modülü piyasaya sürülecekti. Bunun için o haberde bir de utanmadan şu yorum yapılmış: "[DDR5 RAM'ler ile birlikte ilk defa 128 GB modeller ile tanışacağız. Açıkçası bu kadar yüksek boyutlarda RAM'lere ihtiyaç duyulur mu orası aşikar. Şu anda oyunlar için minimum 8 GB, maksimum 16 GB'lık modüller zaten işimizi görüyor. Yeni RAM modülleri ise 2018 yılında piyasada yerini almaya başlayacak!](#)"

Fakat Technopat'tan aldığımız en son habere göre [DDR 5 RAM'ler 2019'un başında çıkacakmış](#). Özetle, bu işin sonu yoktur. Çünkü bu işe bir kere başladığınız zaman nerede ve nasıl duracağınızı kestiremezsiniz. Ama hiç yoktan elinizde ortalama bir PC olması iyidir. Ancak ortalama bir PC derken neyi kastediyorum: Örneğin bilgisayar satıcıları Windows 10 için 16 GB RAM'in yeterli olduğunu söyler. O zaman siz 2014'te sistemim için seçtiğim 32 GB'lık RAM alacaksınız (Bkz. "[RİK 3](#)", S. 36'daki tablo). Onlar size ne diyorsa, siz onun 2 katını almaya çalışın. Çünkü böyle bir sistemde hem iş çalışmalarında ve oyunlarda rahat edersiniz, hem de gelecekteki yeni gelişmeler karşısında.

Şimdi burada müsaadenizle bir parantez açmam gerekiyor.

### Lunokhod 1&2 Gibi Bir Monitör: Samsung C32HG70!

"[RİK 3](#)"teki 37. sayfanın başında dile getirdiğim Samsung [C32HG70Q0M](#) monitöründe [panel sorunu](#) vardır (bkz. daha fazla bilgi için "[Vertical lines on Samsung chg70 monitor](#)") ve ne hikmetse tam da 2. yılımı doldururken bozuldu (Y.N. Günümüzde artık elektronik ürünlerin garanti sürelerine göre üretildiklerine dair bir efsane dolaşiyor ortalıkta. Bu yüzden yeni bir televizyon satın almaktansa (ki araştırırken yeni Samsung televizyonlarında da aynı panel sorunun olduğunu gördüm) 2013 LG televizyonumun ledlerini yeniledim. LG yetkilisine bu durumdan yakınınca, o da bu televizyona gözüm gibi bakmamı tavsiye etti. Yani bu, efsane değil gerçekmiş!). Pandemi nedeniyle garanti süresi içersinde (Mayıs 2020) değiştirme şansı (dışarıya çıkma şansı) bulamadım ve hala onunla çalışıyorum. Monitörü Samsung servisine götürme şansı bulduğumda ise (Aralık 2020), bana panelin anakartının yandığını ve ona bağlı panelin de değiştirilmesi gerektiğini ama bunun yerine yeni bir monitör almamın daha mantıklı olacağını söylediler. Çünkü monitörün tamiri sıfır fiyatına yakın idi. Şimdi anladığım kadarıyla monitördeki teknik sorun şöyle: Uzunca bir süre dinlendirilmiş yani oda sıcaklığı altındaki Samsung monitörümü açtığım zaman panelde [yatay-dikey çizgiler](#) çıkıyor ve 3-5 dakika sonra panel ısınınca bu çizgiler kayboluyor. Samsung yetkililerine oturduğum yerdeki sıcaklığın oda sıcaklığının altında olduğunu, dolayısıyla monitörü ancak bu şekilde çalıştırabildiğimi söyleyince çok şaşırıldılar. Yani monitör Lunokhod 1&2 gibi. Çünkü her 2 Ay yüzeyi aracı da Ay gecelerinde uyku moduna alınıp eksi 150-130 C° aralığındaki düşük sıcaklıklarda [polonyum](#) kullanılarak (ki 1 gramı 140 Watt enerji verir) [izotop sobasıyla içleri ısıtılıyor](#) ve gündüzlerinde de Güneş panelleri açılarak tekrar çalıştırılıyordu! Araştırmalarıma göre bu monitöre sahip olan tüm kullanıcılar aynı sorundan yakınıyorlar ve denemedikleri bir metot kalmamış. Fakat [biri](#) bu problemi fikslemeyi başarmış. Muhtemelen bu monitörün 2021 versiyonu "[Odyssey](#)"de bu problem çözüldü. Fakat yenisinde bu problem çözülsün bile, başka bir problemin çıkmayacağını garanti yok. Bu nedenle yenisini almaktansa eskisini Lunokhod gibi kullanmayı tercih ettim!

2020 Model Sistemim	
<b>İşlemci:</b>	<a href="#">Intel Core i9-9900K.</a>
<b>Anakart:</b>	<a href="#">Gigabyte Z390 D.</a>
<b>Hafıza:</b>	<a href="#">4x16 GB = 64 GB DDR4.</a>
<b>Grafik Kartı:</b>	<a href="#">AMD Radeon RX 5700 XT Gaming X.</a>
<b>Harddisk:</b>	<a href="#">Samsung SSD 860 PRO.</a>

İnanır mısınız az önce sözüne ettiğim sistem yetersizliğinin cezasını 2008'de de çekmiştim ama buna soldaki tablodan gördüğümüz gibi artık bir nokta koyma zamanı gelmişti. Çünkü yüksek mertebeli iterasyonlarla çalışırken sisteminizin çok güçlü olması gerekir. Örneğin, 2008'de  $\sqrt[3]{2}$ 'nin basamaklarını kendi orijinal keşifim olan algoritmalarla (°) hesaplarken aşağıdaki tablolarda Mathematica'nın 5.1 ile 6.0 versiyonlarını hız için karşılaştırmıştım ama milyonluk basamaklarını görebilmek kısmet olmamıştı; ancak maksimum yüklenmelerimde çeyrek milyondan fazla basamağı görebiliyordum (Y.N. Mathematica 6.0.2 bu test sırasında

(°) Bu konuda ATA 4 Algoritmaları'nı tek geçirim. Çünkü köklü bir sayıya rasyonel (irrasyonel) yaklaşımlar yapan dünyadaki en hızlı kuartik (ATA 4) ve genelde de ATA M algoritmalarıdır. "[ATA M Algoritmaları](#)", sırf bu iş için yazılmış özel algoritmalarıdır. Buradaki "M", ATA algoritmalarının mertebesini gösterir. Ama bu, mertebeden ziyade 2008'de ATA'ya bir seslenişim idi ve halen de öyledir. Yani biz [Putin](#)'e benzemeyiz; kurucumuza daima saygı ve sevgi içindeyizdir. Çünkü gelecekteki sorunları geçmişteki insanların sırtına yüklemenin, büyük bir acizlik olduğuna inanırız!

## Mathematica Programları Hakkında

yeni çıkmıştı ve ben de her iki versiyonu hız bakımından karşılaştırmak istemişim. Çünkü **Wolfram Research**, Mathematica 6.0.2'nin önceki versiyonlarından çok daha hızlı olduğunu duyurmuştu. Ben de bunun üzerine hemen Mathematica 6.0.2'yi bilgisayarıma indirip kurdum ve bilgisayarımda kurulu olan Mathematica 5.1 ile karşılaştırdım).

Aşağıdaki tablolardaki çıktılara göre Mathematica 6.0, Mathematica 5.1'den dörtte bir civarında daha hızlıdır.

Mathematica 5.1 Çıktısı, 01.05.2008, 08:20						
i	$A_4(x_i) - \sqrt[3]{2}$	$B_4(x_i) - \sqrt[3]{2}$	$D_4(x_i) - \sqrt[3]{2}$	$E_4(x_i) - \sqrt[3]{2}$	$F_4(x_i) - \sqrt[3]{2}$	$G_4(x_i) - \sqrt[3]{2}$
0	0	0	0	0	0	0
	-0.00130036	0.000948515	-0.00185653	-0.00234529	0.0240296	0.00396784
1	0	0	0.015625	0	0	0
	$-4.77858 \times 10^{-13}$	$1.34769 \times 10^{-13}$	$-3.30905 \times 10^{-12}$	$-1.17948 \times 10^{-11}$	$5.07650 \times 10^{-7}$	$1.22897 \times 10^{-10}$
2	0	0	0	0	0	0
	$-8.69047 \times 10^{-51}$	$5.49805 \times 10^{-53}$	$-3.33052 \times 10^{-47}$	$-7.52649 \times 10^{-45}$	$1.10689 \times 10^{-25}$	$1.14059 \times 10^{-40}$
3	0	0.015625	0.015625	0	0	0.015625
	$-9.50654 \times 10^{-202}$	$1.52294 \times 10^{-210}$	$-3.41778 \times 10^{-187}$	$-1.24794 \times 10^{-177}$	$2.50187 \times 10^{-100}$	$8.46230 \times 10^{-161}$
4	0.0468750	0.03125	0	0.03125	0.25	0.15625
	$-1.36125 \times 10^{-805}$	$8.96569 \times 10^{-841}$	$-3.79029 \times 10^{-747}$	$-9.43201 \times 10^{-709}$	$6.52991 \times 10^{-399}$	$2.56403 \times 10^{-641}$
5	0.765625	0.515625	0.125	0.359375	12.53125	5.171875
	$-5.72271 \times 10^{-3221}$	$1.07692 \times 10^{-3361}$	$-5.73305 \times 10^{-2987}$	$-3.07782 \times 10^{-2833}$	$3.03024 \times 10^{-1593}$	$2.16105 \times 10^{-2563}$
6	14.203125	10.03125	1.765625	7.625	453.1875	151.140625
	$-1.78754 \times 10^{-12882}$	$2.24172 \times 10^{-13445}$	$-3.00082 \times 10^{-11946}$	$-3.48977 \times 10^{-11331}$	$1.40526 \times 10^{-6370}$	$1.09051 \times 10^{-10251}$
7	205.0625	149.328125	24.703125	105.640625	7315.140625	2643.65625
	$-1.70166 \times 10^{-51528}$	$4.20895 \times 10^{-53780}$	$-2.25247 \times 10^{-47783}$	$-5.76782 \times 10^{-45323}$	$6.49941 \times 10^{-25480}$	$7.07107 \times 10^{-41005}$

Bu tablodaki her satırdaki 2. değerler [Mathematica 5.1 \(1988-2004\)](#) programında başlangıç değeri  $x_0 = 1$  alınarak sütun başındaki iterasyonların  $\sqrt[3]{2}$ 'den çıkartılması sonucunda aynı anda elde edilen değerleri ve 1. değerler de bu değerlere ulaşılmasındaki saniye (S) cinsinden geçen zamanı gösterir. Buna göre bu algoritmalar içinde en hızlı olan algoritmanın  $A_4(x_i)$  ve  $B_4(x_i)$ 'ten elde edilen  $D_4(x_i)$  olduğu ama yaklaşım bakımından en kaliteli algoritmaların da (1.6.46)'daki ATA 4 Algoritmaları'nın ilk ikisi olan  $A_4(x_i)$  ve  $B_4(x_i)$  olduğu sonucu çıkar. Öte yandan, tahmin edileceği gibi adi bir yöntem olan, yalnızca türeve dayalı olarak elde edilen  $F_4(x_i)$  ve  $G_4(x_i)$ 'nin bırakın ATA 4 algoritmalarını geçmesini, onlardan türetilen  $D_4(x_i)$  ve  $E_4(x_i)$ 'nin bile yanına yaklaşmamaktadır. Bu da, genelde  $\sqrt[n]{a}$  sayısına yaklaşımlarda adi yöntem (türeve) dayalı iterasyonların, ki bunların içine ne yazık ki 3. versiyondaki pekçok iterasyon da girmektedir, ATA M Algoritmaları Ver. 2'dekilerden daha kötü sonuçlar üreten algoritmalar oldukları anlamına gelir.

Mathematica 6.0 Çıktısı, 30.04.2008, 23:38						
i	$A_4(x_i) - \sqrt[3]{2}$	$B_4(x_i) - \sqrt[3]{2}$	$D_4(x_i) - \sqrt[3]{2}$	$E_4(x_i) - \sqrt[3]{2}$	$F_4(x_i) - \sqrt[3]{2}$	$G_4(x_i) - \sqrt[3]{2}$
0	0	0	0	0	0	0
	-0.00130036	0.000948515	-0.00185653	-0.00234529	0.0240296	0.00396784
1	0	0	0	0	0	0
	$-4.77858 \times 10^{-13}$	$1.34769 \times 10^{-13}$	$-3.30905 \times 10^{-12}$	$-1.17948 \times 10^{-11}$	$5.07650 \times 10^{-7}$	$1.22897 \times 10^{-10}$
2	0	0	0	0	0	0
	$-8.69047 \times 10^{-51}$	$5.49805 \times 10^{-53}$	$-3.33052 \times 10^{-47}$	$-7.52649 \times 10^{-45}$	$1.10689 \times 10^{-25}$	$1.14059 \times 10^{-40}$
3	0.015625	0	0	0.015625	0	0
	$-9.50654 \times 10^{-202}$	$1.52294 \times 10^{-210}$	$-3.41778 \times 10^{-187}$	$-1.24794 \times 10^{-177}$	$2.50187 \times 10^{-100}$	$8.46230 \times 10^{-161}$
4	0.03125	0.03125	0.015625	0.015625	0.171875	0.09375
	$-1.36125 \times 10^{-805}$	$8.96569 \times 10^{-841}$	$-3.79029 \times 10^{-747}$	$-9.43201 \times 10^{-709}$	$6.52991 \times 10^{-399}$	$2.56403 \times 10^{-641}$
5	0.453125	0.328125	0.09375	0.203125	5.984375	2.75
	$-5.72271 \times 10^{-3221}$	$1.07692 \times 10^{-3361}$	$-5.73305 \times 10^{-2987}$	$-3.07782 \times 10^{-2833}$	$3.03024 \times 10^{-1593}$	$2.16105 \times 10^{-2563}$
6	6.546875	4.796875	0.921875	3.15625	152.828125	64
	$-1.78754 \times 10^{-12882}$	$2.24172 \times 10^{-13445}$	$-3.00082 \times 10^{-11946}$	$-3.48977 \times 10^{-11331}$	$1.40526 \times 10^{-6370}$	$1.09051 \times 10^{-10251}$
7	88.71875	64.65625	10.875	41.1875	2946.015625	1011.421875
	$-1.70166 \times 10^{-51528}$	$4.20895 \times 10^{-53780}$	$-2.25247 \times 10^{-47783}$	$-5.76782 \times 10^{-45323}$	$6.49941 \times 10^{-25480}$	$7.07107 \times 10^{-41005}$

İkinci olarak, [Mathematica 6.0 \(1988-2008\)](#) programından alınan hızlı çıktıya göre, bu tablodaki her satırdaki 2. değerler ilk tablodakiyle aynı olmak üzere, bu değerlere ulaşılmasındaki zamanı gösteren 1. değerlerin ilk tablodakine göre daha küçük, dolayısıyla **Mathematica 6.0**'ın bir önceki versiyonu olan **Mathematica 5.1**'e göre hesaplama algoritmalarının daha gelişmiş olduğunu göstermektedir. Bu da bize yakın bir gelecekte haklı olarak şu beklentiyi verir: İlk sütunun son satırında elde edilen  $-2.25247 \times 10^{-47783}$  değeri için bir önceki tabloda gereken CPU (işlemci) mutlak zamanı (AbsoluteTiming) 24.703125 Saniye iken bu son tabloda yalnızca 10.875 Saniye olmasının yakın bir gelecekte bu iterasyonla aynı sürede  $\sqrt[3]{2}$ 'nin 1 milyon basamağını görebiliriz. Fakat biz matematikçiler, bu tür hesapları çok daha önceden ortaya koymamıza rağmen ne yazık ki teknolojinin hep geride kaldığını görüyoruz. Bunu Tablo 1.5.1'deki sonuçlara bakarak daha yakından görebilirsiniz. Orda şu görüldü: Bir ev bilgisayarının donanımı ne kadar güçlendirilirse güçlendirilsin, ki **Alexis Irlande** adlı araştırmacı altın oranın 17 milyarlık basamağına erişebilmek için bu yolu seçmişti, algoritmanın da en etkin şekilde kullanılması gerekir!

*Babil Algoritmasından Modern Kök Algoritmalarına Doğru 4000 Yıllık Bir Yolculuk/Uygulamalar, S. 191-192.*

Şimdi (2.75) ekstrapolasyonunun Mathematica'daki çalışmasını 2014 sistemim üzerindeki deneyimlerime dayanarak yukarıda özetle verdiğime göre, 2020 sistemimden elde ettiğim sonuçlarına geçebilirim. Öncelikle yeni sistemde normal çalıştığımda, yani Mathematica'daki ve bilgisayardaki ayarları yükseltmeden şu sonuçları elde ettim: (2.77) kuartik ekstrapolasyonunda  $A_{3^{10},10}(K) - 1 = -1.77913 \times 10^{-1,262,008}$  için  $1146.86'' = 19^{\circ}6.86''$  iken (2.78) nonik ekstrapolasyonunda  $A_{6^7,7}(K) - 1 = 4.06148 \times 10^{-4,318,803}$  için  $45776.1'' = 12^{\text{h}}42'56.1''$  süre aldı.

## Mathematica Programları Hakkında

İkinci olarak yeni sistemimde bir rekor denemesinde bulunarak, (2.75)'te  $p = 5 = k$  için  $A_{15^5,5}(K) - 1 = 2.02894 \times 10^{-7,348,902}$  sonucunu  $4989.79'' = 1^h 23' 9.79''$  süresi içinde alabildim. Bu sonuçları özellikle  $A_{6^7,7}(K)$  nonik ekstrapolasyonundan elde edilen sonuçlarla karşılaştırdığımız zaman şaşırtıcı olduğunu görürsünüz. Çünkü 25-inci mertebeden  $A_{15^5,5}(K)$  ekstrapolasyonu ile  $A_{6^7,7}(K)$  nonik ekstrapolasyonundan yaklaşık 2 kat daha fazla basamak toplarken süreyi de % 11'e düşürüyorsunuz. Ama böyle bir sıçramanın olduğunu daha önceden [RİK 3](#)'teki Tablo 2.4'te görmüştük (Bkz. S. 33). Örneğin 35. sayfada bu konuda bir örnek vermiştim. Orada (3.3)'teki sonuç 23908.5 saniye yani 6 saat 38 dakika 28.5 saniyede ( $6^h 38' 28.5''$ ) alınmışken, bu, [E-ATA1-2.m](#)'de saniye bile sürmez (ki o da yalnızca birkaç salise alır). Tıpkı [oktanlı benzinler](#)deki gibi. Yani genel olarak bu, (2.39) ve (2.75) ekstrapolasyonlarında mertebeyi ve tabii ki iterasyon sayısını ne kadar artırırsanız daha az sürede daha fazla basamak toplamak anlamına gelmez. Kullandığınız sistem ile bu ekstrapolasyonlar arasında kaliteyi ölçen bir ölçüt vardır. Özellikle yüksek mertebeli ekstrapolasyonları kullanırken bunu karşılayacak çok güçlü bir sisteminizin olması gerekir. Kalite bu ikisinin birbirini hangi oranda karşıladığıyla ilgili ortaya çıkan bir gerçektir ve kaliteniz ne kadar yüksek ise o kadar az sürede daha fazla basamak toplarsınız. Örneğin (2.77) kuartik ekstrapolasyonunu düşük bir sistemde kullanırsanız buradaki sonuçların çoğunu göremediğiniz için hayal kırıklığına uğrarsınız!

Ve işte, E-ATA M Algoritmaları'nın ilk ekstrapolasyonları karşınızda:

**ONAYLANDI**  
**Derya PAMUKTULUM 05:03, 21.4.21**



Resim 3.3. Bill Gates, Tycoon kullanırken, 1970'ler.

1. [Kuartik Ekstrapolasyon.nb, 11.02.2021, 17:17](#): 3 bölümden oluşur. İlk bölümde (1.22) ya da (1.50)'deki yeni trapez formülünü verdim ve ikinci bölümde (2.77) kuartik ekstrapolasyonunu tanımladıktan sonra son bölümde bu ekstrapolasyonun **Romberg**'in örneğinde  $k = 0,1,2, \dots, 10$  için çıktılarını verdim. Ama bu çıktıları bir program halinde değil de, 10 tane iterasyon yazarak (ki ilk 5'i Tablo 2.8'de mevcuttur) teker teker verdim.
2. [Nonik Ekstrapolasyon.nb, 12.02.2021, 06:16](#): Bu da öncekiyle aynı şekildedir. Yani ilk bölümde (1.22) ya da (1.50)'deki yeni trapez formülünü verdim ve ikinci bölümde (2.78) nonik ekstrapolasyonunu tanımladıktan sonra son bölümde bu ekstrapolasyonun **Romberg**'in örneğinde  $k = 0,1,2, \dots, 7$  için çıktıları verdim. Yine bu çıktıları bir program halinde değil, 7 tane iterasyon yazarak (ki ilk 5'i Tablo 2.10'da mevcuttur) teker teker verdim.
3. [p<sup>2</sup>-inci Mertebeden Ekstrapolasyon.nb, 12.02.2021, 15:46](#): Öncekilerle aynı olan bu not defterinin ilk bölümünde (1.22) ya da (1.50)'deki yeni trapez formülünü verdim ve ikinci bölümde (2.74) ve (2.75)'teki p<sup>2</sup>-inci mertebenin ekstrapolasyonunu tanımladıktan sonra son bölümde bu ekstrapolasyonun **Romberg**'in örneğinde  $p^2 = 5^2 = 25$ -inci mertebe ve  $k = 0,1,2,3,4,5$  için çıktıları verdim. Yine bu çıktıları bir program halinde değil, 5 tane iterasyon yazarak teker teker verdim.

Bunlar dünyadaki en hızlı ekstrapolasyonlardır ve şu anda **Bill Gates**'in yukarıda yaptığı gibi prototip halindedirler. Ama bunlardan kuartik ekstrapolasyonun programında yeni sistemimde maksimum yüklenme yaptığımda ancak ilk 2 çıktıyı görebildim. Oysa kuartik ekstrapolasyonu iterasyonlar halinde açtığımda ilk 10 çıktıyı rahat rahat görebilmiştim. Bu sonuç ise (2.75) ekstrapolasyonunun bir Mathematica programıyla ev bilgisayarlarında kullanılmasının mümkün olmadığını gösterir ki bu da, (2.75)'ten elde edilen ekstrapolasyonların Mathematica'da yukarıdaki dosyaların 3. bölümlerinde gösterdiğim şekilde kullanmaktan başka bir çaremizin olmadığını gösterir. Bana göre, söz konusu (2.75)'e ilişkin Mathematica programlarını ne kadar kısaltır ya da daha hızlı çalışacak şekilde yazarsanız yazın sonuç değişmeyecektir. Bu konudaki tavsiyem, (2.75)'teki ekstrapolasyonları Romberg metodu içinde Linux tabanlı bir işletim sistemi ([Open Mandriva](#), [Open Suse](#), MX Linux, Manjaro, Linux Mint, Ubuntu, Debian, Elementary OS, Solus, Fedora, Pop! OS, Zorin. Bkz. "[2020'nin En Popüler 10 Linux Dağıtımı](#)") üzerinde C++'da programlamaktır (Bkz. "[Romberg Integration in C](#)", "[Romberg Integration in C++](#)"). Bu, (2.75) için en hızlı çalışabilecek şekil olur ve Windows tabanında Mathematica'dan aldığımız sonuçlara göre biraz fark edecektir. Bu yüzden bize bir Süperman (iş istasyonu ve daha ötesinde bir süper bilgisayar) lazım! Yoksa (2.75)'li Romberg İntegrali'nin programları oyun demosu gibi kullanmaya devam ederiz!

Derya PAMUKTULUM

EK 1: HERON'un "METRICA"da ARŞİMET'in  $\pi$  İçin Verdiğini İddia Ettiği Sınırlar Hakkında

20.10.2016, 17:50.

HERON, "METRICA I, 25"te  $\pi$  için şu sınırları vermiştir:

$$(4.1) \quad 3.141(634910 \dots) = \frac{211875}{67441} < \pi < \frac{197888}{62351} = 3.1(73774278 \dots).$$

WILBUR R. KNORR'un bu kesirler hakkındaki bulguları şunlardır: "ARŞİMET, (4.2)'deki kesirleri geliştirmek için "On Plinthides and Cylinders (Prizmalar ve Silindirler Hakkında)" çalışmasında bu kesirleri verdi. Bu kesirler PLATE I'deki nümerik kısımda açık bir şekilde gözüküyor. Fakat bu kesirler aynı folyonun altındaki boşlukta tekrar gözükür (Bkz. "Archimedes and Measurement of the Circle: A New Interpretation")".

Burada HERON'un verdiği alt sınır yanlış ve üst sınırı da kötü bir yaklaşıktır. İşin kötüsü, bu değerlerin verildiği çokgenlere ait çizimler de yanlıştır. Yani HERON yanlış üstüne yanlış yapmıştır! Demek ki HERON bunları bir yerden kopyalamış ama bunların doğru olup olmadığını kontrol edememiştir. Aslında HERON ya da onun adına bu değerleri veren kimse, haddi olmayan konuya el atmıştır. Çünkü tarihi kaynaklar bize, Antik dönemde ve EL KAŞİ'ye kadar olan döneme kadar ondalık açılımın bilinmediği, hatta sıfır rakamının bilinmediğini ve kareköklü sayılara yapılan yaklaşımların sadece kesirlere bağlı kaldığını söyler. Fakat bunların hepsi birer koca yalandır. Çünkü sıfır rakamı M.Ö. 2000'lerde Eski Babil tabletlerinde yazılmasa bile bal gibi de biliniyordu. Sıfır rakamı için bir sembol kullanımı ilk kez Yeni Babil dönemindeki 8. y.y.'da başlamıştır (Y.N. Matematikte 60 tabanındaki sıfır her tabanda sıfır demektir. Bu durumda sıfır rakamı M.Ö. 2000'lerde ve muhtemelen Sümer dönemine giderek yazının icadında, hatta ondan önce de mevcut idi). İkinci olarak, 10 tabanını keşfeden kişi olarak EL KAŞİ lanse edilir. Bu da doğru değildir. Çünkü M.Ö. 16. y.y.'da kâtip AHMES, Problem 48'deki sayıları 10 tabanında yazmıştır (Bkz. "Ancient Egyptian Mathematics, Vol. II, Plate 70"). EL KAŞİ'nin AHMES'ten farkı, ondalık sayıları yazmasıdır. Fakat sayıların 60 tabanında 10 tabanındaki gibi basamaklar halinde yazımı taa Sümerler'den beri biliniyor ve Eski Babiller döneminde de 60 tabanında astronomi ve matematikte çok karmaşık hesaplar yapılmıştır. Örneğin, M.Ö. 1800'lere ait YBC 7289 no'lu tabletinde  $\sqrt{2} \approx 1; 24,51,10$  (ki 60 tabanında 3 altmışlığı ve 10 tabanında da 5 ondalığı doğrudur) verilmiştir. Yani ARŞİMET ve diğer Grek astronom ve matematikçilerinin hesaplarında 60 tabanını kullanmalarına hiçbir engel yoktu. Nitekim PTOLEMY, M.S. 150'de  $\pi \approx 3; 8,30$  yaklaşıklığını vermiştir. Özetle, bilimsel emperyalizm günümüzde olduğu gibi antik dönemde de mevcut idi.

SITCHIN bu konuda şöyle der: "Sahtecilik, bir ün ve servet aracı olarak ticaret ve sanatta, bilimde ve antikacılıkta alışılmadık bir şey değildir. Açığa çıktığında kayıplara ve utanca yol açabilir; açığa çıkmadığında ise tarihi değiştirebilir", [Dünya Tarihi 2: Gökyüzüne Merdiven, Firavunun Adıyla Oynamak](#).

İşte bunu aşmanın tek yolu, aklınızı işletmenizdir.



WILLEBRORD, SNELLI,  
Matheseos Prof. Lugd. Batav.

Resim 4.1. Leyden Üniversitesi Matematik Profesörü WILLEBRORD SNEL VAN ROYEN (1580-1626), Eratosthenes Batavus (Lugd, Batavian)-1617.

HERON, ARŞİMET'in (4.1)'i daha küçük olan

$$(4.2) \quad 3.14(0845070 \dots) = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = 3.14(2857 \dots)$$

kesirlerini geliştirerek verdiğini iddia eder. Fakat HERON "METRICA"da yalnızca üst sınır kesri verir ve alt sınır kesri ise ilk kez Eutokios'un yorumundan sonra gözükür!

Bir diğer iddia, Hollandalılar'a göre <sup>(10)</sup>, SNELLIUS'un, 1621'de "CYCLOMETRICUS: De circuli dimensio secundum" çalışmasında (2.12)'deki  $M_7$  algoritmasını kullanarak,

$$(4.3) \quad \pi > \frac{2 \times 3\frac{10}{71} + 3\frac{1}{7}}{3} = 3.1415(157612 \dots)$$

yaklaşıklığıyla ARŞİMET'in kesirlerini 2 kat hızlandırmış olmasıdır. Kaldı ki bu derecedeki bir yaklaşımı Huygens'in (2.22)&(2.23)'teki algoritmalarıyla yapılan (2.43)-(2.46)'daki yaklaşıklıklarda görmek mümkün değildir!

Burada da şu tarihi gelişmelere dikkat etmemiz gerekiyor: SNELLIUS, günümüzde limit ve serilerde gördüğümüz  $M_7$ 'yi geometrik yöntemle keşfeder. Çünkü 1621'de ne limit, ne de bir fonksiyonun seriye açılımı biliniyordu! 18. yy.'ın başında fonksiyonların Maclaurin açılımları yani serilere açılımları keşfedilince SNELLIUS'un  $M_7$  algoritmasının önemi anlaşıldı (ki ilk seri 1671'de arktanjan serisiyle Gregory tarafından keşfedilmişti). Yani  $\sin x$  ve  $\tan x$ 'in serisi  $M_7$ 'de konulduğunda  $x^3$ 'lü teriminin sıfırlanmış olduğu görüldü! İşte bu yüzden KARDİNAL NİKOLA ve Hollandalı SNELLIUS ve HUYGENS Antik dönemde başlayan ve kendilerine kadar devam eden " $\pi$ 'nin Geometrik Dönemi"nin son temsilcileri oldular. Çünkü 18. yy.'ın başında serilerin keşfiyle  $\pi$ 'nin hesabı arktanjan özdeşliklerine geçti (ki bu tür hesaplarda yalnızca kesirleri hesaplamak yeterliydi. Dolayısıyla bir diğer Hollandalı matematikçi LUDOLF van CEULEN (1540-1610)'nin yaptığı gibi kareköklü sayılarla büyük el hesaplarına gerek yoktu). Bu nedenle KARDİNAL NİKOLA, SNELLIUS ve HUYGENS Nümerik Analiz'in kurucuları olarak kabul edilirler. Çünkü (2.12)'deki  $M_7$ ,  $M_8$  ve (2.23) algoritmaları  $\pi$  için ilk ekstrapolasyon algoritmaları idi!

Şimdi HERON'un yanlış olarak bildirdiği kesirlerin düzeltilmesi hakkında HEIBERG ve TANNERY tarafından yapılan tahminleri SNELLIUS'un  $M_7$  algoritmasıyla analize tabi tutalım.

**4.1. HEIBERG'in Tahmini.** Öncelikle HERON'un  $\pi$  için (4.1)'deki alt sınırının hatalı ve üst sınırının da kötü bir yaklaşıklık olduğunu görüyoruz. Fakat 1896'da "METRICA"nın İstanbul'da H. SCHÖNE tarafından keşfinden hemen sonra HEIBERG, 1912'de yaptığı ikinci çeviride, HERON'un (4.1)'deki kesirlerinde 2 hata keşfetti (aşağıdaki kırmızı renkli rakamlar, ona göre, HERON'un hatalı rakamlarıdır) ve şu sınırları önerdi (Bkz. "HEIBERG: Archimedes, Opera 2. Edition, 542"):

<sup>(10)</sup> Bu, Hollandalılar tarafından aktarılan ve tüm dünyaya yayılan bir rivayettir. Ben SNELLIUS'un tüm kitaplarına baktım; yok öyle bir şey. Anlaşılan o ki, bu bilgi SNELLIUS'tan çok sonra,  $M_7$  algoritmasının değerinin anlaşılmasından sonra (muhtemelen fonksiyonların seriye açılımlarının yapıldığı 18. y.y.'da) ortaya çıktı!

$$(4.4) \quad 3.14159(5166 \dots) = \frac{211875}{67444} < \pi < \frac{195888}{62351} = 3.141(6978075 \dots).$$

Bana göre **HEIBERG** bu hataları şu şekilde buldu ya da keşfetti: İlkin, (4.1)'deki alt sınırın paydasının birler basamağını "4" yaptı ve böylece onu  $\pi$ 'nin alt sınırına çekti. İkinci olarak, üst sınırın paydasını doğru kabul ederek sınırların paydaları arasındaki farkı  $67444 - 62351 = 5093$  olarak buldu ve sonra bunu 3.14 ile çarparak  $5093 \times 3.14 = 15992.02 \cong 15992$  sonucunu buldu. Üçüncü olarak, alt sınırın payını doğru kabul ederek  $211875 - 15992 = 195883$  işlemini yaptı. Ama **HEIBERG** burada şunu düşündü: "Tamam, üst sınırdaki binler basamağını '5' olarak düzelteceğim ama 5 fark için birler basamağını değiştirmeye gerek yok. Çünkü böylece hem hata sayısını 2'de tutmuş olur, hem de gerçek bir yaklaşımda bulunmuş, olurum!"

Çok ilginçtir, tüm kaynaklar, **HEIBERG**'in (4.4)'teki yaklaşıklarını sorgusuz sualsiz doğru kabul eder ve sanki bunları **HERON** vermiş gibi iman ederler. Fakat bu kesirleri bir analize tabi tuttuğumuzda **HEIBERG**'in bu düzeltmelerinin de bir işe yaramadığı ortaya çıkar!

Peki, bunu nasıl anlayabiliriz?

### SNELLIUS, 1621'den bildiriyor!

Burada öncelikle **HEIBERG**'i tebrik etmek gerekiyor; çünkü o, metin çevirisindeki başarısını <sup>(1)</sup> (4.4) ile matematikte de göstermiştir. Yani **HERON**'un (4.1)'de verdiği yaklaşıklıklarda en az hatayla, en iyi sonuçları o bulmuştur!

Gerçekten de öyledir. Çünkü onun (4.4)'teki tahmini,

$$(4.5) \quad 3.14159(0463 \dots) = 1536 \sin \frac{\pi}{1536} < \pi < 1536 \tan \frac{\pi}{1536} = 3.14159(7034 \dots)$$

sonuçlarından görüldüğü üzere bir çemberin içine ve dışına çizilmiş düzgün 1536-genlerin çevrelerine mükemmel bir şekilde uyar. Ama alt sınırdaki bir sıkıntı var ve bu sıkıntıyı hiçbir şekilde atlatamazsınız!

İkinci olarak, eğer (4.4)'teki sınırların aritmetik ortalamasını alırsak,

$$(4.6) \quad \pi < \frac{\frac{211875}{67444} + \frac{195888}{62351}}{2} = 3.14159(6486 \dots)$$

olarak  $\pi$ 'nin 5 ondalığı doğru çıkar ama **SNELLIUS**'un algoritmasına göre,

$$(4.7) \quad \frac{2 \times \frac{211875}{67444} + \frac{195888}{62351}}{3} = 3.1415(62713 \dots) < \pi$$

çelişkisiyle karşılaşırız. Yani bu yaklaşıklık (4.6)'dan kötüdür. Ancak bu yaklaşıklık o kadar kötüdür ki (4.4)'teki alt sınırdan bile küçük olup, (4.4) aralığının dışında kalır. Demek ki **HEIBERG**'in (4.4)'teki tahmini doğru değil, yani (4.4)'teki kesirler 1536-genlerle (ya da kenar sayısı ne olursa olsun) elde edilen gerçek kesirler değilmiş!

Burada şuna dikkat etmek gerekiyor: Eğer "METRICA" 1896'da İstanbul'da keşfedilmeden önce Avrupa'da olsaydı, Hollandalılar daha o saatte **HERON**'un (4.1)'deki kesirlerin gerçek kesirler olmadığını ve bu kesirleri düzeltmenin bir yolunun olmadığını söylediler (Bkz. "Christiaan Huygens: Oeuvres complètes. Tome XII. Travaux de mathématiques pures 1652-1656 (1910)". Bu kitaptaki "Probleme I. Prop. X, S. 139-142" de **Arşimet**'in kesirlerin nasıl elde edildiğine ilişkin mükemmel bir analiz yapılmıştır). Benim burada şansım, **SNELLIUS** idi. Büyüksün **SNELLIUS** amca!

**4.2. TANNERY'nin Tahmini.** **TANNERY**'nin 1903'teki tahmini şudur (Bkz. "Journual des Savants 1903, P. 205, Oeuvres III"):

$$(4.8) \quad 3.14159(0427 \dots) = \frac{211872}{67441} < \pi < \frac{195882}{62351} = 3.141(601578 \dots).$$

Burada **HEIBERG**'in (4.4)'teki tahminine göre alt sınırdaki bir düzeltme yapılırken (4.5) ile karşılaştırıldığında alt ve üst sınırın 1536-genlerin çevrelerine yaklaştırıldığı görülür. Ancak **TANNERY** daha kafadan elenir. Çünkü (4.5)'ten (4.8) çıkarıldığında,

$$(4.9) \quad \begin{cases} \Delta a = 1536 \sin \frac{\pi}{1536} - \frac{211872}{67441} = 3.60398 \times 10^{-8}, \\ \Delta b = 1536 \tan \frac{\pi}{1536} - \frac{195882}{62351} = -4.54384 \times 10^{-6} \end{cases}$$

eş yaklaşımlarda olmadıkları görülür. Dolayısıyla (4.8)'deki yaklaşımları analize tabi tutmanın bir anlamı yoktur!

Fakat biz yine de analizimize devam edelim. Eğer (4.8)'deki sınırların aritmetik ortalamasını alır ve **SNELLIUS**'un algoritmasına tabi tutarsak,

$$(4.10) \quad \pi < \frac{2 \times \frac{211872}{67441} + \frac{195882}{62351}}{3} = 3.14159(4144 \dots) < \frac{\frac{211872}{67441} + \frac{195882}{62351}}{2} = 3.14159(6002 \dots)$$

şeklinde  $\pi$ 'nin 5 ondalığını gerçekleyen sonuçlar ortaya çıkar. Ancak bu durumu **HEIBERG**'in tahmininde yani (4.7)'de gözlemleyemedik!

Fakat bu işlemleri (4.5)'teki gerçek sınırlarla yaparsak,

$$(4.11) \quad \pi < \frac{2 \times 1536 \sin \frac{\pi}{1536} + 1536 \tan \frac{\pi}{1536}}{3} = 3.1415926535(\dots) < \frac{1536 \sin \frac{\pi}{1536} + 1536 \tan \frac{\pi}{1536}}{2} = 3.14159(3748 \dots)$$

<sup>(1)</sup> Danimarkalı bir filolog olan **HEIBERG** dönemin en iyisiydi. O, **EUCLID**, **APOLLONIUS** ve daha sonra **ARCHIMEDES**'in eserlerini mükemmel bir şekilde çevirdi. O, **ARCHIMEDES PALİMPSESTİ**'ni yalnızca bir büyüteçle Güneş ışığı altında tamamına yakını kopyalamayı başardı!

sonuçlarından **SNELLIUS**'un algoritması, **TANNERY**'nin tahmininin hatalı olduğunu söyler. Çünkü **SNELLIUS**'un algoritmasından çıkan sonuç, aritmetik ortalama-dan çıkan sonucu  $\pi$ 'nin doğru olan basamak sayısında 2'ye katlar. Yani **SNELLIUS**'un algoritması sanki kuadratik bir algoritma gibi çalışmış!

**Sonuç 4.1.** **HERON**'un (4.1)'de verdiği hatalı kesirlerde **TANNERY** ve **HEIBERG** tarafından yapılan iyileştirmeler buradaki analizimize göre beklenen sonuçları verememişlerdir. Ama bu tahminler yine de olumlu yönde geliştiği için olumsuz bir şey söylemek istemiyorum. Nasıl kötü bir şey söyleyebilirim ki. Çünkü **HERON**'un hatalı kesirlerini 4.7'de onların sayesinde düzeltebildim!

Burada şuna dikkat etmek gerekir: **HERON**'un (4.1)'de verdiği hatalı kesirlerde en büyük hata üst sınırın payında yapılmış idi ve her iki araştırmacı da, bu hatayı "195888" olarak düzelttiler. Ancak bundan sonra diğer rakamları da düzeltmeye başladığınız zaman, işler sarpa sarıyor. Yani sizi sonsuz bir bunalım bekliyor!

#### 4.3. JOHANN-HARTMANN BEYER'den Şok Edici Sonuçlar

27.10.2017/17:13.

**JOHANN-HARTMANN BEYER**, "*STEROMETRIÆ INANIVM NOVA ET FACILIS RATIO, GEOMETRICIS DEMONSTRATIO nibus confirmata: [...] FRANCOFVRTI, In Officina Paltheniana, Impensis Ionae Rhodii. ANNO MDCIII*" kitabının 235. sayfasındaki **CAPUT 28**'de bombeli bir şarap fiçisinin hacmi hesaplarken merkezdeki ve tabanlardaki dairelerin alanlarında  $\pi$  için (4.1)'deki kesirler gibi çok ilginç yaklaşıklıklar kullanır. Bunun için merkezdeki büyük dairenin çapını 42.8 alarak alanı 1438.78 ve alt ve üst tabanlardaki küçük dairelerin çapını 36.2 alarak alanı 1029.25 olarak bulur. Fakat o, bu sonuçlara nasıl ulaştığını göstermez; sadece çaplara karşılık gelen alanları yazar.

Şu halde bu daire alanlarındaki  $\pi$  değerlerine yakından bir göz atarsak ilkin fiçinin merkezindeki dairedeki  $\pi$  değerini,

$$(4.12) \quad 1438.78 = A_1 = \pi r_1^2 = \pi \left(\frac{42.8}{2}\right)^2 \Rightarrow \pi < \frac{1438.78}{21.4^2} = \frac{143878}{214^2} = \frac{71939}{22898} = 3.141(715433 \dots)$$

olarak buluruz. Bu, **HERON**'un (4.1)'deki üst sınırının **HEIBERG** tarafından (4.4)'te düzeltilmiş şekline çok benzer. Çünkü bu kesri 62351 ile genişletirsek,

$$(4.13) \quad \pi < \frac{62351 \times \frac{71939}{22898}}{62351} = \frac{195889.0990}{62351} \cong \frac{195889}{62351}$$

değeri ortaya çıkar. Yani bu kesrin payı **HEIBERG**'inkinden 1 fazladır!

Bu sefer fiçinin tabanlarındaki daireleri gözönüne alırsak  $\pi$  için

$$(4.14) \quad 1029.25 = A_2 = \pi r_2^2 = \pi \left(\frac{36.2}{2}\right)^2 \Rightarrow \pi < \frac{1029.25}{18.1^2} = \frac{102925}{181^2} = \frac{102925}{32761} = 3.141(692866 \dots)$$

değeri elde edilir. Bu da, **HERON**'un (4.1)'deki alt sınırının **TANNERY** tarafından (4.8)'de düzeltilmiş şekline çok benzer. Çünkü bu kesri de 67441 ile genişlettiğimizde,

$$(4.15) \quad \pi < \frac{67441 \times \frac{102925}{32761}}{67441} = \frac{211878.9086}{67441} \cong \frac{211879}{67441}$$

değeri ortaya çıkar. Yani bu kesrin payı **TANNERY**'ninkinden 7 fazladır!

O, **Örnek 6** ve diğer örneklerde de aynı hesabı yapar ve fiçinin merkezindeki ve tabanlarındaki dairelerin alanlarında  $\pi$  için (4.13) ve (4.15)'teki değerleri kullanır ama örnekler göre bunları biraz değiştirir. Örneğin, **Örnek 6**'daki fiçinin hacmini 15717.0 olarak tam bulur!

Peki **HERON**'un yüzyıllar boyu kayıp **METRICA**'sı ilk kez 1896'da İstanbul'da keşfedildiğine göre, **JOHANN-HARTMANN BEYER**, 1603'te  $\pi$  için (4.13) ve (4.15)'teki kesirleri (4.1)'in düzeltilmiş şeklindeki gibi nasıl önermiş olabilir? Acaba **JOHANN-HARTMANN BEYER**,  $\pi$ 'nin değerini mi bilmiyordu? Bu mümkün değil, çünkü o tarihte **LEYDENLİ KRALLAR (LUDOLF VAN CEULEN, SNELLIUS, HUYGENS v.d.)**  $\pi$ 'nin onlarca basamağını hesaplıyorlardı!



**4.4. VAN CEULEN ve SNELLIUS'a Bir Saygı Ziyareti.** **VAN CEULEN**, ilk performansını 1596'da  $15 \times 2^{31}$ -genlerle  $\pi$ 'nin 20 ondalığını hesaplayarak gösterir. İkinci büyük sıçrama için **FRANÇOIS VIETA (1540-1603)**'nin 1579'daki formülünden hareketle  $2^{62}$ -genlerle  $\pi$ 'nin 35 ondalığını hesaplarken 1610'daki ani ölümü üzerine 32 ondalıkta takılır kalır. Tüm bu sonuçlar **VAN CEULEN**'in ölümünden sonra, eşi **ADRIANA** tarafından 1615'te yanda görülen "*Vanden Circkel*" kitabında yayınlanır. Bu kitaptaki **VAN CEULEN**'in eksik kalan çalışmasını öğrencisi **SNELLIUS** tamamlar ve 1621'de "*Cyclometricus*" adlı kitabında yayımlar. Fakat **SNELLIUS**, bu kitapta öğretmenin çalışmasını tamamlarken,  $\pi$  için **VIETA**'dan itibaren tüm çalışmaları toplayarak adeta 16-17. yy.  $\Pi$  Almanya'nı oluşturur. İşte bu kitap nedeniyle **SNELLIUS** da **VAN CEULEN** gibi hayatının büyük bir bölümünü harcar ve bu kitaptaki  $\pi$ 'nin 36 basamağı **VAN CEULEN**'in mezar taşına kazınır!

#### Biz, adamı böyle gömeriz işte!

Çok ilginçtir, **VAN CEULEN** Pieterskerk'de 11 Kasım 1602'de bir mezar satın almıştı ama 31 Aralık 1610'daki ani ölümünden sonra eşi **ADRIANA** mezar yerini değiştirir ve 2 Ocak 1611'de bu ikinci mezara (ki Pieterskerk'deki mezar yeri halen mevcuttur) gömülür. Mezar taşına  $\pi$ 'nin alt sınırı olan

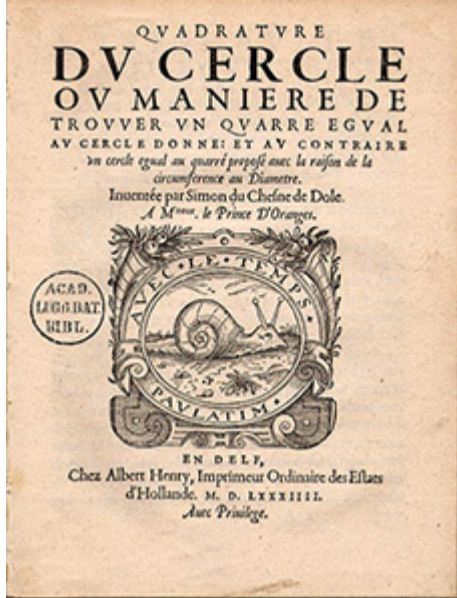
$$(4.16) \quad \pi < S_{20}^{(1)} = \frac{64 \times 2^{21} \sin \frac{\pi}{2^{21}} - 16 \times 2^{20} \sin \frac{\pi}{2^{20}} + 2^{20} \tan \frac{\pi}{2^{20}} - 4 \times 2^{21} \tan \frac{\pi}{2^{21}}}{3} = 3.14159265358979323846264338327950288(6902 \dots)$$

ve üst sınırı olan

$$(4.17) \quad \pi < S_{30}^{(0)} = \frac{2 \times 2^{30} \sin \frac{\pi}{2^{30}} + 2^{30} \tan \frac{\pi}{2^{30}}}{3} = 3.1415926535897932384626433832795028(9 \dots)$$

değerleri kazanır (Y.N. SNELLIUS, eğer [RİK 2](#)'deki S.10'daki Tablo 2.1'in 2. satırındaki bu algoritmayı keşfetmiş olsaydı,  $\pi$ 'nin 35 ondalığını çok daha kestirmeden bulmuş olacaktı. Aynı şekilde, Tablo 2.1'deki  $S_{15}^{(2)}$  ile  $\pi$ 'nin 36 ondalığını ve  $S_{10}^{(3)}$  ile  $\pi$ 'nin 33 ondalığını da bulabilirdi). O, bu algoritmayla VAN CEULEN'in hesaplamaları 14 yıl (1596-1610) ama şimdi bilgisayarda 584.2738879264835 [megasaniye](#) süren bir çemberin içine ve dışına çizilmiş  $2^{60}$ -genlerle  $\pi$ 'nin hesabını yapmak yerine yolu, dolayısıyla zamanı yarıya düşürerek (4.17) ile aynı sonucu tekrar buldu ya da keşfetti!

Burada bir ilginç durum daha var: VAN CEULEN'in mezar taşı 1800'lere kadar gözükmez (Neden acaba? Kimse  $\pi$ 'nin bu değerlerini almasın diye mi?) ve 200 yüzyıl sonra (5 Temmuz 2000) yerine yukarıdaki 1596 tarihli portredeki resmin altındakine benzer bir [replika](#) konur! SNELLIUS, bu replikanın üzerinde yazılı  $\pi$  değerleri için "Cyclometricus" kitabının "Önerme 31 (PROPOSITIO XXXI)"in sonunda, yani S. 55'te  $\pi$ 'nin  $S_{20}^{(1)}$  (ki yalnızca parantez dışındaki rakamlar) ile  $S_{30}^{(0)}$  (ki parantez içindeki "9" da dahil olmak üzere) arasında olması gerektiğini yazar!



Fakat  $\pi$ 'de en büyük performansı gösteren SNELLIUS değil, öğretmeni VAN CEULEN idi. VAN CEULEN (1540-1610), hayatının son 25 yılını  $\pi$  için harcamıştır. İlk dikkat çeken çalışması, 1585'te 192-genle bulduğu

$$(4.18) \pi < \frac{3.14205}{\text{Van Ceulen}} < \left(\frac{39}{22}\right)^2$$

yaklaşıklığıdır (Bkz. "Pi: A Source Book", S. 218-219). Ancak VAN CEULEN bu değeri 192-genle bulurken ARŞİMET'in çalışmasından habersiz idi. Çünkü Yunanca bilmiyordu. Bir diplomat ve devlet adamı olan HUGO GROTIUS, ARŞİMET'in  $\pi$  için vermiş olduğu yaklaşıklıkları ona çevirdi. Bu, onun hayatının dönüm noktası oldu. Çünkü VAN CEULEN'in bundan sonraki amacı, ARŞİMET'in metodunu kullanarak  $\pi$  için daha iyi yaklaşıklıklar bulmak idi!

Burada kareli olan yani,

$$(4.19) \pi < \left(\frac{39}{22}\right)^2 = \frac{1521}{484} = 3 \frac{69}{484} = 3.14(2561983 \dots)$$

yaklaşıklığı 1584'te bir diğer Hollandalı SYMON VAN DER EYCKE tarafından verilmiştir. O, bu değeri yukarıda soldaki kitapta geçen dairenin karelenmesi metoduyla bulduktan sonra VAN CEULEN'e,  $\pi$ 'nin gerçek değerinin CUSA'lı NICOLAS'ın çalışmasını geliştiren VIETA'nın (Bkz. "Francisci Vietae Opera Mathematica, 1646", S. 393, PROPOSITIO IV),

$$(4.20) \pi < \sqrt{\sqrt{320} - 8} \left( = \frac{4}{\sqrt{\phi}} \right)$$

yaklaşıklığının olduğunu söyledi<sup>(12)</sup>. VAN CEULEN, VAN DER EYCKE'nin (4.19)'daki ilişkinin ispatı inceledi ve hatalı olduğunu söyledi.

Bazı piramit araştırmacıları, bu değer piramitin geometrisinde olduğunu iddia eder (Bkz. "The Great Pyramid of Giza: Pi and The Golden Ratio". Orada bu değeri 4. sayfadaki (20) no'lu formülde görebilirsiniz).

Burada ilginç olan şey şu ki, VAN DER EYCKE'nin (4.19)'daki sonucu dünyaya anlatmak için 91 sayfaya ihtiyaç duyduğu yerde, VAN CEULEN'in sadece 6 sayfaya ihtiyacı vardı (Bkz. "Van Den Circkel"). VAN DER EYCKE daha sonra yeni bir kitapçık yayımladı (bkz. "Quadratuere Des Circkels"deki "Claerder Bewys") ve  $\pi$ 'nin kesin değeri için (4.20)'yi önerdi. Bu, ARŞİMET'in (4.2)'deki sınırların ötesinde idi, ancak görünüşe göre önemli değildi. VAN CEULEN, nihayet Fransız kökenli "doğuştan ölü" tartışmasına son verdi ve ARŞİMET'in hesabındaki  $\pi$ 'nin gerçekte 3.1410300 ile 3.1427232 arasında olduğunu belirtti (Bkz. "Steven Wepster: Ludolph van Ceulen in Hollandse kringen". Orijinalde VAN CEULEN'in "Van Den Circkel" kitabının 106. folyonun sonunda (4.19) ve (4.20) değerleri bulunur).

Öyle görünüyor ki, VAN DER EYCKE, ARŞİMET'in üst sınırından hareketle,

$$(4.21) \pi < \left(\frac{39}{22}\right)^2 < \frac{22}{7}$$

şeklinde daireyi karelemiş görünür. Çünkü,

$$(4.22) \frac{22^3}{7} = 1521 \frac{1}{7} = 39^2 + \frac{1}{7} > 39^2$$

dir. Böylece VAN DER EYCKE, ARŞİMET'in üst sınır kesrinden  $\pi$ 'ye biraz daha yaklaşmış olur ve bu yaklaşım o kadar iyidir ki Ahmes papirüsündeki  $\pi < \left(\frac{16}{9}\right)^2$ 'den daha iyidir!

Fransız matematikçisi VIETA, 1593'te yine bir diğer daire-çap ilişkisi üzerine yaptığı çalışmada, dairenin çevresini karenin çevresine eşit alarak  $\pi$  için

$$(4.23) \pi < \frac{18 + \sqrt{180}}{10} \left( = \frac{6}{5} \phi^2 \right)$$

değerini bulur (Bkz. "Francisci Vietae Opera Mathematica, 1646", S. 392, PROPOSITIO III). Bazı piramit araştırmacıları, bu değer Firavun KHUFU'nun odasında olduğuna inanırlar ama bu doğru değildir!

**4.5. ARŞİMET'e Bir Saygı Ziyareti.** İster inanın, ister inanmayın VAN CEULEN bana pas attı. Böyle bir pası çok uzun zamandan beri beklemiyordum dersem yalan olur. Çünkü ARŞİMET'in hesaplarından HERON'un (4.1)'de verdiği kesirlere ulaşmaya çalıştığım zaman garip bulgularla karşılaşmıştım!

Örneğin, ARŞİMET, eğer hesaplamalarına devam etseydi,

<sup>(12)</sup>  $\phi$  altın oranı o sırada Avrupa'da bilinmiyordu, dolayısıyla bu yaklaşıklık karekök içinde öylece olduğu gibi bırakılıyordu. Fakat bu konuda DA VINCI'nin 1492 tarihli "Vitruvius Adamı" çalışmasının başat bir örnek olduğunu söyleyebilirim. Bu, Avrupa'da dairenin karelenmesine ilişkin ilk sanatsal çalışmadır. Eğer bir fırsatım olursa, Ernst Hanfstaengl'in, "HITLER: The Rise of Evil" filminde HITLER'e, "Biz, sadece sanatsal kitaplar yayımlarız!" dediği gibi bu nadide sanatsal çalışmanın geometrisini anlatmaktan büyük gurur duyuyorum!

$$(4.24) \sqrt{\left(4673\frac{1}{2}\right)^2 + 153^2} : 153 > \frac{4676}{153} \Rightarrow \frac{4673\frac{1}{2} + 4676}{153} = \frac{9349\frac{1}{2}}{153}$$

sonucundan hareketle

$$\pi < \frac{192 \times 153}{9349\frac{1}{2}} = 3 + \frac{1327\frac{1}{2}}{9349\frac{1}{2}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{57}{1327\frac{1}{2}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{23 + \frac{33}{114}}} < 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{23 + \frac{33}{110}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{23 + \frac{3}{10}}} = 3 + \frac{70}{493}$$

eşitsizliklerinden

$$(4.25) \pi < 3\frac{70}{493}$$

yaklaşıklığını vermiş olacaktır. Buna olan inancım % 100'dür. Yani 2267 yıldır bu sonuç bir sır olarak **ARŞİMET**'in hesaplarının arasında kalmıştı. **EUTOKIOS** bunu görmüş olmalı!

İkinci olarak,

$$(4.26) \frac{2016\frac{1}{6} + 2017\frac{1}{4}}{66} = \frac{4033\frac{5}{12}}{66} \Rightarrow \sqrt{\left(4033\frac{5}{12}\right)^2 + 66^2} : 66 < \frac{4034}{66} = \frac{2017}{33}$$

sonucundan hareketle

$$\pi > \frac{192 \times 33}{2017} = 3 + \frac{285}{2017} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{22}{285}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{12 + \frac{21}{22}}} > 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{12 + \frac{16}{22}}} = 3 + \frac{140}{991} = 3\frac{700}{4955}$$

eşitsizliklerinden

$$(4.27) 3\frac{700}{4955} < \pi$$

yaklaşıklığını bulmuş oluruz.

Şu halde (4.25) ve (4.27)'yi birleştirirsek  $\pi$  için 192-genlerle,

$$(4.28) 3\frac{700}{4955} < \pi < 3\frac{70}{493}$$

çifte eşitsizliğini verebiliriz. İşte **VAN CEULEN**'in bana, (4.18) ile hatırlattığı şey bu idi. Eğer **VAN CEULEN**, 1585'te **ARŞİMET**'in çalışmasını görebilseydi, (4.18)'deki değerden daha iyisini görmüş olacaktır. Yani muhtemelen buradaki üst sınırı görecekti. Söz konusu bu değer **VAN DER EYCKE** tarafından (4.19)'da verilen yaklaşıklıkla çok bir yakın ilişkisi vardır!

Şüphesiz **ARŞİMET**'in hesabında tasarlanan bu değildi; çünkü bunun için başlangıçta  $\sqrt{3}$  için seçilen (4.47)'deki yeşil renkli kesirler yeterli gelse de, kareköklü sayılara kesirli yaklaşımlarda biraz daha hassas olmak gerekiyordu (Bkz. (4.49)). Buradan (4.28)'deki sınırların  $\pi$ 'ye yaklaşımlarda yeterli ama 192-genlerin çevrelerine yaklaşımlarda yeterli olmadıkları sonucu çıkar. Fakat çok spesifik davranmazsanız bu sonuçlar da yeterlidir. Örneğin bunların aritmetik ortalamasını alırsanız **PTOLEMAEUS**'un  $\pi$  için (4.42)'de verdiği 3;8,30 değerine çok yakın olduğunu ve **SNELLIUS**'un algoritmasında da  $\pi$ 'nin 4 ondalığını doğruladığını görürsünüz!

**4.6. PTOLEMAEUS'a Bir Saygı Ziyareti.** Eğer **Sonuç 4.1**'in sonunda geçen tek hatanın düzeltilmesini gözönüne alırsak,

$$(4.29) \begin{cases} \frac{211875 - 195888}{67441 - 62351} = 3\frac{717}{5090} \approx 3\frac{10}{71}, \\ \frac{211875 + 195888}{67441 + 62351} = 3\frac{6129}{43264} \approx 3\frac{17}{120} \end{cases}$$

yaklaşıklıkları söz konusu olur. Burada ilk yaklaşıklık, **ARŞİMET**'in (4.2)'deki alt sınırı ve ikincisi ise, **PTOLEMY**'nin "**ALMAGESTUM**" adlı kitabında verdiği 3;8,30 ile  $\pi$ 'nin üst sınırıdır. Yani **HERON**'un kesirlerinde bir tuhafılık var ama ne?

Şimdi ne olduğunu anlayamadığımız bu tuhafılık,

$$(4.30) \frac{211875 - 1}{67441 - 1} = \frac{211874}{67440} = 3\frac{17}{120} \approx \frac{195888 + 1}{62351 + 1} > \pi$$

sonuçlarıyla bizi daha da şaşırtıyor. Çünkü bu sonuçlar yine **PTOLEMY**'nin  $\pi$ 'sini veriyor bize. Ancak bu  $\pi$ , "**Astronomik Pi**"dir ki bunu keşfettiğimde yalnızca şok geçirmekle kalmamış; **HEIBERG** ve **TANNERY**'nin bunu nasıl atladığına da çok şaşırmıştım!

Şimdi birazdan aşağıda göreceğiniz gibi Astronomik Pi, **Celal Şengör**'ün, "**Birbirini yalanlayan inançlar ile bilim yapılabilir mi?**" başlıklı konferansının 13:08'inde dinin düzenleme işlevini açıklarken, takvimle ilgili "**Astronomi Babil ile başlar! Hayır efendim, (modern) astronomi Galileo ile başlar!**" iddiasını yanıtlıyacaktır (Y.N. Parantez içine "modern"i koyarak ifadeyi düzeltmek zorunda kaldım).

Ah şimdi **Sitchin** hayatta olsaydı bize Babil astronomisini anlatsaydı. Ama o astronomiyi Sümer'den başlatır. **Sitchin**'in çocukluğundan beri Eski Ahit'teki "**Nefilimler (Gökten Yeryüzüne Gönderilenler)**" takıntısı, "**Zaman Başlarken**" kitabında **Marduk**'un (Sümerce'de **Nibiru**) Tiamat ile "**Göksel Savaşı**"nda meyvesini verir. Çünkü



bu göksel savaş sonunda Dünya ve uydusu Ay oluşur ve bu bilimsel olarak NASA tarafından 2009'da onaylandı. Yani NASA'ya göre 4.5 milyar yıl önce THEIA (*Sitchin*'e göre Marduk) adlı bir gezegen Dünya'ya çarpmış ve bunun sonucunda Ay ortaya çıkmıştır (Bkz. "[Ay'ın Oluşumu](#)"). İtiraf etmem gerekir ki NASA'nın bu açıklamasını duyduğum anda aklıma derhal *Sitchin*'in anlattığı o hikâye gelmiş ve onun adına sevinmişim!

**4.6.1. SAROS Döngüsünde II Çevrimi.** WIKIPEDIA'ya göre SAROS (<sup>13</sup>) döngüsünde geçen Dünya'nın Güneş etrafındaki bir tam turu [365.256,363,004 Gün](#) ve Ay'ın Dünya etrafındaki bir tam turu da [29.530,589 Gün](#)'dür (ki NASA ilkini [3 ondalık](#)la, ikincisini [2 ondalık](#)la verir. Çünkü astronomide kesinlik yoktur). Eğer bunları birbirine bölersek 1 Güneş Yılı (GY)'nın kaç Sinodik Ay (SA)'dan oluştuğunu,

$$(4.31) \quad 1 \text{ GY} = \frac{365.256363004}{29.530589} \text{ SA}$$

yaklaşımıyla bulmuş oluruz.

METON, bunun için  $\frac{235}{19}$  kesrini önerdi ve günümüz astronomisinde bu çevrim kullanılır. Fakat (4.31)'deki kesri PTOLEMAEUS'un,

$$(4.32) \quad \pi_p = 3 \frac{17}{120}$$

$\pi$ 'si ile genişletirken paya bunu bir ekleyip çıkartırsak,

$$(4.33) \quad 1 \text{ GY} = \frac{\left(\frac{365.256363004}{29.530589} + 1\right) \pi_p - \pi_p}{\pi_p} \text{ SA}$$

eşitliğindeki kesrin payında

$$\left(\frac{365.256363004}{29.530589} + 1\right) \pi_p = \frac{394.786952004}{29.530589} \pi_p = 42.00014458 \dots \cong 42$$

olduğu görülür ki buradan,

$$(4.34) \quad \left(\frac{365.256363004}{29.530589} + 1\right) \pi_p \cong 42$$

değerini alabiliriz.

Şu halde (4.31)'deki çevrim için

$$(4.35) \quad 1 \text{ GY} = \frac{42 - \pi_p}{\pi_p} \text{ SA}$$

formülasyonunu önerebilirim. Söz konusu bu yaklaşıma ilişkin konuyu yaklaşık 5 yıl önce teorik olarak genişçe ele almıştım ve en iyi  $\pi$  değerinin PTOLEMAEUS'un-kinin olduğu sonucu çıkmıştı. Bu nedenle, o sırada her yerde PTOLEMAEUS'un orijinal kitabını aramış ve keşiften 12 gün sonra en eskisinin 1515 basımlı "[ALMA-GESTUM](#)" adlı kitabı olduğunu görmüştüm (<sup>14</sup>) (Y.N. Daha fazla bilgi için [EK 2](#)'deki orijinal makaleme bakınız)

Çok ilginçtir; meraklı bir araştırmacı, bu kitabın 68. sayfasının sağ tarafındaki boşlukta ARŞİMET'in kesirleriyle birlikte PTOLEMAEUS'un  $\pi$  için verdiği,

$$(4.36) \quad \pi_p = 3; 8,30$$

değerini yazmış. Bu şart, çünkü oraya çıkartılan notları (hesaplar iç içe geçtiğinden) doğrudan o sayfada görmemiz mümkün değildir. Onun bu ilgisi ve ben de bu çalışma notlarından yararlanırken (4.35)'teki sonucu görmem zor olmadı! Burada "**Pi Çevrimi**" olarak adlandırdığım (4.35)'teki çevrim Babilliler'inkinden ve METON'unkinden üstündür!

Demek ki (4.35)'e göre,

$$(4.37) \quad \pi_p \text{ GY} = 42 - \pi_p \text{ SA}$$

imiş ve bu durumda

$$(4.38) \quad 1 \text{ Saros} = \frac{223\pi_p}{42 - \pi_p} \text{ GY}$$

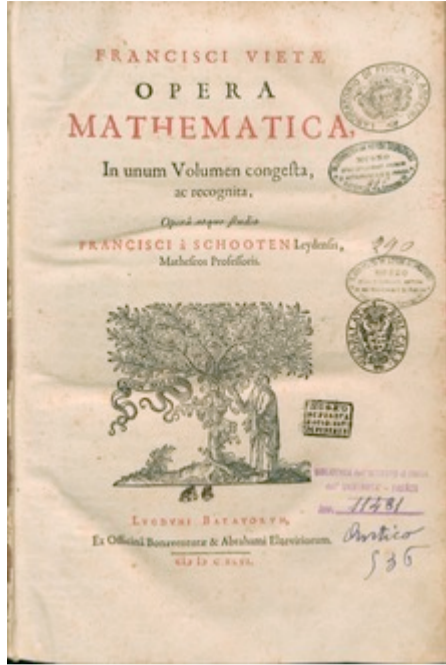
olur (Y.N. Bu konuda daha fazla bilgi için "[On The Babylonian Discovery of The Periods of Lunar Motion](#)" kaynağına bakınız).

(<sup>13</sup>) SAROS döngüleri Kaldealılar tarafından keşfedilmişti ve HIPPARCHUS, PLINY ve PTOLEMY tarafından da biliniyordu. Bunların hepsi SAROS'tan farklı isimlerle bahsetmişlerdir. SAROS ismi 1691'de EDMOND HALLEY tarafından konmuştur. HALLEY bu tabiri 11. yy. BİZANS veri sözlüğü "[SUDA](#)"dan almıştır. Her ne kadar GUILLAUME LE GENTIL 1756'da bu tutulma döngüsü olgusunun hatalı isimlendirilmiş olduğunu ortaya koymuşsa da SAROS ismi kullanılmaya halen devam etmektedir.

EGE Denizi'nin kuzey kesiminde yer alan Saros körfezi Antik çağda "**MELAS KOLPOS**" adıyla anılan yer, güneyde Gelibolu yarımadası, kuzeyde Trakya kıyıları arasına yaklaşık 60 KM kadar sokulan üçgen biçimli bir girintidir. Efsaneye göre (ki "[IMMORTALS, 2011](#)" filminde bu durum özellikle vurgulanır. Örneğin, HELEN KONSEYİ Başkanı, EPIRÜS'ün Yayı ve Tanrılar ile ilgili anlatılanların alaycı bir şekilde birer efsaneden ibaret olduğunu söyler), M.Ö. 1228'de HELENLER, HERAKLİYONLAR ile burada savaşır (ki TİTANLAR HERAKLİYONLAR'a yardım ederken, TANRILAR da HELENLER'e yardım eder) ve TANRILAR'ın yardımıyla bu savaşı kazanır (Y.N. "π" aynı filmde hırsızlara vurulan damga olarak geçer). BİZANSLILAR bu ismi muhtemelen M.Ö. 28 Mayıs 584'te THALES'in bildirdiği Tam Güneş Tutulması nedeniyle sözlüklerine aldılar. Çünkü SAROS 57'de görülen bu tutulma [tam da anılan bu yerin üzerinden geçiyordu](#). Öyle ki ZEUS'un bu işareti İSTANBUL'dan bile görünüyordu!

(<sup>14</sup>) Bu kitap matbaanın AVRUPA'ya getirilmesinden hemen sonra ilk basılan kitap olan Latince İNCİL'den 59 yıl sonra basıldı ve STERNWARTE Üniversitesi (VİYANA) de, kuruluşunun 250. yılı nedeniyle bu tarihi ve nadide eseri yayımladı!

**4.6.1.1. VIETÆ'ya Bir Saygı Ziyareti.** Şimdi bu konuyla yakından ilgilenen *FRANÇOIS VIETÆ*'nin "GREGORYEN TAKVİM" ile ilgili sığağı sığağına matematiksel çalışmalarda bulunduğu şu çalışmasına bir bakalım.



**FRANCISCI VIETÆ: OPERA MATHEMATICA, 1546: XIV. RELATIO KALENDARII VERE GREGORIANI 447-503, XV. KALENDARIVM GREGORIANVM PERPETVVM 504-541, XVI. CHRISTOPHORVM CLAVIVM 542-544.**

*VIETÆ* takvimle ilgili bu çalışmasında METON çevrimini kullanır ve bu çevrimden "Gregoriana Metonicas" olarak söz eder. 1 Güneş Yılı'nı  $\left[365 \frac{97}{400}, 365 \frac{100}{400}\right]$  aralığında alırken (Bkz. "Önerme XXXI", S. 488), Ay'ın Sinodik periyodunu yaklaşık olarak  $29 \frac{5306}{10000}$  olarak alır (Bkz. "Önerme VIII", S. 459). Çok daha hassas hesaplarda ise  $29 \frac{530592348}{1,000,000,000}$  kesrini kullanır (Bkz. "Önerme XXXI", S. 487). Burada Ay takvimine göre 1 Yılı  $12 \times 29 \frac{530592348}{1,000,000,000} = 354 \frac{367108176}{1,000,000,000}$  olarak kabul eder (Bkz. "Önerme XXXII", S. 489).

Söz konusu bu veriler doğrudan gözleme dayalı veriler olduğundan en sağlıklı olanlar, Ay gözlemlerine ait olanlardır. Dünya'nın Güneş etrafındaki 1 tam turuna ait veriler Ay gözlemlerinden elde edilen verilerin METON çevrimine tabî tutulmasıyla elde ediliyordu!

Şu halde Dünya'ya ait veriler bu şekilde elde edildiğine göre, *VIETÆ*, 19 Tropikal Yılı  $\left[6939 \frac{243}{400}, 6939 \frac{300}{400}\right]$  ve 235 Sinodik Ayı  $\left[6939 \frac{27568}{40000}, 6939 \frac{28983}{42053}\right]$  aralıklarında tanımlar (Bkz. "Önerme XII", S. 482). Ancak 235 Sinodik Ayı daha hassas şekilde  $29 \frac{530592340425}{1,000,000,000,000}$  ile  $6939 \frac{6803}{10000}$  olarak hesaplar (Bkz. "Önerme XXXIX", S. 497).

Çok ilginçtir, *VIETÆ* <sup>(15)</sup>, 1579'da *ARŞİMET*'in  $\pi$  için verdiği değerleri hatırlattıktan sonra, bu hesabın ötesine giderek  $6 \times 2^{16}$ -genlerle

$$(4.39) \quad 3.1415926535 < \pi < 3.1415926537$$

çifte eşitsizliğini verir (Bkz. "CAPUT XV", S. 392). Fakat (4.35)'teki formülü ne o, ne de ondan sonrakiler farkedemez!

Özetle, bu çevrim Dünya'dan yapılan gözlemlerle elde edilmiştir. Örnekse; Mısırlılar, Babilliler, Grekler, Romalılar, Çinliler vs.

Peki, ya uzaya çıkıp Dünya ve Ay'ın kendi yörüngelerindeki 1 tam turlarını gözlemleyebilirsek ve bunları oranlasak sonuç ne çıkardı? Bu oranda  $\pi$ 'nin rolü nedir?

Şimdi de bu soruların yanıtını görelim.



**Resim 4.2. PTOLEMAEVS (81-161): "Dünya ve Ay benim  $\pi$ 'me göre dönüyor!"**

**4.6.2. Dünya ve Ay'ın Yörünge Periyotlarının Oranı.** Dünya'nın Tropikal Yılı (TY) 365.2421909949 Gün (bkz. "Sidereal vs Tropical Year-Part 2") ve Ay'ın yörünge periyodu 27.321661 Gün'dür.

Şu halde 42'yi bunların oranına bölersek ağırlık değişmeyeceğinden,

$$(4.40) \quad \pi_A = \frac{42}{\frac{365.2421909949 \text{ Gün}}{27.321661 \text{ Gün}}} = 3.141777675 \dots \left( \approx 3 \frac{319}{2250} = 3; 8,30,24 \right)$$

ile yine bir  $\pi$  sayısı söz konusu olur. Bu, *ARŞİMET*'in  $\pi$  için verdiği sınırların aritmetik ortalamasına benzerdir. Çünkü,

$$(4.41) \quad \pi_{\text{Ort.}} = \frac{3 \frac{10}{71} + 3 \frac{1}{7}}{2} = 3.141851106 \dots$$

dır.

Görüldüğü üzere bu tür hesaplarda  $\pi$  hep bir şekilde karşımıza çıkıyor!

**4.7. HERON'un "METRICA"sında  $\pi$  İçin Verilen Sınırlar Hakkındaki Araştırma Sonuçları**

05.05.2017/04:00.

Yukarıda dikkat ederseniz bu konu hakkında hiçbir görüş belirtmedim; sadece tahminlere yer verdim. Fakat *PTOLEMAEVS*'un  $\pi$ 'si nedeniyle ister istemez konuya bulaşmak zorunda kaldım ve görüşümü **Sonuç 4.1**'de belirttim. Çünkü *HERON*'un *METRICA*'sındaki  $\pi$  için (4.1)'deki kesirler hatalı olsa da nasıl ulaşıldığına dair hiçbir bir bilgi yoktu!

Hemen kısa bir tariheye girecek olursam; *HERON*'un *METRICA*'yı M.S. 60'ta yazdığı söylenir. Fakat *HERON* bu kitapta hemen her şeyin ispatını verirken bu konuda suskun kalır ve (4.1)'deki kesirleri *ARŞİMET*'e ithaf etmekten geri durmaz. Ancak diğer taraftan, *PTOLEMAEVS* da, M.S. 150'de "ALMAGESTUM" adlı kitabında *HERON*'un (4.1) kesirlerine çok yakın

(4.36)'daki değeri verir. Bu durumda *PTOLEMAEVS*'un *HERON*'un kesirlerinden haberdar olduğu ya da (4.1)'deki kesirlerin *PTOLEMAEVS*'tan sonra *HERON* adına verilmiş olduğu sonucu çıkar. Yani aralarında 90 yıl farkla her ikisi de Geç İskenderiye Dönemi'nde yaşadılar ve Büyük İskenderiye Kütüphanesi'nde çalıştılar (ki

<sup>(15)</sup> *FRANÇOIS VIETÆ (1540-1603)* 4 Ekim 1582'de kabul edilen ve günümüzde "MİLADİ TAKVİM" olarak kullandığımız "GREGORYEN TAKVİM" ile ilgili çalışmasını 1546 tarihli anılan kitabın sonuna yaklaşık 100 sayfa tutan 3 bölüm koyarak 1600'de yayımladı. Çünkü 1600'de ilk kez M.Ö. 46'da İmparator *Jül Sezar* tarafından uygulamaya konan Jülyen takvimine göre  $4 \times 3.123620236 = 12.494480944$  günlük fark ortaya çıkmış ve bunu düzeltmek gerekiyordu. Bu konuda "Gregorian Calendar" videosunda yeni takvime geçilirken 1600'de neden 9.8159765, yaklaşık olarak 10 günlük atlama yapıldığı açıklanmaktadır!

**PTOLEMAEUS**'un Yunan asıllı bir Mısırlı ya da Mısır asıllı bir Yunanlı olduğu iddia edilir. Aralarındaki fark ise şudur: **HERON**, (4.1)'deki kesirleri verirken ne verdiğinin farkında olmadığı için hatalı verirken, **PTOLEMAEUS** ise, (4.36)'da verdiği kesrin ne anlama geldiğinin gayet farkındadır. Çünkü onun döneminde trigonometrik tablolar hazırlanıyordu. Bu, Antik dönemde düzgün çokgenlerle  $\pi$  hesabını yapanlara göre büyük bir devrimsel sıçrama idi!

Şu halde eğer bir çemberin dışına çizilmiş düzgün 360-genle  $\pi$ 'yi hesaplamak istersek,

$$(4.42) \quad 360 \tan \frac{180^\circ}{360} = 360 \tan \left( \frac{1}{2} \right)^\circ \approx 360 \times 0,03125 = 360 \times 0,03125 = 3,830 = \pi_p$$

olduğunu görürüz. Oysa bu hesabı Antik dönemdeki gibi düzgün teğetler 360-genile yapmaya çalışsaydık, bu imkansız olurdu. Çünkü  $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$  çarpanlarına ayrılıştığında görüldüğü gibi açıyı hem 2 kez 3'e bölmeye çalışacaktık (bkz. [açının 3'e bölünmezliği](#)), hem de 5'e (örneğin, üçgenden 15-gene geçmek ya da 5-genden 15-gene veyahut da 45-gene geçmek mümkün değildi). Bunlar Antik dönemde imkânsız şeyler idi. İşte **PTOLEMAEUS**'un düzgün çokgenlerle  $\pi$  hesabındaki devrimsel değişikliği bu idi. Buna göre düzgün n-genin kenar sayılarını trigonometrik tabloya göre istediğiniz tamsayı olarak alabilirsiniz!

Şimdi **HEIBERG** ve **TANNERY**'den sonra **HERON**'un (4.1)'deki kesirlerini şöyle düzeltebilirim:

$$(4.43) \quad 3.14159(04271 \dots) = \frac{\overset{\mu^{\kappa\alpha}, \alpha\omega\epsilon}{211872}}{\underset{\mu^{\zeta}, \zeta\nu\alpha}{67441}} < 3.14159(04632 \dots) = a_{1536} < \pi < b_{1536} = 3.14159(70343 \dots) < \frac{\overset{\mu^{\theta}, \zeta\omega\pi\eta}{195888}}{\underset{\mu^{\zeta}, \beta\nu\alpha}{62353}} = 3.14159(70362 \dots).$$

Burada  $a_n = n \cdot \sin \frac{\pi}{n}$  ve  $b_n = n \cdot \tan \frac{\pi}{n}$  dersek  $a_{1536}$  ve  $b_{1536}$ 'ya göre mavi renkli rakamlar doğru basamakları ve kırmızı renkli rakamlar hatalı rakamları gösterir (Bkz. "[A Manual of Greek Mathematics/Ancient approximations to the value of  \$\pi\$ , S. 146](#)"). İlk bu kesirlerde  $\underbrace{5}_{\epsilon} + \underbrace{2}_{\beta} = \underbrace{7}_{\zeta}$  toplamıyla çift hata yapılmıştır. Çünkü alt sınırın payındaki birler basamağında 2 yerine 5 yazılmış (ki bu hata alt sınırın payındaki ve üst sınırın paydasındaki birler basamağındaki rakamlarının  $\underbrace{2}_{\beta} + \underbrace{3}_{\gamma} = \underbrace{5}_{\epsilon}$  toplamından gelmiş olmalıdır) ve üst sınırın payındaki binler basamağında da 5 yazılacağına, dalgınlıkla bir öncekindeki rakamlar toplanarak 7 yazılmıştır. Hatırladığım kadarıyla böylesine zorlu bir çift hatayı yakalayan tek bir kişi vardır; o da, Plimpton 312 no'lu tabletinin 2. satırındaki çift hatayı yakalayan Avustralyalı araştırmacı **R. J. Gillings**'tir (Bkz. "[R. J. Gillings, Unexplained error in Babylonian cuneiform tablet, Plimpton 322, Australian J. Sci. 16 \(1953\), 54-56](#)"). İkinci olarak, üst sınırın paydasının birler basamağında 3 yerine 1 yazılarak basit bir hata yapılmıştır. Bu durumda **TANNERY**'nin (4.8)'de hatalı rakam sayısını doğru tahmin ettiği görülür.

Diğer taraftan, eğer **HEIBERG**'in tahminindeki kesirler için (4.6) ve (4.7)'de yaptığımız testi (4.43)'te yaparsak,

$$(4.44) \quad \pi < 3.1415926(302 \dots) = \frac{2 \times \frac{211872}{67441} + \frac{195888}{62353}}{3} \leq b_{24576} < \frac{\frac{211872}{67441} + \frac{195888}{62353}}{2} = 3.14159(37317 \dots) \leq b_{3072}$$

olarak beklenen sonuçlar gerçekleşir. Burada aritmetik ortalamadan elde edilen sonuç (4.11)'deki gerçeğine göre 7 ondalıkla doğruyken, Snellius algoritmasından elde edilen sonuç  $\pi$ 'nin 10 basamağını doğrulayacağına (yani aritmetik ortalamayı 2'ye katlayacağına), 7 ondalıkla doğrular. Bu sonucu ikinci yoldan şu şekilde de doğrulayabiliriz: (4.44)'teki aritmetik ortalama  $b_{3072}$ 'yi 7 ondalıkla doğrularken, Snellius algoritması da  $b_{24576}$ 'yı 7 ondalıkla doğrular. Demek ki daha kalifiye bir çalışma yapmak gerekiyordu. Çünkü bunun için (4.43)'teki kesirlerin 1536-genlerdekilerle aynı sayıda basamakta yani en az 10 ondalıklarının doğru olması gerekiyordu!

Şimdi de varsayalım ki **HERON**'un (4.1)'deki kesirlerinin düzeltilmiş şekli (4.43) olsun ve bunun **ARŞİMET** zamanında değil ama **SNELLIUS** zamanında verilebileceğine ilişkin ispata geçelim. Yani bu ispatı vermek ne kadar absürd de olsa, ben yine de (4.43)'ün, dolayısıyla (4.1)'in tüm yönleriyle anlaşılması için bu ispatı vereceğim!

**4.7.1. ARŞİMET'in Çember Ölçümü Hakkında.** Bilindiği gibi bunun için "**Arşimet Palimpsesti**"nde 3 önerme ve **HERON**'un bildirdiği "**Prizmalar ve Silindirler Hakkında**" olmak üzere 2 farklı çalışma mevcuttur. Bunlardan ilki günümüze kadar ulaşabilirken ikincisi kayıptır. Fakat kataloglarda böyle bir çalışma geçmez!

**Arşimet Palimpsesti**'ndeki **Önerme 3**'ün ifadesi şudur: "*Herhangi bir çemberin çevresi, çapının  $3 \frac{10}{71}$ 'inden büyük ama  $3 \frac{1}{7}$ 'sinden küçüktür.*"

**ARŞİMET**, bu ifadenin altında  $\pi$  için ispatlı olarak şu çifte eşitsizliği verir (ki  $A_n = 6 \cdot 2^n \sin \frac{\pi}{6 \cdot 2^n}$  ve  $B_n = 6 \cdot 2^n \tan \frac{\pi}{6 \cdot 2^n}$  olarak aldım):

$$(4.45) \quad 3.14(0845 \dots) = 3 \frac{10}{71} < 3.14(1031 \dots) = A_4 < \pi < B_4 = 3.14(2714 \dots) < 3 \frac{1}{7} = 3.14(2857 \dots).$$

Fakat **HERON**'un bildirdiğine göre **ARŞİMET**, aynı çalışmaya devam etmiş ve en iyi ihtimalle (4.45)'teki n'yi çifte katlayarak (4.43)'teki kesirlere göre şu sonuçları vermiştir:

$$(4.46) \quad 3.14159(04271 \dots) = \frac{211872}{67441} < 3.14159(04632 \dots) = A_8 < \pi < B_8 = 3.14159(70343 \dots) < \frac{195888}{62353} = 3.14159(70362 \dots).$$

Bir kere her şeyden önce bu mümkün değildir. Çünkü bu takdirde **ARŞİMET**'in alt sınırdaki  $\pi$ 'nin 5 ondalığını doğrulaması yetmeyecek ve ona parantez içindeki 2 basamağı daha eklemesi gerekecektir. Aynı şekilde, üst sınırdaki  $\pi$ 'nin 5 ondalığını doğrulamasıyla birlikte parantez içindeki 3 basamağı daha eklemesi gerekir. Yani **ARŞİMET**'in  $\pi$ 'nin doğru basamaklarını bulması yetmez; onlara parantez içindeki doğru olmayan basamakları da eklemesi gerekir. Oysa (4.45)'te bu böyle değildir!

Özetle, **HERON**'un bildirdiğine göre (4.46)'nın ispatını yapmaktan başka bir çaremiz yok. Yani bu her ne kadar absürd de olsa, bize başka bir çıkar yol bırakmaz!

Başlayalım!

Öncelikle bu hesaba girmeden önce  $\sqrt{3}$ 'ün alt ve üst sınırlarının nasıl bulunduğu bir bakalım.

**$\sqrt{3}$ 'e Rasyonel Yaklaşımlar.** Bilindiği gibi **ARŞİMET**, (4.45)'teki kesirlere ulaşabilmek için ilkin  $\sqrt{3}$  için 2 atmışlığı doğru olan,

$$(4.47) \quad \frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56}$$

kesirlerinden yeşil renkli olanları seçerken (ki alt sınırdaki tek sınır var ve bunu seçmek zorunda iken, üst sınırdaki yakınsaklığı en iyi olanını almıştır), hesaptaki kareköklü sayılara kesirlerle yaklaşımlar için *KLİNE*'a göre

$$(4.48) \quad a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2+b} < a + \frac{b}{2a}$$

algoritmalarını kullanmıştır!

Fakat *ARŞİMET*'in (4.46)'daki kesirlere ulaşabilmek için  $\sqrt{3}$ 'ün alt ve üst sınırları nasıl almış olduğu "*Prizmalar ve Silindirler Hakkında*" adlı kitabı kayıp olduğundan bilemiyoruz. Ancak (4.48)'deki algoritmalarla yaptığım araştırmalara göre (4.46)'daki kesirlere ulaşabilmek için  $\sqrt{3}$  için asgari 5 atışlığı doğru ama 6 atışlığa çok yakın olan

$$(4.49) \quad \frac{191861}{110771} < \sqrt{3} < \frac{262087}{151316}$$

kesirlerinin alınması gerekiyor.

Hesap başlıyor!

Şimdi bir gösterim için (4.49)'daki alt sınırla (4.46)'nın üst sınırına nasıl ulaşıldığını göstereyim.

Bunun için ilkin (4.49)'daki  $\sqrt{3}$ 'ün alt sınırı için şu işlemleri yapmalıyız:

$$(4.50) \quad \begin{cases} \sqrt{3} > \frac{191861}{110771} \\ 2 > \frac{221542}{110771} \end{cases} \Rightarrow 2 + \sqrt{3} > \frac{221542}{110771} + \frac{191861}{110771} = \frac{413403}{110771}$$

İkinci olarak bu son kesri şu kareköklü işleme tabi tutmalıyız:

$$(4.51) \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{413403^2 + 110771^2}}{110771} = \frac{\sqrt{427986^2 + 238654}}{110771} > \frac{427986 + \frac{238654}{2 \times 427986 + 1}}{110771} = \frac{427986 \frac{238654}{855973}}{110771} > \frac{427986 \frac{238654}{855972}}{110771} = \frac{427986 \frac{9179}{32922}}{110771} \\ > \frac{427986 \frac{9176}{32922}}{110771} = \frac{427986 \frac{148}{531}}{110771} \end{cases}$$

Üçüncü olarak (4.50) ve (4.51)'i taraf tarafa toplarsak,

$$(4.52) \quad \frac{413403}{110771} + \frac{427986 \frac{148}{531}}{110771} = \frac{841389 \frac{148}{531}}{110771}$$

kesirini elde ederiz.

Dördüncü olarak bu kesri de (4.51)'deki gibi aynı işleme tabi tutarsak,

$$(4.53) \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{\left(841389 \frac{148}{531}\right)^2 + 110771^2}}{110771} = \frac{\sqrt{848649^2 + 1007583 \frac{267226}{281961}}}{110771} > \frac{848649 + \frac{1007583 \frac{267226}{281961}}{2 \times 848649 + 1}}{110771} = \frac{848649 + \frac{284099377489}{478572123339}}{110771} \\ \frac{848649 + \frac{284099377489}{478572123339}}{110771} > \frac{848649 + \frac{315 \frac{2}{9}}{531}}{110771} \end{cases}$$

ve bununla (4.52)'yi taraf tarafa toplarsak,

$$(4.54) \quad \frac{841389 \frac{148}{531}}{110771} + \frac{848649 + \frac{315 \frac{2}{9}}{531}}{110771} = \frac{1690038 \frac{463 \frac{2}{9}}{531}}{110771} = \frac{1690038 \frac{4169}{4779}}{110771}$$

sonuçlarını elde etmiş oluruz.

Şimdi (4.54)'teki toplam kesrini kareköklü işleme tabi tutarsak,

$$(4.55) \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{\left(1690038 \frac{4169}{4779}\right)^2 + 110771^2}}{110771} = \frac{\sqrt{1693665^2 + 472297 \frac{20348320}{22838841}}}{110771} > \frac{1693665 + \frac{472297 \frac{20348320}{22838841}}{2 \times 1693665 + 1}}{110771} = \frac{1693665 + \frac{10786736436097}{77362714123371}}{110771} \\ \frac{1693665 + \frac{10786736436097}{77362714123371}}{110771} > \frac{1693665 + \frac{666 \frac{1}{3}}{4779}}{110771} = \frac{1693665 + \frac{1999}{14337}}{110771} \end{cases}$$

ve bununla da (4.54)'ü taraf tarafa toplarsak,

$$(4.56) \quad \frac{1690038 \frac{4169}{4779}}{110771} + \frac{1693665 + \frac{1999}{14337}}{110771} = \frac{3383665 \frac{14506}{14337}}{110771}$$

sonucunu elde ederiz.

Şimdi de (4.56)'daki toplam kesrine karekök alma işlemini uygularsak,

$$(4.57) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\left(3383665 \frac{14506}{14337}\right)^2 + 110771^2} = \sqrt{3385516^2 + 4467573 \frac{11326117}{205549569}} > \frac{3385516 + \frac{4467573 \frac{11326117}{205549569}}{2 \times 3385516 + 1}}{110771} = \frac{3385516 + \frac{918307715952154}{1391782914834777}}{110771} \\ \frac{3385516 + \frac{14337 \times \frac{918307715952154}{1391782914834777}}{14337}}{110771} > \frac{3385516 + \frac{9459 \frac{7}{11}}{14337}}{110771} = \frac{3385516 + \frac{104056}{157707}}{110771} \end{array} \right.$$

ve bunu da (4.56) ile taraf tarafa toplarsak,

$$(4.58) \frac{3383665 \frac{14506}{14337}}{110771} + \frac{3385516 + \frac{104056}{157707}}{110771} = \frac{6769220 \frac{35305}{52569}}{110771}$$

kesrine ulaşmış oluruz.

Bu toplam kesrine de aynı kareköklü işlemi yapar,

$$(4.59) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\left(6769220 \frac{35305}{52569}\right)^2 + 110771^2} = \sqrt{6770126^2 + 12659294 \frac{247579456}{2763499761}} > \frac{6770126 + \frac{12659294 \frac{247579456}{2763499761}}{2 \times 6770126 + 1}}{110771} \\ = \frac{6770126 + \frac{34983956191008190}{37418485929379533}}{110771} = \frac{6770126 + \frac{52569 \times \frac{34983956191008190}{37418485929379533}}{52569}}{110771} > \frac{6770126 + \frac{49148 \frac{8}{11}}{52569}}{110771} = \frac{6770126 + \frac{180212}{192753}}{110771} \end{array} \right.$$

ve bunu (4.58) ile taraf tarafa toplarsak,

$$(4.60) \frac{6769220 \frac{35305}{52569}}{110771} + \frac{6770126 + \frac{180212}{192753}}{110771} = \frac{13539347 \frac{350732}{578259}}{110771}$$

toplam kesrini ve bunun da aynı şekilde karekökünü alırsak,

$$(4.61) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\left(13539347 \frac{350732}{578259}\right)^2 + 110771^2} = \sqrt{13539800^2 + 19784917 \frac{91009191469}{334383471081}} > \frac{13539800 + \frac{19784917 \frac{91009191469}{334383471081}}{2 \times 13539800 + 1}}{110771} \\ = \frac{13539800 + \frac{6615749312518676746}{9054970977868518681}}{110771} = \frac{13539800 + \frac{578259 \times \frac{6615749312518676746}{9054970977868518681}}{578259}}{110771} > \frac{13539800 + \frac{422488}{578259}}{110771} = \frac{13539800 + \frac{64987}{192753}}{110771} \end{array} \right.$$

ve bunu (4.60) ile taraf tarafa toplarsak,

$$(4.62) \frac{13539347 \frac{350732}{578259}}{110771} + \frac{13539800 + \frac{64987}{192753}}{110771} = \frac{27079148 \frac{64987}{192753}}{110771}$$

sonucuna ulaşmış oluruz.

Son olarak bu toplam kesrine de aynı kareköklü işlemi uygular,

$$(4.63) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\left(27079148 \frac{64987}{192753}\right)^2 + 110771^2} = \sqrt{27079374^2 + 48648030 \frac{8216959576}{37153719009}} > \frac{27079374 + \frac{48648030 \frac{8216959576}{37153719009}}{2 \times 27079374 + 1}}{110771} \\ = \frac{27079374 + \frac{1807455245178361846}{2012198942224959741}}{110771} = \frac{27079374 + \frac{192753 \times \frac{1807455245178361846}{2012198942224959741}}{192753}}{110771} > \frac{27079374 + \frac{173140 \frac{1}{7}}{192753}}{110771} = \frac{27079374 + \frac{1211981}{1349271}}{110771} \end{array} \right.$$

ve bunu (4.62) ile taraf tarafa toplarsak,

$$(4.64) \frac{27079148 \frac{64987}{192753}}{110771} + \frac{27079374 + \frac{1211981}{1349271}}{110771} = \frac{54158523 \frac{35291}{149919}}{110771}$$

aranan kesrini bulmuş oluruz.

İşte bu son sonuçla (4.46)'daki üst sınıra şu şekilde yaklaşmış oluruz:

$$(4.65) \pi < B_8 = 3.14159(70343 \dots) < \frac{1536 \times 110771}{54158523 \frac{35291}{149919}} = 3.14159(70346 \dots) < \frac{195888}{62353} = 3.14159(70362 \dots).$$

Fakat buradaki üst sınırdan **HERON**'un üst sınır kesrini elde etmek mümkün değildir; çünkü 110771 asaldır!



**Resim 4.3.** ARŞİMET çemberlerle çalışırken, onu öldürmeye gelen bir Romalı asker. Rivayete göre ARŞİMET şöyle demiş: “Çemberlerime dokunma!”

#### GTA V ONLINE’da ARŞİMET ile Karşılaştım!

GTA V’i 2015’ten beri oynarım. Ama 25.08.2019’da STEAM’den “[Criminal Enterprise Starter Pack](#)”ı satın aldıktan sonra toplamda 10,000,000 \$’lık içerik verildiğini görünce ilk olarak Paleto Ormanı’ndaki [bunkerı](#) aldım. Bu bunker bedava idi ama konumu nedeniyle bana bir şeyi hatırlatıyordu ve “*Buldum (Eureka), burası ARŞİMET’in Siraküza’daki mezarının olduğu yere çok benziyor!*” dedim. Eğer bunun için [PIERRE HENRI DE VALENCIENNES](#)’in “[ÇİÇERO’nun ARŞİMET’in mezarını keşfetmesi, 1787](#)” adlı tablosuna bakarsanız ne demek istediğimi daha iyi anlarsınız. İşte bu benzerliği ilk farkettiğimde resmen dilim tutulmuştu ve ROCKSTAR tarafından bu bunkerın bedava verilmesine şaşırıyordum. Yani orada sırf ARŞİMET’e yakın olmak için boş boş tur attığım çok oldu! Acaba aşırı sevgi öldürür mü?

İşin kötüsü, **HERON**,

$$(4.66) \frac{195888}{1536} = \frac{4081}{32}$$

sadeleştirmesine göre bir ipucu bırakmıştır. Yani 4081 sayısı  $\sqrt{3}$ ’ün alt sınırının paydasına ait bir çarpan olmalıdır.

Aynı şekilde,

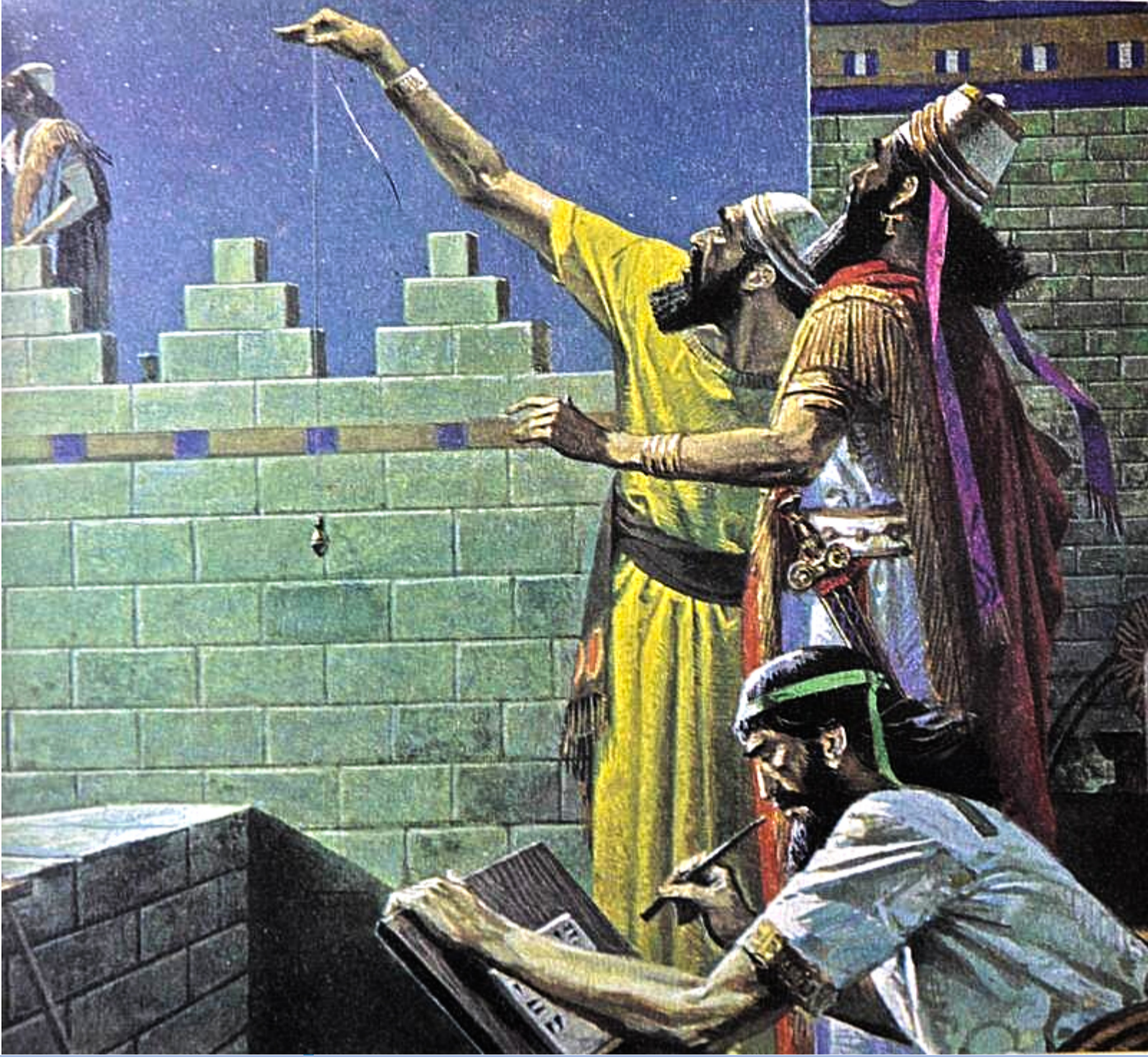
$$(4.67) \frac{211872}{1536} = \frac{2207}{16}$$

sadeleştirmesinden 2207’nin  $\sqrt{3}$ ’ün üst sınırının paydasından kalma bir parça olduğu anlaşılmaktadır. Fakat ne var ki **ARŞİMET**’in seçme yöntemine göre (bkz. (4.47) ve (4.49)’a)  $\sqrt{3}$ ’ün paydasının bir çarpanı 4081 ve 2207 olan alt ve üst sınırları mevcut değildir. Bu ise tüm tahmincilerin ortak karar kıldığı **HERON**’un iddiasını çürütür!

Özetle, **HERON** ya da onun adına (4.1)’i veren kişi, bizimle matrak geçmiş görünür. Çünkü **ARŞİMET**’in verdiği iddia edilen (4.46)’daki kesirleri elde edebilmek için en hafifi (4.53)’te görülen kareköklü işlemlere ve onlarca basamaklı sayılarla 4 işlem yapmamıza gerek vardır. Yani yukarıdaki ispatı sırf bunun için yaptım. Özetle, bu ispatta  $\sqrt{3}$ ’ün alt sınırındaki kesrin paydasındaki sayı ister (4.49)’daki gibi asal olsun isterse asal olmasın, bununla ortaya çıkan **BÜYÜK EL HESAPLARI** ilk kez 17. yy. Hollandası’nda **VAN CEULEN** ve **SNELLIUS** tarafından yapılıyordu. Yani bu tür hesapların **ARŞİMET** zamanında yapılması mümkün değildi. Fakat bundan önce, (4.66) ve (4.67), zaten bu tür hesaplara girmememiz gerektiğini söylüyordu!

## EK 2: Çağlar Boyunca Saros Döngüsündeki PTOLEMY'nin II'si

15.08.2012, 21:55.



**Resim 4.4.** Babilli astronomlar Ay üzerinde gözlem ve hesaplamalar yaparken. Orada herkes Babilliler'in "Hesap yapan iyi yazamaz; iyi yazan hesap yapamaz!" atasözüne göre hareket eder. Yani elinde çekül olan ve hesap yapan kişi, Rahip'tir ve onun gözlem sonuçlarını kayda geçiren kişi ise, Kâtip'tir! Fakat **Celal Şengör**, "[Birbirini yalanlayan inançlar ile bilim yapılabilir mi?](#)" konferansında bu görüntüyü yanlış anlamış ve "[Bu gördüğünü yazıyor!](#)" demiştir. Demek ki oradan öyle görüyor! Hayır, benim sıkıldığım nokta bu değil; "[Kim Rahip \(Papaz\) olacak?, Kim depocu olacak?, Kim Kâtip olacak?...](#)" diye sayarken bu adamları "[boş adam \(işçi gücü olmayan adam\)](#)" kategorisine sokması idi!

WIKIPEDIA'daki bilgilerimize göre [1 Güneş Yılı](#) (GY)'nin [1 Ay Ayı](#) (AA = SA)'na oranı,

$$(1) \quad 1 \frac{\text{GY}}{\text{SA}} = \frac{1 \text{ GY}}{1 \text{ AA}} = \frac{365.256363004}{29.530589}$$

dur.

Söz konusu bu çevrim M.Ö. 747'de Babilliler'de (bkz. "[Saros Cycle Dates and Related Babylonian Astronomical Texts](#)", S. 47)

$$(1.1) \quad 1 \frac{\text{GY}}{\text{SA}} = \frac{223 \times 6,0}{18 \times 6,0 + 10; 30}$$

ve Grekler'de <sup>(16)</sup>,

$$(1.2) \quad 1 \text{ GY} = \frac{235}{19} \text{ SA}$$

idi (SA: Sinodik Ay).

Fakat (1) oranındaki pay ve paydadaki günler sabit değildir ama, bu oran ağırlık teşkil eden bir sabit değere götürür bize. Bu nedenle (1.1) ve (1.2)'deki çevrimlerin her ikisi de kayda değer bulgulardır. Ancak (1)'deki esas çevrime göre (1.2)'deki oran, (1.1)'e göre daha iyi bir çevrimdir!

<sup>(16)</sup> M.Ö. 432'de **ATİNALI METON** tarafından keşfedildiği söylenen ve "**Metonik Çevrim (Metonic Cycle)**" denilen bu çevrim yine Babilliler'den gelmekteydi (Bkz. **Otto Neugebauer**'in "[Studies in ancient astronomy VI. The 'Metonic Cycle' in Babylonian Astronomy, 1946](#)", "[Babylonian Planetary Theory, 1954](#)", "[A History of Ancient Mathematical Astronomy, 1975](#)", "[Astronomical Cuneiform Text, 1975](#)", "[A Mathematician's Journeys, 2016](#)" vb. kitaplarına). Bu çevrim **Antikitera makinesinde** kullanılmıştır (Bkz. "[Zaman Başlarken](#)", S. 306-310. Ayrıca Antikitera makinesinin nasıl çalıştığını görmek için Mathematica'daki "[Antikitera Mekanizması](#)"na da bakabilirsiniz).

Burada dikkat edilmesi gereken nokta şudur: (1)'deki esas çevrimden istenildiği kadar oranın ve bunlar içinde daha iyi oranların tanımlanabileceğinin mümkün olmasıdır. Ayrıca İskenderiyeli matematikçi ve astronom [CLAUDIUS PTOLEMY \(90-168\)](#)'nin, M.S. 150'de 3;8,30 değerini verirken, bu çevrimin farkında olup olmadığını da sorgulanması gerekir!

#### 4.8. PTOLEMY'nin II'si Hakkında

PTOLEMY'nin,  $\pi$  için seksagesimal sayılarla 3;8,30 yaklaşıklığını verirken, bir daire içine düzgün kirişler 360-genini çizerek ve günümüzdekine benzer trigonometrik kuralları kullanarak hesapladığı söylenir. Fakat buna ilişkin elimizde bir kayıt yoktur. Bu konuda bildiğimiz tek şey, PTOLEMY'nin günümüze ulaşan 1515 tarihli Latince basılmış "[ALMAGESTUM](#)" adlı kitabının "SEXTA (6.)" bölümündeki 68. sayfasındaki Ay ile ilgili bir çalışmada  $\pi$  için 3;8,30 değerini kullanmış olduğudur (Y.N. M.Ö. 2000'lerde de Susa tabletinde 3;7,30 değeri verilmişti. Yani PTOLEMY'ninki bundan 60'ta 1 daha iyidir). Bu sayfada  $\pi$  için 3;8,30 değerinin nasıl bulunmuş olduğu belirtilmemiştir. Fakat Viyana Üniversitesi Astronomi Enstitüsü'nün "250 Jahre (250. Yıl)" anısına yayınladığı bu eserde, 68. sayfanın kenarındaki boşluğa çizimin yanına kahverenkli ve kırmızı renkli birtakım çalışma notları bırakılmış ve PTOLEMY'nin  $\pi$  için keşfettiği 3;8,30'ın ARŞİMET'in  $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$  kesirleri kullanılarak bulunmuş olabileceğine ilişkin bir not düşülmüştür. Ancak bu notu düşen kişi yanılıyor. Çünkü bu sınırların aritmetik ortalamasından,

$$\pi = \frac{3\frac{10}{71} + 3\frac{1}{7}}{2} = 3;8,30,39 + \frac{59\frac{4}{7}}{71 \times 60^3}$$

görüldüğü üzere PTOLEMY'nin 3;8,30 değerine ulaşmak mümkün değildir. Zira PTOLEMY, hiçbir hesabında böyle bir değeri 3;8,30 olarak yuvarlatmaz. Neden? Çünkü  $60^3 = 216000$ 'de 1'ler basamağındaki sayı 39 olup, 30'dan büyüktür. Bu değer bir önceki basamağa en kötü yaklaşımla 0.5 (yarım) olarak yuvarlatılır; 0 olarak değil!

Fakat burada şu yapılmış olabilir: ARŞİMET'in  $\pi$  için verdiği sınırların aritmetik ortalaması yerine daha da hızlandırıcı bir ekstrapolasyon, örneğin SNELLIUS'un algoritmasını kullanırsak,

$$\pi = \frac{2 \times 3\frac{10}{71} + 3\frac{1}{7}}{3} = 3;8,29,27, \dots$$

ile 4 ondalığı doğru olan daha iyi bir yaklaşıklığını bulmuş oluruz. Yani bundan PTOLEMY'nin 3;8,30 değerine ulaşmak mümkündür!

#### Bir Anım

Az önce (15.08.2012, 21:55) öğrendiğime göre, futbolda Avusturya'ya karşı 2-0 yenik olduğumuzu ve bir sonraki maçta da Hollanda ile oynayacağımızı haber aldım. Muhtemelen Hollanda da bize bir 4 çeker. Çok ilginçtir; ben Avusturya ile Hazırlık Maçı oynadığımız kanalı ararken, maçın Kanal 24'te oynandığını tespit ettim ve ekranın sol-üst köşesinde 10. dakikayla birlikte skorun da 2-0 olduğunu gördüm. Ben zannettim ki skor 2-0 olduğuna göre 2. devrenin 10. dakikası oynanıyor. Ama hayır, öyle değilmiş; maçın ilk devresinin 10. dakikası imiş. Çünkü 2. dakikada Veli Kavlak, geri pasla kaleci Mert'i zora sokarak gole neden olmuş ve 5. dakikada da penaltı olmuş ve 6. dakikada kullanılan bu penaltı gol olmuş. Gerçekten de o anda şoka girdim. Çünkü her ne kadar hazırlık maçı da olsa, bu sonuç beni şoka sokmuştu (Bkz. "[Avusturya 2-0 Türkiye](#)").

İşte ben, yukarıda PTOLEMY'nin  $\pi$  için 3;8,30 yaklaşıklığını nasıl bulduğunu (orijinal kaynağa da bakarak) araştırırken bu şok sonuçla karşılaştım. Bu arada SNELLIUS'un Leydenli yani bir Hollandalı olduğunu belirtmeden geçemeyeceğim. Yani Hollandalılar gerçekten çok zeki insanlardır; yabana atmamak gerekir!

Her neyse, PTOLEMY'nin  $\pi$  için 3;8,30 değerini nasıl bulduğu tarihin karanlığında kalmakla birlikte, bu değer (1)'de neden önemli olduğunu kendi keşfimle anlatabilirim!

Öncelikle PTOLEMY'nin verdiği değer 3;8,30 olduğuna göre, bunu (1.1)'deki Babililer'in formatında yazmaya çalışırsak 3;8,30 değerini kesirden kurtarmamız gerekir.

Şu halde 3;8,30'u 6,0 ile çarparsak,

$$6,0 \times 3;8,30 = 18,51$$

sayısını elde ederiz ki bu, (1.1) ile (1.2)'deki kesirlerin paydaları arasında bulunmakla birlikte (1.2)'dekine daha yakındır.

Şimdi PTOLEMY'nin 3;8,30 değerini yukarıdaki eşitliğe göre (1.1)'deki gibi tanımlamaya çalışırsak,

$$\pi = 3;8,30 = \frac{18,51}{6,0} = \frac{6}{6} \times \frac{18 \times 1,0 + 51}{6,0} = \frac{1}{6} \times \frac{18 \times 6,0 + 5,6}{6,0}$$

eşitliklerine göre

$$(1.3) \quad 1 \frac{GY}{SA} = \frac{k}{\pi} = 6k \times \frac{6,0}{18 \times 6,0 + 5,6}$$

yaklaşımı söz konusu olur. Çünkü burada kesrin tersi 18.85 olup (1.1) ile (1.2)'nin paydaları arasında kalır (ki bu sefer de (1.1)'deki kesir 6,0 ile sadeleştirilmelidir).

İşte (1) ile (1.3)'teki eşitliklerden k sabiti,

$$k = 38;51,30,31,13, \dots \cong 38;51,30$$

olarak elde edilir. Burada 2 ondalık doğrulukla  $k = 38.85847791 \dots \cong 38\frac{6}{7}$  ve  $\frac{18 \times 6,0 + 5,6}{6,0} = 18.85$  değeri bir ondalık kesir olmasına rağmen, 2 ondalık doğrulukla  $18\frac{6}{7}$ 'ye eşit olması gerçekten de dikkatimi çekti ve bir an için PTOLEMY'nin  $\pi = 3;8,30$  değerini Saros çevriminde kullanmış olduğunu zannettim!

Eğer PTOLEMY,  $\pi = 3;8,30$  değerini (1)'deki çevrimde kullandı ise, ona göre,



## EKLER

$$(1.4) \quad 1 \frac{GY}{SA} = \frac{k}{\pi} = \frac{38;51,30}{3;8,30}$$

dir ve bu sonuç (1)'i 4 ondalıkla doğrular!

Fakat bundan çok daha ilgi çeken bulgu şudur: Bu sonuçlara göre k ile  $\pi$ 'yi toplarsak,

$$k + \pi = 38;51,30 + 3;8,30 = 42;0$$

sonucu elde edilir. Bu, 60 tabanında da, 10 tabanında da 42 demektir!

Diğer taraftan, (1)'deki verilere göre aynı işlemi yaparsak karşımıza son derece şaşırtıcı bir sonuç olan,

$$k + \pi = \pi \times 1 S\check{C} + \pi = \left( \frac{365.256363004}{29.530589} + 1 \right) \pi = 41.9991551 \dots$$

sonucu çıkar. Yani bu değer rahatlıkla 42 (ki Babilliler'e göre 42;0) olarak alınabilir.

Demek ki (1)'deki çevrimi  $\pi$ 'ye göre tanımlarsak (1.4)'te  $k = 42 - \pi$  olmak üzere,

$$(1.5) \quad 1 \frac{GY}{SA} = \frac{42 - \pi}{\pi} \quad (03.08.2012, 02:00)$$

olur ki bu, Dünya ve Ay arasındaki ilişkiyi gösterir. Ama **PTOLEMY**, **VIETÆ** ve daha nice  $\pi$  ile uğraşan matematikçi ve astronomlar bu mükemmel ilişkiyi göremediler!

Çok değil, **ARISTOTELES**'ten **KEPLER (1571-1630)**'e kadar "**Kristal Küreler**" içindeki gezegenlerin yörüngeleri birer çember olarak kabul ediliyordu. Bunlarda tabii ki astronomik uzaklıklar nedeniyle  $\pi$  kullanılmıyordu ama Dünyamızın büyüklüğü söz konusu olduğunda, Dünyamızın bir küre olması hesabıyla  $\pi$  kullanılıyordu. **ERATOSTHENES**, **SNELLIUS** hep bu şekilde hesap yaptılar. Fakat **SNELLIUS**, "**Eratosthenes Batavus (Hollandalı Eratosthenes), 1617**"de **ERATOSTHENES**'in hesabını geliştirerek Dünyamızın çevresini % 3.5 hatayla 38,653 KM olarak hesapladı! (Bkz. "**Eratosthenes Measures the Earth**")

### (1.5)'in Geometrik Anlamı

Şimdi bulduğumuz bu sonucun geometrik anlamının "**Kepler Kanunları**"ndan ikincisine göre çözülebileceği sanılıyorsa bu, doğru değildir. Çünkü 2. Kepler Kanunu Güneş Sistemi'ndeki gezegenler ya da **EINSTEIN**'in "**Genel Görelilik Teorisi**"nin kanıtlandığı 19 Mayıs 1919'daki Tam Güneş Tutulması'ndaki gibi büyük cisimler için geçerli olabilir bu!

Diğer taraftan, fizikteki "**3 Cisim Problemi**"nin çözümsüzlüğü nedeniyle Güneş, Dünya ve Ay'ın hareketlerini kontrol eden bir kanuna, dolayısıyla (1)'in fiziksel ve geometrik bir tanımına sahip değiliz. Bu konuda tek bildiğimiz şey, Ay Dünya'nın çevresinde  $42 - \pi$  kere tur atarken Dünya'nın da Güneş etrafında  $\pi$  kere tur atmış olduğudur. Örneğin, Meton'un çevrimi için Dünya Güneş'in etrafında 19 kez tur atarsa, Ay Dünya'nın çevresinde,

$$\frac{\pi}{19} \frac{42 - \pi}{x}$$

$$x = 19 \times \frac{42 - \pi}{\pi} = 235.0112892 \cong 235$$

kere tur atar!

Bir başka örnek: **ARŞİMET**'in  $\pi \cong 3 \frac{1}{7}$  yaklaşığını alırsak,

$$(1.6) \quad 1 \frac{GY}{SA} = \frac{42 - 3 \frac{1}{7}}{3 \frac{1}{7}} = \frac{38 \frac{6}{7}}{3 \frac{1}{7}} = \frac{136}{11}$$

çevrimini elde ederiz ki kesrin payının  $k = 38 \frac{6}{7}$  olmasını yukarıdaki (1.4)'te **PTOLEMY**'nin  $\pi$  değerinde yaptığım çalışmada çok yakın olduğunu görmüştük!

Fakat Mathematica 7.0'da (1.5) kesrini rasyonelleştirdiğimiz zaman,

$$\text{In[1]:= Table [Rationalize [ \frac{42 - \pi}{\pi}, 10^{-n} ], {n, 1, 10} ]$$

$$\text{Out[1]:= } \left\{ \frac{37}{3}, \frac{99}{8}, \frac{235}{19}, \frac{1039}{84}, \frac{4391}{355}, \frac{18603}{1504}, \frac{31776}{2569}, \frac{122713}{9921}, \frac{122713}{9921}, \frac{2117897}{171226} \right\}$$

**Tablo 4.1.** Rationalize'daki toleransı ne kadar düşürürseniz düşürün, yani n'yi ne kadar küçültürseniz küçültün **PTOLEMY**'nin (4.32)'deki  $\pi$ 'sine göre (4.35)'i görmemiz mümkün değildir. Neden? Çünkü **PTOLEMY**'nin çevrimi Meton çevrimine çok yakındır ve bu yüzden Rationalize'da sadece kırmızı renkle gösterdiğim Meton çevrimi görünür!

### Antikitera Mekanizması'ndaki Sinodik Ay Hesabı

M.Ö. 100-150'ye tarihlenen Antikitera mekanizmasında e2 çarkı (ki e5 çarkına ekli olarak e-ekseninde dış saft olduğuna inanılıyor) her sinodik ayda 1 kez döner ve bu,  $\frac{235}{19} \times \frac{254}{235} = \frac{254}{19}$  oranını gerektirir. Bu oran mekanizmadaki b2-c1+c2-d1+d2-e2 çarklarına göre  $\frac{64}{38} \times \frac{48}{24} \times \frac{127}{32} = \frac{2 \times 32}{2 \times 19} \times \frac{2 \times 24}{24} \times \frac{127}{32} = \frac{2 \times 127}{19} = \frac{254}{19}$  şeklinde işler (Bkz. "**Decoding the Antikythera Mechanism: Investigation of an Ancient Astronomical Calculator**", S. 20, "**The Sidereal Month**". Ayrıca mekanizmadaki çarkların pozisyonları ve işleyişleri hakkında "**Decoding the ancient Greek astronomical calculator known as the Antikythera mechanism**"deki S. 12'ye bakabilirsiniz).

Oysa Antikitera mekanizmasındaki bu oran (1.5)'ten  $\frac{42 - \pi}{\pi} \cong \frac{235}{19} \Rightarrow \frac{42}{\pi} \cong \frac{235}{19}$  yaklaşımına göre  $\frac{42}{\pi}$  demektir. Bu yaklaşımdaki  $\pi \cong 3 \frac{18}{127}$ 'dir. Yani Eski Yunanlılar, Saros döngüsündeki hesaplarda hayatlarını adadıkları  $\pi$ 'nin rol oynadığını bir türlü görememişler!

**THALES'in Bildirdiği Tam Güneş Tutulması**

Geç Babilonya Metinleri (LBAT) için "[Saros Cycle Dates and Related Babylonian Astronomical Texts](#)" kitabının "II. Saros Cycle Texts (Saros Çevrimi Metinleri)"nin 5. sayfasında görüldüğü üzere aşağıdaki (1.8)'deki her bir Saros'ta  $2 \times 19 = 38$  tane Güneş tutulması tarihi verilir. M.Ö. 750-100'de şiddeti en az 0.9 olan Güneş tutulmalarının en başına [THALES'in bildirdiği M.Ö. 28 Mayıs 585'deki tam Güneş tutulması](#) yerleştirilmiştir. **HERODOT**, **THALES**'in bildirdiği bu Tam Güneş Tutulması'nı şöyle anlatır:

"74. - **Kyaxares** bunları geri istedi, ama **Alyattes** vermedi. Bu yüzden Lydialılar ile Medler arasında 5 yıl süren bir savaş çıktı, sık sık Medler Lydialıları dövdüler, sık sık da onlar tarafından dövüldüler. Hele bir seferinde tuhaf bir gece savaşıma da tutuştular; savaş denk koşullar altında sürüyordu ki, 6. yılda, bir çarpışma sırasında ve ortalığın en çok karışmış olduğu bir anda gündüz, birden yerini karanlığa bıraktı. Bu ışık tutulmasını **Miletoslu Thales**, İonialılara daha önceden bildirmişti; yılına, gününe kadar. [Ama Lydialılar ve Medler gün ortasında gece olduğunu görünce, çarpışmayı kestiler](#) ve hemen bir anlaşma, bir barış sözleşmesi yaptılar. **Kilikialı Syennesis** ve **Babilili Labynetos**'u kendilerine aracı seçtiler. Bunlar, barış yeminleri getirip götürmektense, iki kralı bir araya getirecek bir evlenme tezgahladılar; **Alyattes**, kızı **Aryenis**'i **Kyaxares**'in oğluna, **Astyages**'e versin, dediler; zira bağ sağlam olmazsa uzlaşma dayanıksız olur. -Bu halklarda yemin Yunanlılarda olduğu gibidir, ayrıca bir de kollarının derisini çizip karşılıklı kanlarını yalarlar.", [Tarih/1. Kitap: KLIO/74. Parça.](#)

Fakat NASA, bu tam Güneş tutulmasını SAROS 57 serisinde [M.Ö. 28 Mayıs 584](#)'e tarihler. Ben bu tutulmanın nasıl gerçekleşmiş olduğunu [Starry Night Pro Plus 6.0](#) programında baktım ve İstanbul'dan bile gözlemlenebildiğini gördüm!

kesirlerinden görüldüğü gibi  $\frac{136}{11}$  kesrinin, dolayısıyla **ARŞİMET**'in  $\pi = 3\frac{1}{7}$  değerinin listeye giremediğini görürüz. Yani (1.5)'e göre (1) için **ARŞİMET**'inkinden çok daha hassas (ki bu, düzgün 360-gen ya da bunun civarındaki düzgün çokgenler demektir)  $\pi$  değerine ihtiyaç vardır.

**4.9. PTOLEMY'nin Çevrimi**

Bu çevrim "**Babil Çevrimi**" olarak da bilinir. Çünkü **PTOLEMY** bu çevrim hakkında Yeni Babil Dönemi belgelerini, özellikle Ay ile ilgili gözlem ve tutulma tablolarını incelemiş (bkz. "[Nabonassar](#)") ve kendisi de Ay ile ilgili gözlemler yaparak bunları tablolar halinde düzenlemiş ve bu çevrimin doğruluğunu kontrol edip daha iyi bir çevrime ulaşmak istemiştir. Bunun böyle olduğunu bizzat 1515 tarihli (ki **GUTENBERG** tarafından basılan ilk kitap İNCİL'den 59 yıl sonra) Latince olarak basılan "[ALMAGESTUM](#)" kitabının 36. sayfasının kenarlarındaki boşluklara notlar çıkartan biri tarafından (muhtemelen bir astronom) öğreniyoruz. Elbette **GALILEI GALILEO** Latince'yi anadili gibi konuşan ve bu tür kitaplara eğilimli biri olarak bilinir; ama bu notları çıkartan kişi de en az onun kadar ehil biridir. Şimdilik bu gizemli kişinin ismini çıkartamadım ama ben, bu kişiyi **DIOFANT**'ın "**Arithmetica**" kitabındaki sayfa boşluklarını değerlendiren ünlü Fransız matematikçisi **PIERRE DE FERMAT**'a benzetiyorum. Aslında benzetmeye de gerek yok; çünkü bu durum o dönemde bir gelenek halini almıştı. Söz konusu bu kişi de 36. sayfanın sağ tarafındaki boşluğu kullanarak **PTOLEMY**'nin çevrimi hakkında bazı notlar ve sonuçlar çıkartmış. Ona göre **PTOLEMY**'nin çevrimi, (1.1)'deki Babil çevrimindeki gibi, şöyledir:

$$(1.7) \quad 1 \frac{\text{GY}}{\text{SA}} = \frac{223 \times 6,5; 15,33,20}{18 \times 6,5; 15,33,20 + 10; 40}$$

**PTOLEMY** bu formülde 1 yılı  $6,5; 15,33,20 = 365\frac{1}{4}\frac{1}{108}$  ( $= 365\frac{7}{27}$ ) gün olarak alır (ki burada inanması güç ama Antik Yunan belgelerinde  $365\frac{1}{4}\frac{1}{76}$  ( $= 365\frac{5}{19}$ ) değerinin kullanıldığından söz edilir. Bu sonuçlar 1 yıl için [JUL SEZAR](#) dönemindeki gibi  $365\frac{1}{4}$  gün olmasıyla yetinilmediği, biraz daha hassas hesaplamalar yapıldığını gösterir). Çünkü bunun için sayfa kenarında  $6585\frac{1}{3}$  ( $= 6585; 20$ ) kaydı vardır. Bu değer Babil çevriminde de geçen,

$$(1.8) \quad 1 \text{ Saros} = 223 \text{ Sinodik Ay} = 6585; 20 \text{ Gün}$$

eşitliklerinden elde edilir. Gerçi bu kaydı koyan kişi, 1 yıl için  $365\frac{1}{4}$  değerini yazmıştır ama bu değer sadece bir yaklaşıktır.

Son paragrafta not çıkartan kişi,  $365\frac{1}{4}$ 'ün  $126007$ 'ye bölümünden elde edilen sonucun tam kısmının 344 olduğundan bahsetmiş. Bu çıkarım,

$$(1.9) \quad \frac{126007}{365\frac{1}{4}\frac{1}{108}} = 344.9796187$$

sonucundan elde edilmiştir. Fakat o, bu işlemde 1 yılı  $365\frac{1}{4}$  gün olarak alır. Tabii ki 1 yıl bu şekilde ele alındığında, bu işlemin sonucu 345'e biraz daha yaklaşıp.

Demek ki bu çıkarımı yapan kişi, bu işlemin sonucunun tam kısmının 344 olduğunu belirterek 345'e yaklaştığını, yani 345 yıla yaklaştığını dikkat çekmek istemiştir!

**Not 4.1.** Buradaki EK 1 "**Mısır İTsi ya da Rhind Matematik Papirüsü'ndeki İT Hakkında**" adlı A3 formatındaki 44 sayfalık çalışmamın Bölüm 2'sinden ve EK 2 de EK 1'inden alınmadır!

*Derya PAMUK TULLAM*

## İTHAF: APOLLO 11'İN AY'A İNİŞİNİN 50. YIL DÖNÜMÜ



Resim 4.5. Albay KAY BRUBAKER (JAMES BROLIN), PETER WILLIS (SAM WATERSTON) ve JOHN WALKER (O. J. SIMPSON) çölde kaçarlar, [CAPRICORN ONE \(US/UK 1978\)](#) SAM WATERSTON, JAMES BROLIN, O.J. Simpson. Bana göre O. J. SIMPSON, yukarıda görüldüğü üzere, "[Capricorn One](#)"da hayatının koşusunu yaptı!

Bugüne kadar APOLLO 11'in Ay'a inişi hakkında çok şey yazıldı, çizildi. Özellikle yukarıdaki film 1977'de vizyona sürüldüğü anda kafalarda çok soru işareti oluştu. Filmde Mars'a yolculuk hazırlığındaki 3 astronotun, beklenmedik bir teknik sorunun çıkması üzerine görevi iptal olur. Fakat, başarısına gölge düşürmek istemeyen NASA, stüdyoda sanal bir Mars yolculuğu başlatır... Uzay teknolojilerine ve NASA'ya dair üretilen komplo teorilerinin en çarpıcısından yola çıkılarak gerçekleştirilen yapım, son derece dikkat çekici bir klasik olarak kabul ediliyor (Y.N. Komplo teorileri APOLLO 11 için 1970'lerin başında üretilmeye başlanmıştı. Bkz. "[Apollo 11 astronaut Buzz Aldrin recalls first moments on the moon on 50th anniversary of mission](#)" haberindeki videonun 0:45'ine). Günümüzde de küçük bir grup tarafından savunulan, aslında uzaya gidilmedi teorisi üzerine sıradışı bir uzay filmi olmakla birlikte, filmin gösteriminden bu yana 43 yıl geçmesine rağmen Mars'a yolculuk halen bir hayal olarak kaldı!

Bu arada şu anımı anlatmazsam olmaz:

"Hiç unutamadığım değil ama ... Lisesi'nde çalışırken 2004'te bir sınıfta mezun olan öğrenciler; gömleklerine, kolu kırık olan alçı kaplamasının üzerine, kravatlara ve artık ne buldularsa, onların üzerine benden o sırada revaçta olan ATA formülünü yazarak imza atmamı istediler ve ben de onları kıramadım. Bu sırada gaza gelmiş olacağım ki bir NASA çalışanının bana konuyla ilgili bir e-posta göndermiş olduğunu ağzımdan kaçırırverdim. Sen misin bunu söyleyen, Öğretmenler Odası'nda hemen bunun dedikodusunu yapmışlar ve birkaç art niyetlinin gazına gelip inanmamışlar! Bu olayı çok sonra öğrencilerimden duyunca sadece gülüp geçtim. Ama olay doğru idi. Çünkü "[The Math Forum](#)"daki [4. mesajımı](#) yazdıktan birkaç gün sonra NASA'da çalışan biri bana e-posta yollayarak orada referans olarak geçen WENNINGER'in dörtgenler hakkındaki topolojik çalışmasının elimde olup olmadığını soruyordu (ki [4. mesajımdaki](#) 1. Triangles/3 no'lu formüle 29 Ekim 2003'te 'ATA Formülü' adını vermiştim). O sırada <http://mathworld.wolfram.com> sitesi kapalı idi ve ben de ona daha önceden MathWorld'ten Word'e attığım (14.9.2000, 00:38) "[Quadrilateral from Wolfram MathWorld](#)" çalışmasını gönderdim (ki elimdeki "[Poligonlar](#)" klasörünün altındaki "[5\\_2 Quadrilaterals, 11.5.2001, 20:45](#)" web dosyasından MathWorld'ün bu tarihlerde açılmış olduğunu görüyorum). Kendisi bana teşekkür etti, o kadar. Bu kadar önemli olacağını bilseydim, o e-postayı Superonline'dan alıp saklardım!

Şimdi biraz hafızamı zorladığımda o e-posta hakkında aklıma gelen şeyler şunlardır: e-postada WENNINGER'in 4-genlerin topolojik türleriyle ilgili referansından bahsediliyor ve benden ne istendiğine dair metne odaklanmışım. Sonra bana e-postayı gönderenin ismi ve sayfanın altındaki NASA'nın logosu dikkatimi çekmişti. Adamın soyadı Almanca idi ve ben, 'Alman mı?' demiştim. Kendisi herhalde mühendis idi!

Bununla birlikte, öğrencilere WENNINGER'in referansını isteyen NASA çalışanının [4. mesajımdaki](#) 3-gen ve 4-gen formüllerimi görmüş olduğundan ilgisi çekmiş olabileceğinden bahsetmişim (ki muhtemelen Geometri'de uzman biri olduğumu düşünmüş olmalı ve o yüzden o referansı istemişti, bilemiyorum artık. Oysa amacım, orada bir tartışma başlatarak çokgenlerin alanları hakkında uzmanlaşmak istiyordum). Ama onlar buna 1'e 1000 katıp öğretmenlere anlatmışlarsa benim yapabileceğim bir şey yok!"

Şimdi 2004'te bana inanmayanlara şunu kanıt olarak göstersem acaba utanırlar mı?

MSC INTERNAL TECHNICAL NOTE  
ROMBERG INTEGRATION

By  
Matthew J. O'Malley  
May 1968

Kaynak. "[Theoretical method of numerical integration of definite integral](#)".