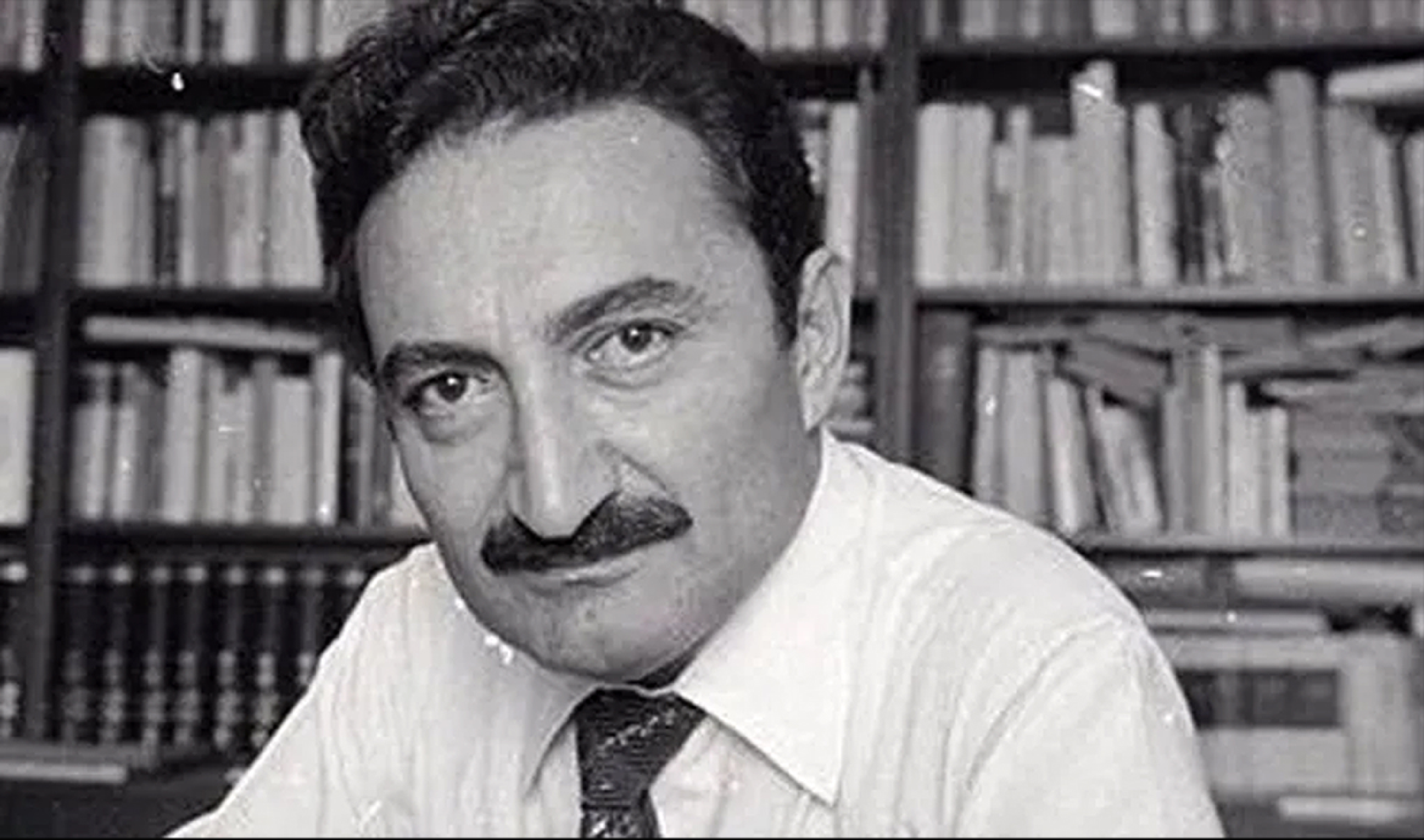


Cumhuriyetimizin ilk kuşağından olan Karaoğlan **BÜLENT ECEVİT**'i ölümünün 13. yıldönümünde sevgi, saygı ve büyük bir özlemle anıyoruz!

KAMUYA AÇIKLANACAK

GÖZDEN GEÇİRİLDİ
Derya PAMUKTULUM 21:22, 5.11.19

ONAYLANDI

D. PAMUKTULUM.

Romberg Metodu. Kronolojime göre bu metoda ilişkin **"Trapez Metodu"** ve **"Ekstrapolasyonlar (Dış Kestirimler)"** olmak üzere 2 bölüm halindeki çalışmalarımı aşağıda sunuyorum.

§1. Trapez Metodu. Bu metotla $[a, b]$ aralığında tanımlı $f(x)$'in altında kalan bölgenin alanına yaklaşım formülünü bulmak kolaydır. Fakat üniversitelerimizin ilgili bölümlerinde bu yaklaşım formülünü bulmak yerine, örneğin Ankara Üniversitesi'nin *"14. Romberg Algoritması"* adlı Açık Ders'inde olduğu gibi, Ardışık Yamuk Kuralı verilir. Hatırladığım kadarıyla, İstanbul Üniversitesi'nin Fen Fakültesi'nin Matematik bölümünde iken Nümerik Analiz dersini 1993'ün Yaz döneminde almıştım ve dersimize giren ***Nurettin Ergun***, Nümerik İntegral'deki Simpson Formülü ve Gauss-Legendre Formülü'nü anlattıktan sonra en son Trapez Metodu'ndan bahsetmişti. Galiba ön sıralarda oturan bir arkadaş sormuştu ve o da, tahtaya aşağıdaki Şekil 1.1'i çizerek yamuğun alan formülüne göre Yamuk Formülü'nün nasıl bulunacağını söylemiş ve biz de sınıfça bu formülün bulunması kolay olduğu için kimimiz kafa sallayarak, kimimiz *"tamam!"* diyerek fazla üstelememiştik (ki arka sıralarda oturduğum için yalnızca ***Nurettin Bey***'in tahtaya anılan çizimi yaptığını ve metotla ilgili birkaç şey söylediğini farketmiştim. Söylediğine göre, Trapez Metodu'ndaki yakınsaklık ekstrapolasyonla hızlandırılabiliniyormuş ve buna **"Romberg Metodu"** deniyormuş. Romberg Metodu, hatalardan yararlanılarak doğruyu tahmin etme yöntemi olduğundan, diğer yöntemlerden daha etkili imiş!). Ama aşağıdaki bulgular, Trapez Metodu'nun esaslı bir şekilde incelenmesinin gerektiğini söylüyor.

Peki ***Nurettin Bey***, Romberg Metodu'nu neden anlatmadı?

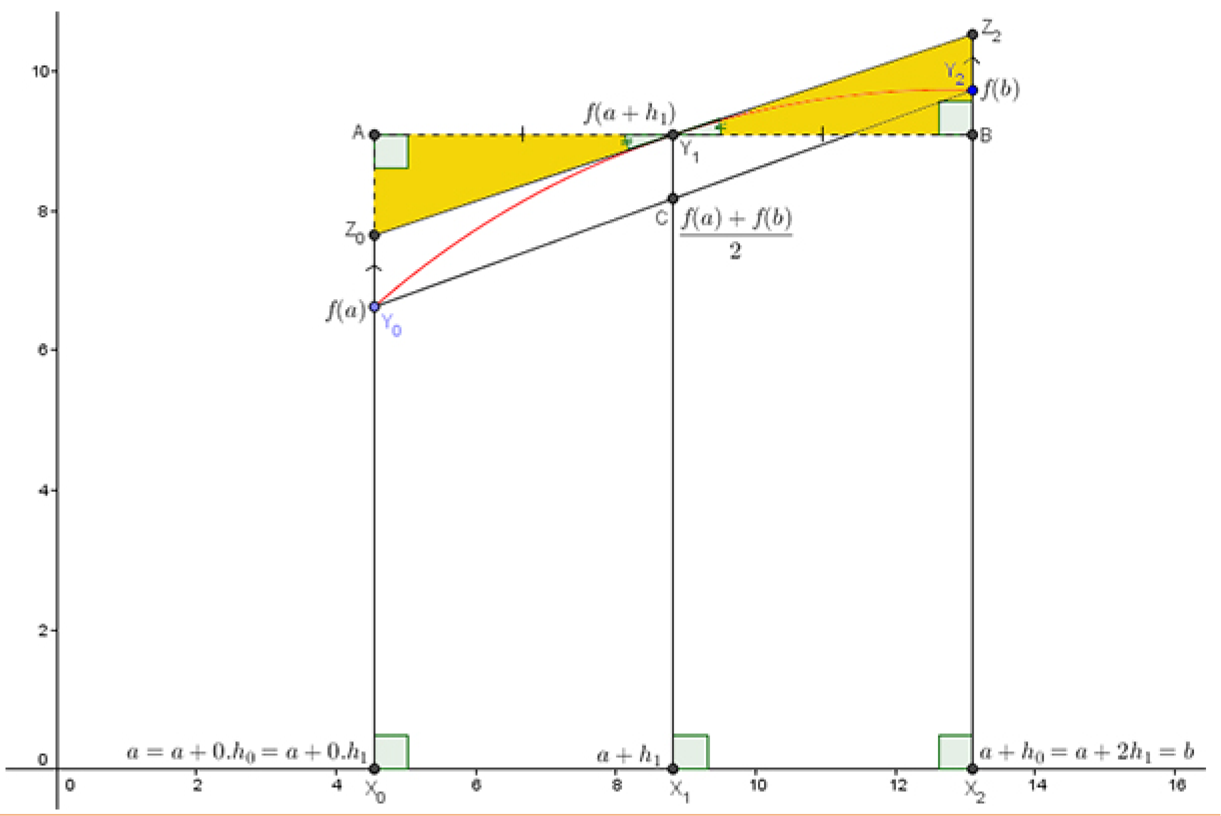
Bu sorunun yanıtını o sırada vermem mümkün değildi (ki bu soru şimdi aklıma geldi); ama şimdi, Simpson Formülü'nün Romberg Metodu'ndaki ekstrapolasyondaki ilk adımda (Huygens Algoritması) elde edilen formül olduğundan, neden Romberg Metodu'nu anlatmadığını anlamış bulunuyorum. Yani Simpson Formülü Romberg Metodu'nun bir uygulaması olduğundan, bu uygulamayla yetinmemizi uygun görmüş (Bkz. "*Romberg Algoritması*", S. 9-14). Çünkü "*Romberg Algoritması*"ndaki (3) no'lu Trapez formülü, (4) no'lu Richardson ekstrapolasyonu, 8. sayfadaki Romberg Tablosu ve 9-10. sayfalardaki teoremin ispatıyla uğraşmak çok zaman ister ve siz, bütün bunları öğrenciye yükleyemezsiniz. Ancak şimdilerde Romberg Metodu'nun ders olarak verildiği bölümlerimiz de yok değil. Fakat oralarda da bu metodun Teorem-İspat bazında ne kadar sağlıklı bir şekilde verildiği kafamda soru işareti oluşturuyor. Yani görebildiğimi kadarıyla, bu bölümlerde Romberg Metodu hakkında "*Romberg Algoritması*"ndan daha ötesine gidilmediğidir!

Şimdi ***Nurettin Bey***'in tahtadaki çiziminden hareketle Trapez Metodu'nun geometrik yorumuna geçebiliriz. Bakalım, neler bulmuşum!

1.1. Trapez Metodunun Geometrik Yorumu

02.11.2016, 22:54.

14 Şubat 1955'te *Werner Romberg (1909-2003)* tarafından keşfedilen metottaki trapez metodu, $I = \int_a^b f(x)dx$ belirli integrali için



Şekil 1.1. Konkav $\mathbf{f(x)}$ eğrisinde trapez metodu.

şeklindeki $f(x)$ fonksiyonunun altında kalan $X_0X_2Y_2Y_0$ bölgesine $X_0X_2Y_2Y_0$ dik yamuğun alanıyla başlayan ve her seferinde bu yamuğun $h_0 = h = b - a$ yüksekliğinin 2'ye bölünmesiyle ortaya çıkan dik yamukların yüksekliklerine karşılık gelen yanal kenarların $f(x)$'e yakınlaştırılması yoluyla ([1]), bu dik yamukların alanlarının toplamının $X_0X_2Y_2Y_0$ bölgesine yakınsaklaştırılmasından ibaret bir metottur!

Şu halde konkav $f(x)$ fonksiyonu ya da $f(x)$'in konkav olan parçalarında trapez metodunu uygularsak, yani şekilde $n = 1$. adımda görüldüğü üzere $X_0X_2Y_2Y_0$ dik yamuğunun alanı $X_0X_2Y_2Y_0$ bölgesinden küçüktür, dolayısıyla $K_0 < I$ ve genelde de n. adımda $K_0 < \cdots < K_n < \cdots < I$ eşitsizlikleri geçerli olur ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için K_n, I'nın alt sınırı olur.

Buna göre $X_0X_2Y_2Y_0$ dik yamuğunun alanını hesaplarsak,

$$K_0 := A(X_0X_2Y_2Y_0) = (b - a).\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitliklerinden

([1]) Bu şekilde bir yaklaşım, insanoğlunun son 4000 yıldır bir daireye içten ve dıştan düzgün çokgenlerle yaklaşımı, ***"Tüketme Metodu"***'nu gösterir. Yani Şekil 1.1'de $\lim_{n\to\infty} h_n$ limitine göre doğru parçalarıyla $f(x)$'e yaklaşılmaktadır. Tıpkı bir çemberin içine ve dışına çizilen düzgün çokgenlerde olduğu gibi! (Bkz. M.Ö. 2000'lere tarihlenmiş "*Susa Tableti*" ve M.Ö. 250'ye tarihlenmiş ***Arşimet***'in "*Çemberin Ölçüsü Hakkında*" çalışmalarına).

$$(1.1)\quad K_0 = h_0.\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

olduğunu görürüz.

Fakat K_n için $[a,b]$ aralığını 2^n eşit aralığa bölersek, bu şekilde doğrudan dik yamuğun alan formülüyle hesap yapmak zorlaşır. Bu durumda aşağıdaki pratik metoda başvurmak gerekir:

Pratik Metot. $X_0X_2Y_2Y_0$ dik yamuğunun alanını yukarıdaki şekildeki gibi doğrudan dik yamuğun alan formülüyle hesaplamak yerine, onu $X_0X_2Y_2D$ dikdörtgenine tamamlarsak (ki şekilde D noktası yoktur; ancak D noktasını şekilde Y_2 noktasından geçen ve x-eksenine paralel olan doğrunun X_0Y_0 doğrusunu kestiği nokta olarak düşünülebiliriz),

$$K_0 = A(X_0X_2Y_2Y_0) = A(X_0X_2Y_2D) - A(Y_2DY_0) = (b-a)f(b) - \frac{(b-a)\big(f(b)-f(a)\big)}{2} = h_0f(b) - h_0.\frac{f(b)-f(a)}{2} = h_0.\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

işleminden (1.1)'in elde ediliş şekli daha kolay olur.

Diğer taraftan, eğer $[a,b]$ aralığının ortası olan $\frac{a+b}{2} = \frac{2a+(b-a)}{2} = a + \frac{b-a}{2} = a + h_1$'ye karşılık gelen X_1 noktasını gözönüne alır ve X_1Y_1 dikmesinin $f(x)$ eğrisini kestiği Y_1'den Z_0Z_2 teğetini çizersek bu teğetin denklemi,

$$(1.2)\quad y - f(a+h_1) = f'(a+h_1)\big(x-(a+h_1)\big)$$

şeklindedir. Burada eğim Leibnitz Teoremi'ne göre $m_T = f'(a+h_1)$ dir.

Buna göre Z_0 noktasının değeri (1.2)'den,

$$y - f(a+h_1) = f'(a+h_1)\big(a-(a+h_1)\big) \Rightarrow z_0 = f(a+h_1) - h_1f'(a+h_1)$$

ve Z_2 noktasının değeri ise,

$$y - f(a+h_1) = f'(a+h_1)\big(a+2h_1-(a+h_1)\big) \Rightarrow z_2 = f(a+h_1) + h_1f'(a+h_1)$$

olduklarından

$$(1.3)\quad \begin{cases} z_0 = f(a+h_1) - h_1f'(a+h_1), \\ z_2 = f(a+h_1) + h_1f'(a+h_1) \end{cases}$$

sonuçları çıkar.

İşte bu sonuçlara göre $X_0X_2Z_2Z_0$ dik yamuğun alanı,

$$T_0 := A(X_0X_2Z_2Z_0) = (b-a).\frac{z_0+z_2}{2} = (b-a)f(a+h_1) = h_0f(a+h_1)$$

olup buradan

$$(1.4)\quad T_0 = h_0f(a+h_1)$$

olarak elde edilir.

Fakat burada da aynı durum sözkonusudur, yani T_n için $[a,b]$ aralığını 2^n eşit aralığa böldüğümüzde $2^{n+1}-1$ tane dik yamuğun alanını hesaplamak ve bunları toplamak çok zaman ister. İşte burada I'nın üst sınırını hesaplamak için olan şu basit sonucu görmek gerekiyor:

Pratik Metot. Eğer Y_1'den X_0Y_0 ve X_2Y_2 doğrularına birer dikme çizersek $X_0X_2Z_2Z_0$ dik yamuğunun alanı, eş $X_0X_1Y_1A$ ve $X_1X_2BY_1$ dikdörtgenlerinin alanlarının toplamına eşit olur, yani

$$T_0 = A(X_0X_2Z_2Z_0) = A(X_0X_1Y_1A) + A(X_1X_2BY_1) = h_1f(a+h_1) + h_1f(a+h_1) = 2h_1f(a+h_1) = h_0f(a+h_1)$$

işleminden (1.4) derhal elde edilmiş olur.

Peki bu nasıl oldu?

Dikkat edilirse şekilde $f(x)$ eğrisine Y_1 noktasında çizilen Z_0Z_2 teğeti nedeniyle $AY_1Z_0 \cong BY_1Z_2$ (A.K.A) eş dik üçgenlerinden sarı renkli boyalı

$$(1.5)\quad A(AY_1Z_0) = A(BY_1Z_2)$$

alanlar eşitliğine göre $X_0X_2Z_2Z_0$ dik yamuğundaki BY_1Z_2 dik üçgeni $X_0X_1Y_1A$ dikdörtgenine AY_1Z_0 olarak transfer edilmiş olur ki, $X_0X_2Z_2Z_0$ dik yamuğunun alanı eş $X_0X_1Y_1A \cong X_1X_2BY_1$ dikdörtgenlerinin alanlarının toplamına dönüşür.

Şu halde (1.1) ve (1.4)'ten $I = \int_a^b f(x)dx$ integrali için

$$(1.6)\quad K_0 < I < T_0$$

tam sıkıştırma teoremi geçerli olur.

1.1.1. K ve T'nin Eğimlerinin Aynı Olması Şartı. Bunun için şekildeki sarı renkle boyalı AY_1Z_0 ve BY_1Z_2 dik üçgenlerindeki

$$(1.7)\quad |z_0 - f(a)| = |z_2 - f(b)|$$

yüksekliklerini eşit almak yeterlidir!

O halde (1.3)'teki z_0 ve z_2'yi yerine koyar, gerekli işlemleri yaparsak,

$$(1.8)\quad \begin{cases} f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}, \\ f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{cases}$$

sonuçları elde edilir ki ilk bağıntı f'nin lineer bir fonksiyon yani doğru olmasından (ki bu durumda şekildeki C ile Y_1 noktaları çakışır, dolayısıyla $f(x)$, Z_0Z_2 teğeti ve Y_0Y_2 keseni çakışırlar) ve ikinci bağıntı da f'nin kuadratik (2. derece) bir fonksiyon yani parabol olmasından gelir (Bkz. "*Ortalama Değer Teoremi*").

İkinci olarak, K_1 için $[a,b]$ aralığını 2 eşit parçaya böler (ki bu durum şekilde mevcuttur) ve pratik metotla hesaplarsak,

$$K_1 = A(X_0X_1Y_1Y_0) + A(X_1X_2Y_2Y_1) = h_1f(a+h_1) - \frac{h_1\big(f(a+h_1)-f(a)\big)}{2} + h_1f(b) - \frac{h_1\big(f(b)-f(a+h_1)\big)}{2} = h_1f(a+h_1) + h_1.\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{K_0}{2} + h_1f(a+h_1)$$

eşitliklerinden

$$(1.9)\quad K_1 = \frac{K_0}{2} + h_1f(a+h_1)$$

sonucu elde edilirken X_0 ile X_1 ve X_1 ile X_2 nokta çiftlerinin orta noktalarını bulur (ki X_0 ile X_1 noktalarının orta noktası $\frac{a+a+h_1}{2} = a + \frac{h_1}{2} = a + h_2$ ve X_1 ile X_2 noktalarının orta noktası da $\frac{a+h_1+a+2h_1}{2} = a + \frac{3h_1}{2} = a + 3h_2$'dir) ve bu orta noktalardan çıkılan dikmelerin $f(x)$ eğrisini kestiği noktalardan birer teğet çizersek,

$$T_1 = 2h_2f(a+h_2) + 2h_2f(a+3h_2) = h_1\big(f(a+h_2) + f(a+3h_2)\big)$$

eşitliklerinden

$$(1.10)\quad T_1 = h_1\big(f(a+h_2) + f(a+3h_2)\big)$$

sonucu elde edilir.

Sonuçta işleme bu şekilde devam edersek MEM (Matematiksel Endüksiyon Metodu) gereğince $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(1.11)\quad \begin{cases} T_n = h_n \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} f(a + (2k-1)h_{n+1}), \\ K_n = \dfrac{K_{n-1}}{2} + h_n \displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-1}} f(a + (2k-1)h_n) \end{cases}$$

olmak üzere ***Arşimet***'in kullandığı tam sıkıştırma teoremi

$$(1.12)\quad K_0 < K_1 < \cdots < K_n < \cdots < I < \cdots < T_n < \cdots < T_1 < T_0$$

şeklinde gerçekleşir. Burada T_n'nin değişmez olması (invaryant kalması) ([2]) son derece dikkat çekicidir!

1.1.2. T_n'nin Değişmezliği Hakkında. Şekilde Y_1 noktasından geçen Z_0Z_2 teğet doğrusu yerine Y_0Y_2 doğrusuna paralel ya da herhangi bir doğru alınırsa (1.11)'deki T_n değişmez. Örneğin, Y_1'den geçen ve Y_0Y_2 kesenine paralel Z_0Z_2 doğrusunu gözönüne alırsak, bunların eğimleri (1.8)'deki ikinci bağıntıya göre eşit olur:

$$(1.13)\quad m_T = m_K = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Buna göre Z_0Z_2 paralelinin $x = a$ ile $x = b$ dikmelerini kestiği noktaların ordinatları sırasıyla,

$$(1.14)\quad \begin{cases} z_0 = f(a+h_1) - \dfrac{f(b)-f(a)}{2}, \\ z_2 = f(a+h_1) + \dfrac{f(b)-f(a)}{2} \end{cases}$$

olur ve buradan

$$T_0 = A(X_0X_2Z_2Z_0) = (b-a).\frac{z_0+z_2}{2} = (b-a)f(a+h_1) = h_0f(a+h_1)$$

([2]) Özellikle Cebir'den bildiğimiz bu özellik için ***Tosun Terzioğlu*** şöyle der: "*Topolojide bir değişmeze 'Arf İnvaryantı' denir*". Bu konuda "*Arf Değişmezleri*"ne bakabilirsiniz.

eşitliklerine göre

$$(1.15)\quad T_0 = h_0 f(a + h_1)$$

şeklinde yine (1.4)'teki sonuç ve işleme aynı şekilde devam edildiği takdirde de (1.11)'deki T_n elde edilir.

Fakat bu sonuç sadece Y_1'den geçen ve Y_0Y_2 doğrusuna paralel Z_0Z_2 doğrusuna has bir durum değil, genel olarak Y_1'den geçen her doğru için geçerlidir. Ancak bu sonsuz doğrunun içinde en değerli olanı, teğettir. Neden?

Şimdi bu metodu en etkin şekilde nasıl kullanılacağımıza bir bakalım.

1.1.3. Metodun En Etkin Şekilde Kullanılması Hakkında. Metodun en etkin şekilde kullanılabilinmesi için $f(x)$'in aşağıya doğru ya da yukarıya doğru konkav olduğu yerlerin belirlenmesi, dolayısıyla $f(x)$'in dönüm (büküm) noktalarının

$$(1.16)\quad f''(x) = 0$$

denkleminden bulunması gerekir. Buradan $f(x)$'in aşağıya doğru konkav (ki bu, x-eksenine göre **"konkav"**dır) ya da yukarıya doğru konkav (ki bu da, x-eksenine göre **"konveks"**tir) olduğu yerler $[a, b]$ aralığında belirlenir, dolayısıyla $[a, b]$ aralığı konkav ve konveks olan alt aralıklara parçalanır.

İşte bu sonuç nedeniyle $f(x)$'in konkav olduğu yerlerde (1.12) ve konveks olduğu yerlerde de (1.12)'de $K_n \leftrightarrow T_n$ dönüşümüyle

$$(1.17)\quad T_0 < T_1 < \cdots < T_n < \cdots < I < \cdots < K_n < \cdots < K_1 < K_0$$

eşitsizlikleri geçerli olur.

Not 1.1. Burada şuna dikkat etmek gerekiyor: Bazı $f(x)$ fonksiyonları için K_n ve T_n'nin ilk n değerlerinde (1.12) ya da (1.17) eşitsizlikleri bozulabilir ama metot etkinleştiğinde, yani n'nin belli bir değeri ve sonraki değerlerinde bu eşitsizlikler derhal korunur!

1.1.4. K_n ve T_n Arasındaki İlişki: Aritmetik Ortalama. (1.11)'e göre

$$K_{n+1} = \frac{K_n}{2} + h_{n+1}\sum_{k=1}^{2^n} f(a + (2k-1)h_{n+1}) = \frac{K_n}{2} + h_{n+1}.\frac{T_n}{h_n} = \frac{K_n}{2} + \frac{h_{n+1}}{h_n}.T_n = \frac{K_n}{2} + \frac{1}{2}.T_n = \frac{K_n + T_n}{2}$$

eşitliklerinden

$$(1.18)\quad K_{n+1} = \frac{K_n + T_n}{2}$$

bağıntısı elde edilir. Buna K_n ve T_n'nin aritmetik ortalaması denir ve bu aritmetik ortalama K_{n+1}'i verir.

Burada Nümerik Analizcilerin önem vermediği şu duruma dikkat ediniz: (1.11)'e göre T_n'nin alt bölme sayısı K_n'ninkinden bir fazladır. Yani T_n, 2^n eş alt aralığa sahip iken K_n, 2^{n-1} eş alt aralığa sahiptir. Son tahlilde ***Arşimet***'e göre, n'nin küçük değerlerinde T_{n-1} ile K_n I'ya hemen hemen eş yaklaşırlar!

Resim 1.1. ***Werner Romberg***, *Aralık-1988, Trondheim Üniversitesi/Norveç*. 1978'de 69 yaşındayken emekli oldu. Uzun emekliliğinin tadını çıkardı. Aralık 1988'de, yaklaşık 80 yaşında olduğunda, Trondheim Üniversitesi'nde onuruna ***"İnterpolasyon, Ekstrapolasyon, Kuadratür ve Rasyonel Yaklaşıklıklar Hakkında Romberg Semineri"*** düzenlendi.

1.2. Romberg Metodu'na Ait Orijinal Formüller

Alman matematikçi ve fizikçi ***Werner Romberg*** *"NAZİ Almanyası'ndan Kaçan Matematikçiler: Bireysel Kaderleri ve Küresel Etkileri"* kitabında 58 kişilik göçmen bilim adamları listesinde 26. kişidir. Münih'te matematik fizikçisi ***Arnold Sommerfeld (1868-1951)*** tarafından yetiştirildi. Norveç'e göçtükten sonra Nümerik Analizci olarak tanındı ve 1998'de Nazi Almanyası geçmişine ait bilinen tek anısını 1998'de kitabın yazarı ***Reinhard Siegmund-Schultze***'ye şöyle anlattı:

"SPD ve KPD'nin Naziler'e karşı ortak mücadelesini destekleyen SAP'a yakındım. Yaklaşık 10-20 öğrenciydik ve bu yüzden Naziler tarafından tanınıyorduk. ***Sommerfeld*** *1932'de MÜNİH Üniversitesi'nde bir ödül yarışması organize etti ve katılmamı önerdi. Çözümü sundum ve şu yanıtı aldım:* ***'Atama tamamen gönderen tarafından yapıldı. Ancak, gereken olgunluğa (geistige Riefe: Zihinsel Olgunlaşma) sahip olmayan (yetersiz) gönderici (Werner Romberg), ödül verilemez!'***. ***Sommerfeld*** *onu doktora (PhD) olarak sunmamı önerdi ve acele etmemi istedi. Bu nedenle 1933'ün yazında* ***'Yüksek Onur (Magna Cum Laude)'*** *ile sınavı geçebildim.* ***Sommerfeld*** *SSCB'nden teorik fizikçilerin taleplerini duymuştu ve solcu yanılsamalarımı iyileştirmek için beni tavsiye etti.",* *Mathematicians Fleeing from NAZI Germany/4. Pretexts, Forms, and the Extent of Emigration and Persecution/4.D. Documents/4.D.5. Political Reasons for Emigration beyond Anti-Semitism, p. 77*.

Resim 1.2. ***Ecevit***, 14 Mayıs 1972'deki CHP Olağanüstü Kurultayı'nda 826 oyla Genel Başkan seçilmesi üzerine ***Milli Şef***'in elini öperken. Bu öpücük aynı zamanda ***Milli Şef***'ten çifte mirasın alındığını gösteriyordu!

Hiç unutmam; 1973 Seçimleri öncesi CHP'nin araç konvoyu Kasımpaşa'nın içinden geçerken, bir arabanın içinden bana uzatılan 6 oklu bayrağını almış ve çocuk halimle (ki o sırada 5 yaşında idim) çok sevinmiştim (ki aklım ermeye başladıktan çok zaman sonra bu olayı hatırladım ve o bayrağı ***Ecevit***'in elinden mi aldığımı sordum. Hayır, dediler). Meğersem **"Karaoğlan Efsanesi"** o zaman başlamış. Çünkü CHP oyların 3'te 1'ini alarak 1. Parti oldu!

Seni çok iyi anlıyorum amca! Bende de ***Ecevit***'ten sonra solcu yanılsamalarım ortaya çıktı (Bkz. "*Ortanın Solu*"). Çünkü ***Ecevit***, ***İnönü***'nün mirasını devam ettirerek CHP'yi merkezde tutmak istiyor ve bu uğurda tüm değerlerinden vazgeçiyordu. Örneğin ***Ecevit***'in dedesinin Kürt olması, ***Ziya Gökalp***'teki gibi sadece bir ayrıntıydı ve Ulus (Millet) karşısında bunun bir önemi yoktu!

Ecevit'te Milliyetçilik Anlayışı

Bilindiği gibi ***Ecevit***'in en hassas olduğu konulardan biri Türkiye'nin ulusal birliği ve toprak bütünlüğüdür. Misak-ı Milli sınırlarını her zaman gözeten bir politika izlemiş, Musul sorunuyla yakından ilgilenmiş ve koşullar uygun olduğunda bu sorunu gündeme getirmenin Türkiye'nin hakkı olduğuna inanmıştır.

Ecevit, PKK dahil her türlü terör hareketine karşı çıkmış ve mücadele etmiştir. Hiçbir gerekçenin terörü haklı gösteremeyeceğini savunmuş, terörü insanlık suçu olarak lanetlemiştir. "Kürt sorunu" sorulduğunda, "Türk-Kürt" ayrımını kabul etmemiş, *"Ben yüreğimi ikiye bölemem!"* demiştir. 1969'da yazdığı "*Pülümür'ün Yaşsız Kadını*" adlı şiirinde bu duruma açıkça değinir (Bkz. "*Solculardan Milliyetçi olmaz, diyorlar*").

Özetle, ***Ecevit***, ***Atatürk***'ün ırkçı olmayan ulus tanımını anlayabilmiş ve uygulayabilmiş ender liderlerden biridir (Bkz. "*Medeni Bilgiler*", S. 47. Bu sayfadaki ***"Milletin Genel Tanımı"***'nındaki ***Atatürk***'ün elyazısını "*Türklüğe Fransız kalanlara Türklük dersi*" makalesinde 29. sayfa olarak görebilirsiniz).

Romberg (***Byrnjulf Owren***'in, "*Werner Romberg: Vereinfachte Numerische Integration*" makalesinde bildirdiğine göre), 14 Şubat 1955'te Tröndheim'dayken $h = \frac{b-a}{n}$ ve $f_0 = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ başlangıç değeri ve $0 < k$ için

$$(1.19) \quad \begin{cases} T_n = h.\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f_k \,, f_k = f(a+kh), \\ U_n = h.\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}} \,, f_{k+\frac{1}{2}} = f\left(a + \left(k+\frac{1}{2}\right)h\right) \end{cases}$$

bağıntılarından hareketle

$$(1.20) \quad T_{2n} = \frac{T_n + U_n}{2}$$

sonucunu vererek (1.11)'deki K_n'yi tanımladı!

1.2.1. Notasyon Sorunu. Burada biraz durup düşünmek gerekiyor. Çünkü ***Romberg***, (1.19) ve (1.20)'deki formüllerde T'yi **"Trapez"** kelimesinin baş harfi olarak alarak T_n'yi yazdıktan sonra, alfabetik sıraya göre ondan sonra gelen U_n'yi yazmıştır. Dolayısıyla Şekil 1.1'de geometrik anlam ifade eden notasyonumuzdaki kirişler (f(x)'in sekant doğrusu) için K_n'yi ve teğetler (f(x)'in tanjant doğrusu) için T_n'yi gösteren bir anlayış içinde olmadığını tespit ettim. Kaldı ki bu çalışmaya ilk çalışmaya başladığım zaman ben de ***Romberg*** gibi T_n'yi A_n ile ve K_n'yi B_n ile gösteriyor ve bunlarla konveks f(x) eğrisi üzerinde çalışıyordum (Bkz. "*Romberg İntegrali Kronolojim 1*"). Ama sonra T_n'nin invaryant özelliği ve metodun en etkili kullanım şekli aklıma gelince bu alfabetik notasyon yazımından vazgeçtim ve şekilde doğru parçaları f(x) eğrisi için ne anlam ifade ediyorsa, ona göre çalışmaya başladım. Çünkü f(x) ne olursa olsun (ister konveks olsun ister konkav olsun) bu şekilde çalışmak daha kolaydır. Yani f(x) konkav (veya konkav olduğu yerleri varsa) (1.12) ya da konveks (veya konveks olduğu yerleri varsa) (1.17)'deki eşitsizlikler geçerli olacaktır ama (1.11) değişmeyecektir. İşte bu yüzden A_n ve B_n yerine T_n ve K_n'yi yazdım!

Şimdi ***Romberg***'in (1.19) ve (1.20)'deki formüllerinin ne anlama geldiğini öğrenebilmek, dolayısıyla deşifresi için aşağıdaki indirgeme bağıntısının nasıl elde edildiğine bir bakalım.

1.3. K_n'nin K_0'a İndirgenmesi. Şimdi K_n'nin K_0'a indirgenmesini adım adım yapalım.

Bunun için ilkin $n = 1$ alırsak (1.11)'den $h_1 = \frac{h_0}{2}$ için triviyal (apaçık) olarak,

$$K_1 = \frac{K_0}{2} + h_1 \sum_{k=1}^{2^{1-1}} f(a + (2k-1)h_1) = \frac{K_0}{2} + h_1 f(a + h_1) = \frac{K_0}{2} + \frac{h_0}{2} f(a + h_1) = \frac{K_0}{2} + \frac{T_0}{2} = \frac{K_0 + T_0}{2}$$

eşitliğini elde ederiz. Yani $n = 0$ için (1.18) eşitliği geçerli olur.

İkinci olarak $n = 2$ için (1.11)'den,

$$K_2=\frac{K_1}{2}+h_2\sum_{k=1}^{2}f(a+(2k-1)h_2)=\frac{K_1}{2}+h_2\big(f(a+h_2)+f(a+3h_2)\big)$$

ve burada (1.9)'dan K_1'i yerine koyarsak,

$$K_2=\frac{K_1}{2}+h_2\big(f(a+h_2)+f(a+3h_2)\big)=\frac{\frac{K_0}{2}+h_1f(a+h_1)}{2}+h_2\big(f(a+h_2)+f(a+3h_2)\big)=\frac{K_0}{2^2}+\frac{h_1}{2}f(a+h_1)+h_2\big(f(a+h_2)+f(a+3h_2)\big)$$
$$=\frac{K_0}{2^2}+h_2f(a+2h_2)+h_2\big(f(a+h_2)+f(a+3h_2)\big)=\frac{K_0}{2^2}+h_2\big(f(a+h_2)+f(a+2h_2)+f(a+3h_2)\big)=\frac{K_0}{2^2}+h_2\sum_{k=1}^{3}f(a+kh_2)=\frac{K_0}{2^2}+h_2\sum_{k=1}^{2^2-1}f(a+kh_2)$$

eşitliklerinden

$$(1.21)\quad K_2=\frac{K_0}{2^2}+h_2\sum_{k=1}^{2^2-1}f(a+kh_2)$$

sonucu ve işleme bu şekilde devam ettiğimiz takdirde de MEM gereğince K_n'nin K_0'a göre genel olarak şu şekilde indirgendiğini görürüz:

$$(1.22)\quad K_n=\frac{K_0}{2^n}+h_n\sum_{k=1}^{2^n-1}f(a+kh_n).$$

Üçüncü olarak T_n'nin adım adım T_0'a indirgeyebilmek için (1.4) ve (1.10)'dan,

$$T_1+\frac{T_0}{2}=h_1\big(f(a+h_2)+f(a+3h_2)\big)+\frac{h_0f(a+h_1)}{2}=h_1\big(f(a+h_2)+f(a+3h_2)\big)+h_1f(a+2h_2)=h_1\sum_{k=1}^{2^2-1}f(a+kh_2)$$

eşitliklerinden

$$(1.23)\quad \sum_{k=1}^{2}\frac{T_{2-k}}{2^k}=h_2\sum_{k=1}^{2^2-1}f(a+kh_2)$$

sonucunu elde etmiş oluruz ki MEM gereğince genel olarak,

$$(1.24)\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{T_{n-k}}{2^k}=h_n\sum_{k=1}^{2^n-1}f(a+kh_n).$$

eşitliği mevcut olur.

Çok ilginçtir, (1.24)'ü (1.22)'de yerine koyarsak,

$$(1.25)\quad K_n=\frac{K_0}{2^n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{T_{n-k}}{2^k}$$

genel indirgeme bağıntısı ortaya çıkar.

Sözkonusu bu son bağıntı doğrudan (1.18)'den de elde edilebilir. Neden?

Çünkü (1.25)'te her adımda (1.18) bağıntısını kullanırsak,

$$(1.26)\quad \begin{cases} K_n=\dfrac{K_0}{2^n}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{T_{n-k}}{2^k}+\frac{T_0}{2^n}=\frac{K_0+T_0}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{T_{n-k}}{2^k}=\frac{2K_1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{T_{n-k}}{2^k}=\frac{K_1}{2^{n-1}}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{T_{n-k}}{2^k}\\ =\dfrac{K_1}{2^{n-1}}+\dfrac{T_1}{2^{n-1}}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2}\frac{T_{n-k}}{2^k}=\frac{K_1+T_1}{2^{n-1}}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{T_{n-k}}{2^k}=\frac{K_2}{2^{n-2}}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{T_{n-k}}{2^k}\\ \vdots\\ =\dfrac{K_{n-1}}{2^{n-(n-1)}}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-(n-1)}\frac{T_{n-k}}{2^k}=\frac{K_{n-1}}{2}+\frac{T_{n-1}}{2}=\frac{K_{n-1}+T_{n-1}}{2}\end{cases}$$

şeklinde (1.18) aritmetik bağıntısı ortaya çıkar ki, tersine, (1.18)'i aynı şekilde çalıştırdığımızda (1.25) indirgeme bağıntısına ulaşmış oluruz!

1.4. Romberg İle Çakışmamız!

Öncelikle ***Romberg***'in orijinal formüllerinin ilkel, dolayısıyla günümüzde anlaşılması zor olduğunu bilmemiz gerekiyor. Yani (1.19)&(1.20)'deki formüller, gerçekte ***Romberg*** tarafından verilmiş değil, ***Owren***'in, onun hesaplarından çıkarttığı formüllerdir. Sözkonusu bu formüllerin ne anlama geldiğini ilerideki kronolojik çalışmalarımda vereceğim. Yani hepsi çözümlü olarak elimde mevcuttur. Ben, şimdilik ***Owren***'in (1.19)&(1.20)'deki formüllerinden hareketle bunların (1.25)'tekilerle nasıl çakıştığını göstereceğim. Yani günümüzden ***Romberg***'e doğru bir yaklaşım en doğru yol olarak gözüküyor ve aşağıda bunu yapacağım!

Bunun için (1.20)'de $T_{2n} =: T_{n+1}$ dersek az önce sözünü ettiğim ters işleme göre,

$$(1.27)\quad \begin{cases} T_{n+1} = T_{2n} = \dfrac{T_n + U_n}{2} = \dfrac{\dfrac{T_{n-1}+U_{n-1}}{2} + U_n}{2} = \dfrac{U_n}{2} + \dfrac{U_{n-1}}{2^2} + \dfrac{T_{n-1}}{2^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \dfrac{U_{n-k}}{2^{k+1}} + \dfrac{T_{n-1}}{2^2}, \\ = \dfrac{U_n}{2} + \dfrac{U_{n-1}}{2^2} + \dfrac{\dfrac{T_{n-2}+U_{n-2}}{2}}{2^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \dfrac{U_{n-k}}{2^{k+1}} + \dfrac{T_{n-2}}{2^3}, \\ \vdots \\ = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{U_{n-k}}{2^{k+1}} + \dfrac{T_{n-n}}{2^{n+1}} = \dfrac{T_0}{2^{n+1}} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{U_{n-k}}{2^{k+1}} \end{cases}$$

sonuçlarının gerçekleştiğini görürüz.

Fakat burada (1.20) nedeniyle

$$(1.28)\quad T_n = 2T_{n+1} - U_n$$

bağıntısını (1.27)'deki son eşitlikte kullanırsak,

$$T_{n+1} = \frac{T_0}{2^{n+1}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{U_{n-k}}{2^{k+1}} \Rightarrow 2T_{n+1} = \frac{T_0}{2^n} + \sum_{k=0}^{n} \frac{U_{n-k}}{2^k} = \frac{T_0}{2^n} + U_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{U_{n-k}}{2^k} \Rightarrow T_n = 2T_{n+1} - U_n = \frac{T_0}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{U_{n-k}}{2^k}$$

eşitliklerinden

$$(1.29)\quad T_n = \frac{T_0}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{U_{n-k}}{2^k}$$

bağıntısı elde edilir ki buradan $T_0 = hf_0 = K_0$ iken

$$(1.30)\quad T_{2^n} = K_n, U_{2^n} = T_n$$

sonuçlarının geçerli olduğu sonucu çıkar. Ancak buradaki ilk eşitlik açık olmasına rağmen ikincisi için yukarıdaki gibi bir ispatın ortaya konulması gerekiyor!

Çok ilginçtir, bu sabah, 18.11.2016'nın ilk saatlerinde YAHOO'daki *"Explorers Discovered A Nazi Time Capsule, But What Missing From It?"* haberinde 1934 tarihli zaman kapsülünden ***Hitler***'in 2 ciltlik orijinal ***"Mein Kampf (Kavgam)"*** kitabını görünce şöyle demiştim: *"Vaaay! Hem çift kitap, hem de orijinal"*. ***Romberg*** ile çakışmamızı ve ondan önceki bölümü akşam eve gelince çözdüm. Burada orijinallik çok önemlidir. Çünkü ***Romberg***'in algoritması öyle her yerde yayınlanmaz; onu Norveççe yazan tarihi bir makaleden ([3]) aldım (Bkz. "*Werner Romberg: Vereinfachte Numerische Integration*"). Yani bu çalışmalarla ***Romberg***'in algoritmasının çift sınırlı olduğu gerçeği ortaya çıktı. Eğer ***Owren***'in makalesi elimde olmasaydı, ben de bu gerçeği göremeyecektim!

§2. Romberg Algoritmasının Richardson Ekstrapolasyonu İle Hızlandırılması ve Ötesindeki Gelişmeler Hakkında

Trapez metoduyla bulunan (1.11) (ya da (1.19))'deki K_n son derece zayıf lineer yakınsamaya sahiptir ancak, ***Huygens***'i takip eden ***Jacques Frederic Saigey*** tarafından 1856 ve 1859'da verilen $K_n =: R_{n,0}$ için

$$(2.1)\quad \begin{cases} R_{n+1,1} := R_{n+1,0} + \dfrac{R_{n+1,0} - R_{n,0}}{15} = \dfrac{4K_{n+1} - K_n}{3}, \\ R_{n+1,2} := R_{n+1,1} + \dfrac{R_{n+1,1} - R_{n,1}}{15}, \\ R_{n+1,3} := R_{n+1,2} + \dfrac{R_{n+1,2} - R_{n,2}}{63} \end{cases}$$

ekstrapolasyonuyla yakınsaklığı hızlandırılabilinir. Bu ekstrapolasyon daha sonra ***Lewis Fry Richardson*** tarafından 1927'de genelleştirilerek tekrar keşfedilmiştir ve adına ***"Richardson Ekstraposyonu"*** denmiştir!

Romberg, 14 Şubat 1955'te (1.19) ile gösterilen (1.20)'deki T_{2^n} yani (1.11)'deki K_n'yi keşfettikten sonra, K_n'nin

$$(2.2)\quad R_{n+1,k+1} := \frac{4^{k+1}R_{n+1,k} - R_{n,k}}{4^{k+1} - 1}$$

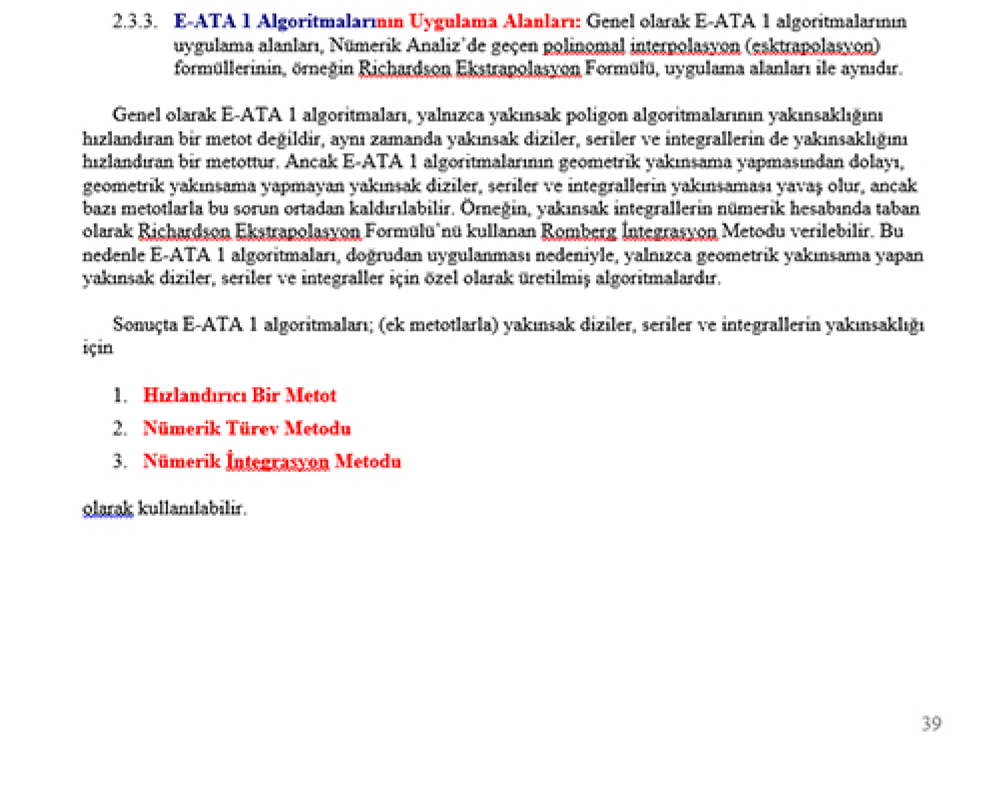
ekstrapolasyonuyla hızlandırılabileceğini farketti. Fakat Richardson ekstrapolasyonunun bu genel iterasyon yazımı 1963'te ***Jean Pierre Laurent*** tarafından verildi ve böylece Romberg İntegrali Yöntemi dünya genişliğinde bilinir oldu!

Burada başlangıç değeri,

$$(2.3)\quad R_{n,0} = K_n$$

([3]) ***Werner Romberg*** 1938'te Oslo'daki arkadaşı ***Hylleraas***'ın asistanı olarak çalışmak için Prag'a kaçmasına rağmen gerekli izinlere sahip değildir. Bu yüzden 20 Kasım 1938'de de Prag'tan Oslo'ya uçar. Bunun bir diğer ama en önemli nedeni, ***Hitler***'in Prag ile birlikte tüm Çekoslovakya'yı 15 Mart 1939'da işgal etmiş olmasıdır. ***Romberg*** herhalde bu işgalin olacağını daha önceden öngörüyordu (Bkz. "*Hitler ve Göring PRAG'ta*"). ***Romberg*** 1949'da Trondheim'daki Norveç Teknoloji Enstitüsü'ne katılır ve hayatının büyük bölümünü Norveç'te geçirir. İşte Norveçliler, ***Romberg***'e bu yüzden ilgi gösterirler!

dir. Buna göre (2.2)'den $R_{n,0}$ için Yamuk Kuralı, $R_{n,1}$ için Simpson Kuralı ve $R_{n,2}$ için Boole Kuralı elde edilir (Bkz. "*Romberg's method/Method*").



2.3.3. **E-ATA 1 Algoritmalarının Uygulama Alanları:** Genel olarak E-ATA 1 algoritmalarının uygulama alanları, Nümerik Analiz'de geçen polinomal interpolasyon (ekstrapolasyon) formüllerinin, örneğin Richardson Ekstrapolasyon Formülü, uygulama alanları ile aynıdır.

Genel olarak E-ATA 1 algoritmaları, yalnızca yakınsak poligon algoritmalarının yakınsaklığını hızlandıran bir metot değildir, aynı zamanda yakınsak diziler, seriler ve integrallerin de yakınsaklığını hızlandıran bir metottur. Ancak E-ATA 1 algoritmalarının geometrik yakınsama yapmamasından dolayı, geometrik yakınsama yapmayan yakınsak diziler, seriler ve integrallerin yakınsaması yavaş olur, ancak bazı metotlarla bu sorun ortadan kaldırılabilir. Örneğin, yakınsak integrallerin nümerik hesabında taban olarak Richardson Ekstrapolasyon Formülü'nü kullanan Romberg İntegrasyon Metodu verilebilir. Bu nedenle E-ATA 1 algoritmaları, doğrudan uygulanması nedeniyle, yalnızca geometrik yakınsama yapan yakınsak diziler, seriler ve integraller için özel olarak üretilmiş algoritmalardır.

Sonuçta E-ATA 1 algoritmaları; (ek metotlarla) yakınsak diziler, seriler ve integrallerin yakınsaklığı için

1. **Hızlandırıcı Bir Metot**
2. **Nümerik Türev Metodu**
3. **Nümerik İntegrasyon Metodu**

olarak kullanılabilir.

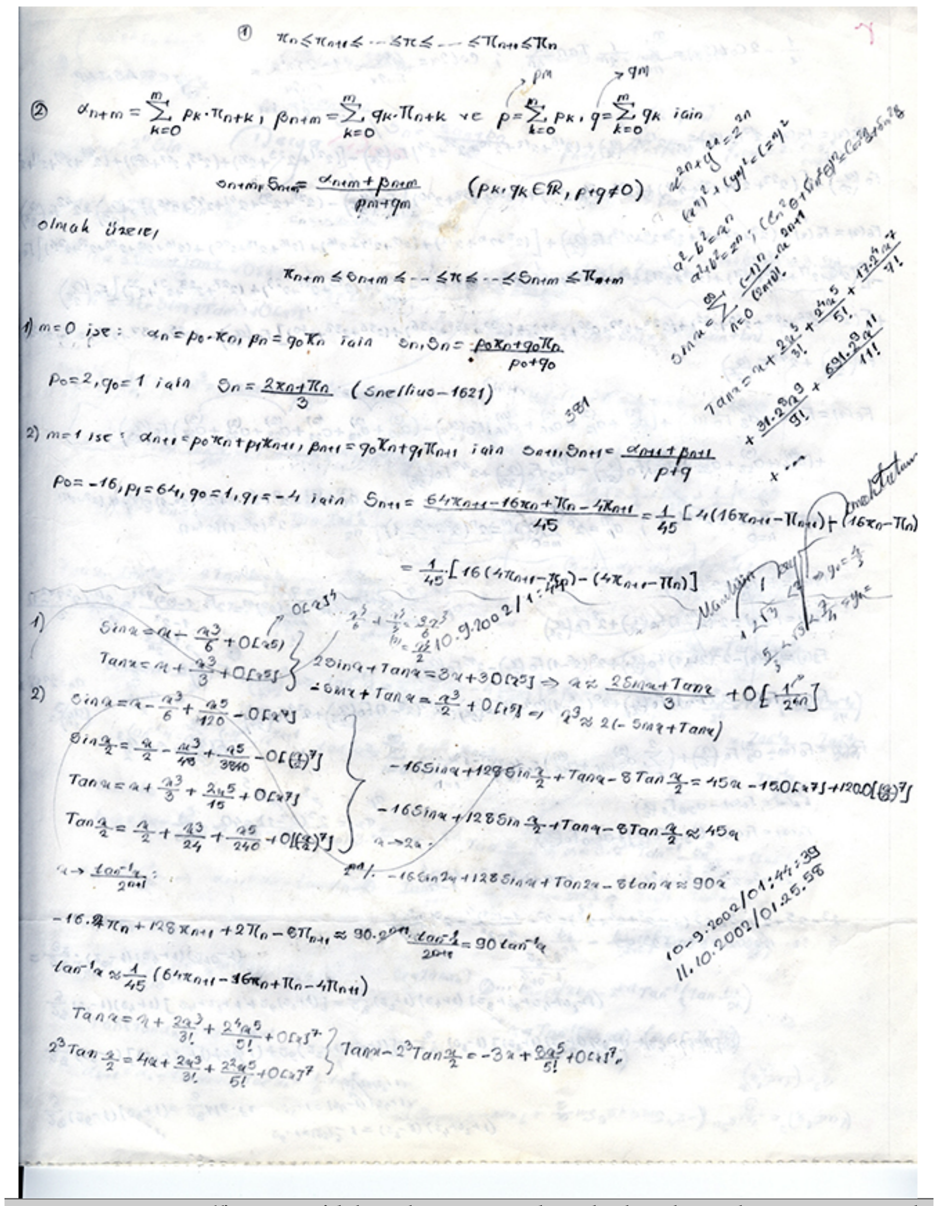
39

Resim 2.1. 2003'te E-ATA Algoritmaları'nın 3 maddede nasıl kullanılacağını belirttim. İnanılır gibi değil, 14 yıl önce ama ***Romberg*** öldükten hemen sonra (muhtemelen 2003 yazında) orada **"Romberg İntegrasyonu"**ndan bahsetmişim!

Burada şu tarihi gelişmelere de dikkat etmemiz gerekiyor: (2.2) verildiğinde tarihler, 1963'ü gösteriyordu ve ilk bilgisayar 1947'de IBM'in ENIAC'ı ile çoktan yapılmıştı bile! ***D. F. Ferguson***, 1947'de bir hesap makinesiyle π'nin 808 ondalığını hesapladı ve 1949'da da ENIAC ile π'nin 2037 ondalığı hesaplandı. Bu son hesapta ***Machin***'in 1706'da keşfettiği ve yakınsaklığı son derece hızlı olan $\frac{\pi}{4} = 4\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5} - \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{239}$ ünlü formülü kullanıldı. Rivayete göre (!), ***Machin***, bu formülle 1 saat içinde π'nin 100 basamağını topladı! Yani ***Romberg*** ve ardılları tam da dijital çağın başlangıcında Romberg İntegrali'ni vermişlerdi ve bu yöntem Nümerik İntegral'de çığır açıyordu. Çünkü diğer yöntemler bunun yanında nal topluyordu. Üniversitede bize, ***Nurettin Ergun***, Nümerik Analiz dersinde Nümerik İntegral için bazı yöntemleri anlattıktan sonra Romberg metodunun hatalardan hareketle doğruyu tahmin etme metodu, dolayısıyla tüm metotlar içinde en etkili metot (yakınsaklık hızı nedeniyle) olduğu söylemişti!

2.1. E-ATA 1 Algoritmaları

E-ATA 1 Algoritmaları bu iş için tam biçilmiş kaftandır. E-ATA 1 Algoritmaları, temelini Snell-Huygens Ekstrapolasyonları'nın genelleştirilmesinden alan (ki buna Richardson Ekstrapolasyonu ve en genel şekli de dahildir) güçlü bir yazılımdır. Yandaki resimde görüldüğü üzere E-ATA 1 algoritmalarının hangi alanlarda kullanılacağına ilişkin 3 maddelik bir açıklama ve 2. maddeye ilişkin 2008'de de ***"Babil Algoritmasından Modern Kök Algoritmalarına Doğru 4000 Yıllık Bir Yolculuk"*** çalışmasını yapmıştım. Bu çalışmada ***Newton Metodu*** ile birlikte diğer tüm metotları da kapsayan genel bir çalışmada bulunmuştum!



Resim 2.2. ***Snell***'in 1621'deki algoritmasından hızlı olan algoritmayı nasıl keşfettiğimi gösteren ilk sayfa.

2.1.1. Hoş Geldin *Snell* Amca!

Snell ilk matematik eğitimini babası ***Rudolf Snell van Royen***'den almıştır. Çünkü babası Leyden Üniversitesi'nde matematik profesörü idi. Ama onu asıl etkileyen bir diğer matematik öğretmeni, ***Ludolf van Ceulen*** olmuştur. O, 1621 tarihli "*Cyclometricus*"da taa ***Vieta*** döneminden ***Van Ceulen***'e kadar π'nin geometrik dönemine kadar sürdürülen tüm çalışmaları bir Almanak gibi toplamış ve özellikle, öğretmeni ***Van Ceulen***'in, hesaplaması 14 yıl süren ve 32 ondalıkta takıldığı π'nin hesabı onda derin bir iz bırakmıştır.

Snellius Ekstrapolasyonu'nu Nasıl Keşfettim?

Burada sanki bu olayı anlatmazsam makalem eksik kalır gibime geliyor: Her nasıl olduysa işte, ***Van Ceulen***'den ***Snell***'e geçen takıntı sanki bana miras kaldı ve sol tarafta gördüğünüz gibi ***Snell***'in 1621'deki algoritmasını genelleştirdim. Fakat nasıl ki ***Huygens***'in takipçisi ***Saigey***, 1856 ve 1859'da ***Huygens***'in $k = 0$ için (2.2)'deki algoritmasını genelleştirerek Richardson ekstrapolasyonunu vermişse (ki o da, yalnızca (2.1)'deki algoritmalar) ben de, ***Snellius***'un (2.4)'teki algoritmasını 10.09.2002, 01:45-27.10.2002, 05:40 tarihleri arasında genelleştirdim ve buna ***"Snellius Ekstrapolasyonu"*** adını verdim!

Gerçi, Snellius ekstrapolasyonunun yandaki çalışma sayfamda ② ile belirttiğim ağırlıklı ortalamayla nasıl bir yapıda olduğu belliydi ama içeriğinin ne olduğunu bilinmiyordu. Çünkü ***Snellius***, bir sonraki algoritmayı yanda "2)"de gösterdiğim gibi mi verecekti, yoksa başkasını mı verecekti; işte bu bilinmiyordu. Bu yüzden ② formunda tüm algoritmaları bulmak ve onların arasından doğru olanlarını seçmek zorundaydım. Yani okyanusta başınıza ne geliyorsa burada da aynı şeyler geliyor ve sizin gemiyi sağ salim karaya ulaştırmanız gerekiyor. Ya da buna "gemisini kurtaran kaptan"dır dersek yanlış olmaz sanırım. Yani ilk algoritma "1)" deki ***Snellius***'unki olmak üzere ikincisini yanda "2)"de gösterdiğim gibi alırsak bundan sonraki algoritmaların ne olması gerektiğine dair sorunun yanıtını 10.09.2002, 01:45-27.10.2002, 05:40 tarihleri arasında nihayete erdirdim (ki sayfanın sonundaki 11.10.2002, 01:25 tarihi, 4. algoritmanın keşfedildiği tarihi gösterir ki bu da, bu işin hiç de kolay olmadığını gösterir). Sonra bu çalışmayı derhal sitemin girişine ***"Cumhuriyetimizin 79. Yıldönümünde ATAmıza Bir Armağan: ATA ALGORİTMASI, Derya PAMUK TULUM, 29.10.2002/ 02:22"*** olarak koydum (**Y.N.** 17 yıl önceki bu çalışmamı "21.rar"da orijinal olarak bulabilirsiniz). Çünkü açıkça itiraf etmem gerekirse bu, benim için o yılki Cumhuriyet Koşusu idi. Başlangıçta zamansız ve plansız bir oyundan ibaret olan ama sonradan ciddiyete binen bu araştırmanın sonuçları bir bir ortaya çıktıkça ikinci hedef olarak 29 Ekim'i seçmiştim. Fakat bu seçimi yaptığımda ortada başarıyı garantileyecek bir sonuç yoktu henüz. Yani bu da, ikinci oyunum idi!

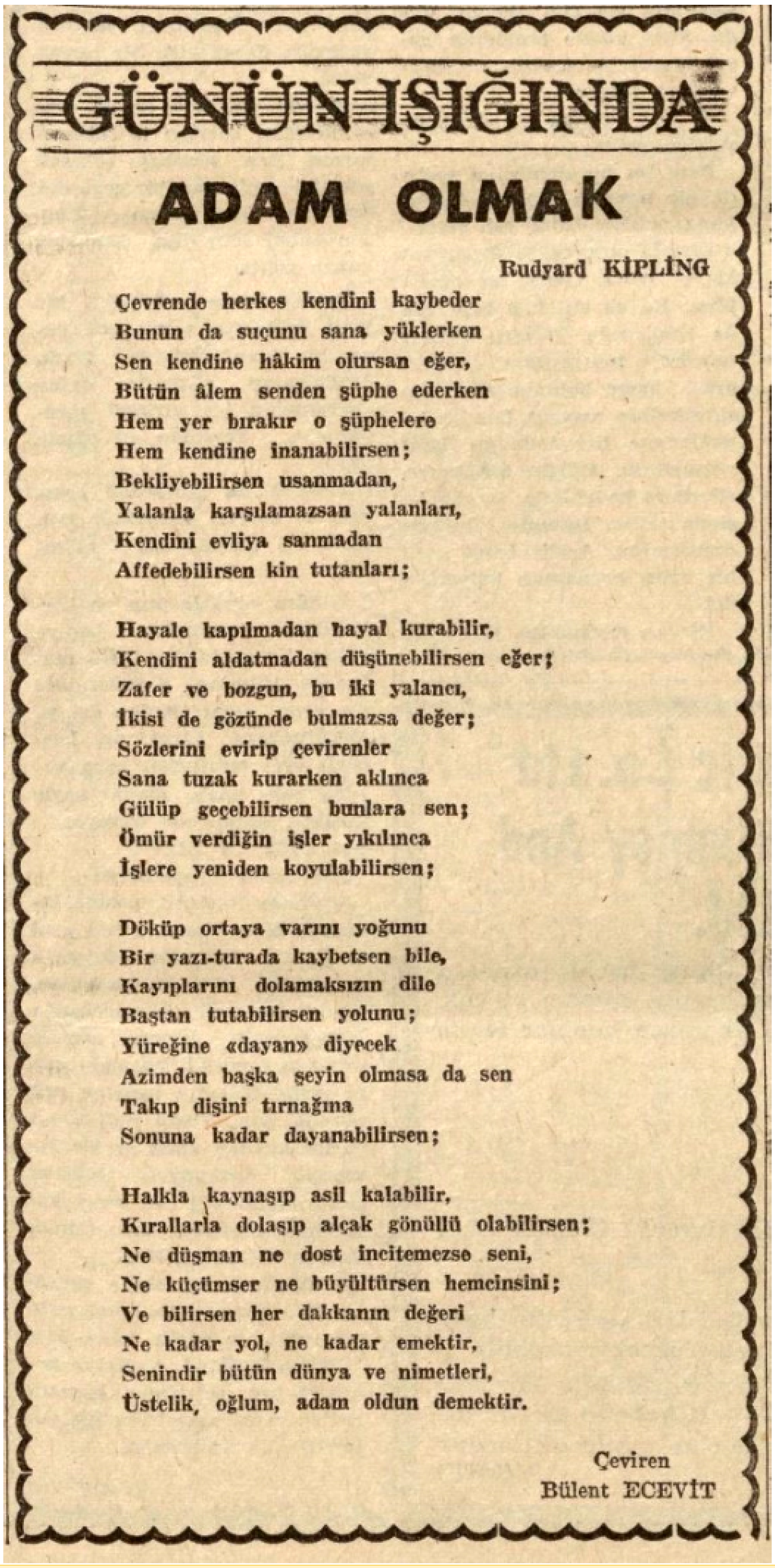
Şimdi $k = 0$ için (2.2)'de yani ***Huygens***'in algoritmasında (1.18)'i kullanırsak,

$$R_{n+1,1} = \frac{4R_{n+1,0} - R_{n,0}}{3} = \frac{4K_{n+1} - K_n}{3} = \frac{4.\frac{K_n + T_n}{2} - K_n}{3} = \frac{2T_n + K_n}{3}$$

eşitliklerinden

$$(2.4)\quad R_{n+1,1} = \frac{2T_n + K_n}{3}$$

Snellius'un algoritmasını elde etmiş oluruz. Ancak bundaki sınırlar RİK 1'deki (29)'daki sınırlara göre terslenir. Yani $T_n = B_n$ ve $K_n = A_n$'dir. Neden?



GÜNÜN IŞIĞINDA

ADAM OLMAK

Rudyard KİPLİNG

Çevrende herkes kendini kaybeder
Bunun da suçunu sana yüklerken
Sen kendine hâkim olursan eğer,
Bütün âlem senden şüphe ederken
Hem yer bırakır o şüphelere
Hem kendine inanabilirsen;
Bekliyebilirsen usanmadan,
Yalanla karşılamazsan yalanları,
Kendini evliya sanmadan
Affedebilirsen kin tutanları;

Hayale kapılmadan hayal kurabilir,
Kendini aldatmadan düşünebilirsen eğer;
Zafer ve bozgun, bu iki yalancı,
İkisi de gözünde bulmazsa değer;
Sözlerini evirip çevirenler
Sana tuzak kurarken aklınca
Gülüp geçebilirsen bunlara sen;
Ömür verdiğin işler yıkılınca
İşlere yeniden koyulabilirsen;

Döküp ortaya varını yoğunu
Bir yazı-turada kaybetsen bile,
Kayıplarını dolamaksızın dile
Baştan tutabilirsen yolunu;
Yüreğine «dayan» diyecek
Azimden başka şeyin olmasa da sen
Takıp dişini tırnağına
Sonuna kadar dayanabilirsen;

Halkla kaynaşıp asil kalabilir,
Kırallarla dolaşıp alçak gönüllü olabilirsen;
Ne düşman ne dost incitemezse seni,
Ne küçümser ne büyültürsen hemcinsini;
Ve bilirsen her dakkanın değeri
Ne kadar yol, ne kadar emektir,
Senindir bütün dünya ve nimetleri,
Üstelik, oğlum, adam oldun demektir.

Çeviren
Bülent ECEVİT

Resim 2.3. ***Rudyard Kipling***'in *"IF"* adlı şiirinin 57. Hükümeti'nin Başbakanı ***Bülent Ecevit*** tarafından *"Adam Olmak"* olarak çevrilmiş şekli, 10.06.1956. ***Ecevit*** daha sonra bu şiiri seslendirdi (Bkz. *"Adam Olmak"*).

EĞER (IF) $K_n = 2K_{n+1} - T_n$'yi (2.4)'te kullanırsak,

$$R_{n+1,1} = \frac{2T_n + K_n}{3} = \frac{2T_n + 2K_{n+1} - T_n}{3} = \frac{2K_{n+1} + T_n}{3}$$

eşitliklerinden

$$(2.5)\quad R_{n+1,1} = \frac{2K_{n+1} + T_n}{3}$$

algoritmasını elde ederiz ki (2.4) ile (2.5) aynı şeydir!

İkinci olarak, $k = 1$ için (2.2)'de (2.4)'ü kullanırsak,

$$R_{n+1,2} = \frac{16R_{n+1,1} - R_{n,1}}{15} = \frac{16.\frac{2T_n + K_n}{3} - \frac{2T_{n-1} + K_{n-1}}{3}}{15} = \frac{32T_n + 16K_n - 2T_{n-1} - K_{n-1}}{45} = \frac{32T_n - 2T_{n-1} + 16K_n - K_{n-1}}{45}$$

olduğundan

$$(2.6)\quad R_{n+1,2} = \frac{32T_n - 2T_{n-1} + 16K_n - K_{n-1}}{45}$$

bağıntısı elde edilir ki buna benzer algoritmayı yukarıdaki Resim 2.2'de görüldüğü üzere 10.09.2002, 01:44:39'da şu şekilde vermiştim: $K_n < \pi < T_n$ için

$$(2.7)\quad R_{n+1,2}(K,T) = \frac{64K_{n+1} - 16K_n + T_n - 4T_{n+1}}{45}.$$

Şimdi ***Snell*** için geliştirdiğim bu algoritmaya yakından bir göz atarsak,

$$\frac{64K_{n+1} - 16K_n + T_n - 4T_{n+1}}{45} = \frac{16.\frac{4K_{n+1} - K_n}{3} - \frac{4T_{n+1} - T_n}{3}}{15} = \frac{16R_{n+1,1}(K) - R_{n+1,1}(T)}{15} =: R_{n+1,2}(K,T)$$

eşitliklerine göre

$$(2.8)\quad R_{n+1,2}(K,T) = \frac{16R_{n+1,1}(K) - R_{n+1,1}(T)}{15}$$

şeklinde (2.6) formunda olduğu görülür. Ama buradaki çift sınırlı!

Bu arada, hazır ***Snellius***'un algoritması ve onun genelleştirilmiş şeklinden bahsetmişken ***Snellius***'a atfedilen şu hikâyeyi atlamak olmaz:

2.1.1.1. Eutokios'un Kesirleri Kurgu muydu?

Rivayete göre ***Snellius***, RİK 1'deki (29)'daki algoritmayı 1621'de verdikten sonra ***Arşimet***'in *"Daire Çevresi Ölçmesi"* çalışmasındaki $3\frac{10}{71} < A_4 < \pi < B_4 < 3\frac{1}{7}$ sınırlarını kullanarak

$$(2.9)\quad R_{n+1,1}(A,B) = \frac{2A_4 + B_4}{3} \cong \frac{2 \times 3\frac{10}{71} + 3\frac{1}{7}}{3} = 3{,}1415(15761\cdots)$$

değerini verir ([4]). Bu, ***Arşimet***'in π için önerdiğinden 2 kat daha iyi bir sonuçtur. Yani ***Snellius***'un algoritması kuadratik bir ekstrapolasyon gibi çalışmıştır.

([4]) E-ATA 1 Algoritmaları'nı yazmaya başladığım ilk zamanlarda, ***Snell***'in 1621'de verdiği algoritmasını hızlandırabilmek için Sinx ve Tanx'in Maclaurin serilerinin katsayılarını sıfırlamaya çalışıyordum (Bkz. 21.rar). Ama tüm kaynaklar, ***Snell***'in ***Arşimet***'in π için verdiği sınırları kullanarak algoritmasıyla π'nin doğruluğunu 2 kat artırdığı ve hatta ***Van Ceulen***'in yaklaşık 14 yıl boyunca π için verdiği 35 ondalıklı sınırlarını daha kısa yoldan bulduğu söylüyordu. Bu konuda 2002-2003'te ***Snell***'in orijinal kitabı olan ***"Cyclometricus"*** çalışmasını aramadım değil. Ama o sıralarda şimdiki gibi PDF yayın yapılmıyordu ve bulabildiğim tek kaynak da nadir kitaplar satan bir yerdi (ki kitabın linkini üzerinde verdim ve orada 3252 no'lu referansla 2000 $'a satıldığını görmüştüm. Kitap orijinaldir ve şimdi satılmış durumdadır). Bu konuda 21.rar'ın içindeki ek dosyalardaki "ATA_Algorithm.rar"daki "ATA_Algorithm.pdf" dosyasının 6. sayfasında ve "AA.rar"daki "AA.nb" dosyasının "Dikkat" tabında gerekli bilgilendirmeyi yapmıştım. Yani Snellius Ekstrapolasyonu'nu 2002'de keşfettiğim zaman ***Snellius***'un ***"Cyclometricus"*** çalışmasını hiç görmemiştim!

Peki ***Eutokios***'un $3 = A_0 = 6\mathrm{Sin}\frac{\pi}{6} < 12.\frac{780}{3013\frac{3}{4}} < A_1 = 12\mathrm{Sin}\frac{\pi}{12} < 24.\frac{240}{1838\frac{9}{11}} < A_2 = 24\mathrm{Sin}\frac{\pi}{24} < 48.\frac{66}{1009\frac{1}{6}} < A_3 = 48\mathrm{Sin}\frac{\pi}{48} < 96.\frac{66}{2017\frac{1}{4}} < A_4 = 96\mathrm{Sin}\frac{\pi}{96} < \pi < 96\mathrm{Tan}\frac{\pi}{96} = B_4 < 96.\frac{153}{4673\frac{1}{2}} < 48\mathrm{Tan}\frac{\pi}{48} = B_3 < 48.\frac{153}{2334\frac{1}{4}} < 24\mathrm{Tan}\frac{\pi}{24} = B_2 < 24.\frac{153}{1162\frac{1}{8}} < 12\mathrm{Tan}\frac{\pi}{12} = B_1 < 12.\frac{153}{571} < 6\mathrm{Tan}\frac{\pi}{6} = B_0 = 2\sqrt{3} < \frac{1351}{390}$ kesirlerini ([5]) gözönüne alsaydık ***Snellius***'a göre,

$$(2.10)\quad R_{n+1,1}(A,B) = \frac{2A_4 + B_4}{3} \cong \frac{2 \times 96.\dfrac{66}{2017\frac{1}{4}} + 96.\dfrac{153}{4673\frac{1}{2}}}{3} = 3{,}1415(48627\cdots)$$

değeriyle π'ye biraz daha yaklaşacaktık!

Bu konuda 2002'de Snellius ekstrapolasyonunun açılımını şu tabloyla vermiştim:

$$S_n^{(0)} = \frac{2\pi_n + \Pi_n}{3}$$
$$S_n^{(1)} = \frac{-16\pi_n + 64\pi_{n+1} + \Pi_n - 4\Pi_{n+1}}{45}$$
$$S_n^{(2)} = \frac{272\pi_n - 5440\pi_{n+1} + 17\,408\pi_{n+2} + \Pi_n - 20\Pi_{n+1} + 64\Pi_{n+2}}{12\,285}$$
$$S_n^{(3)} = \frac{-7936\pi_n + 666\,624\pi_{n+1} - 10\,665\,984\pi_{n+2} + 32\,505\,856\pi_{n+3} + \Pi_n - 84\Pi_{n+1} + 1344\Pi_{n+2} - 4096\Pi_{n+3}}{22\,495\,725}$$
$$S_n^{(4)} = \frac{353\,792\pi_n - 120\,289\,280\pi_{n+1} + 8083\,439\,616\pi_{n+2} - 123\,176\,222\,720\pi_{n+3} + 370\,977\,800\,192\pi_{n+4} + \Pi_n - 340\Pi_{n+1}\ \cdots}{255\,765\,804\,525}$$
$$S_n^{(5)} = \frac{-22\,368\,256\pi_n + 30\,510\,301\,184\pi_{n+1} - 8\,298\,801\,922\,048\pi_{n+2} + 531\,123\,323\,011\,072\pi_{n+3} - 7\,998\,092\,393\,578\,496\ \cdots}{16\,54\cdots}$$
$$S_n^{(6)} = \frac{1\,903\,757\,312\pi_n - 10\,394\,514\,923\,520\pi_{n+1} + 11\,342\,494\,684\,545\,024\pi_{n+2} - 2\,938\,246\,242\,091\,663\,360\pi_{n+3} + 185\cdots}{\cdots}$$
$$S_n^{(7)} = \frac{-209\,865\,342\,976\pi_n + 4\,584\,298\,551\,967\,744\pi_{n+1} - 20\,024\,216\,074\,995\,105\,792\pi_{n+2} + 20\,809\,928\,172\,413\,961\,371\cdots}{\cdots}$$
$$S_n^{(8)} = \frac{29\,088\,885\,112\,832\pi_n - 2\,541\,786\,781\,159\,260\,160\pi_{n+1} + 44\,418\,232\,358\,114\,303\,148\,032\pi_{n+2} - 184\,779\,846\,609\cdots}{\cdots}$$
$$S_n^{(9)} = \frac{-4\,951\,498\,053\,124\,096\pi_n + 1\,730\,667\,405\,520\,146\,530\,304\pi_{n+1} - 120\,980\,574\,315\,480\,323\,054\,370\,816\pi_{n+2} + 201\cdots}{\cdots}$$
$$\vdots$$

Tablo 2.1. Snellius Ekstrapolasyonu. İlki ***Snellius***'un algoritmasıdır (Bkz. 21.rar/Addendum-Files/AA.rar/AA.nb).

Burada bir çemberin içine ve dışına çizilen düzgün 6.2^n-genlerin çevreleri,

$$(2.11)\quad A_n = \pi_n = 6.2^n \mathrm{Sin}\frac{\pi}{6.2^n}, B_n = \Pi_n = 6.2^n \mathrm{Tan}\frac{\pi}{6.2^n}$$

olmak üzere tablodan şu sonuçlar elde edilir:

Snellius Ekstrapolasyonu'ndan Elde Edilen Sonuçlar		
	Eutokios'a Göre	Gerçek Değerlere Göre
k	$S_0^{(k)}$	$S_0^{(k)}$
0	3.154700854…	3.1547005383792515290…
1	3.141587374…	3.1416792670484402257…
2	3.141363310…	3.1415926876217458287…
3	3.141494323…	3.1415926535918300669…
4	3.141470433…	3.1415926535897932582…

Tablo 2.2. Tablo 2.1'e göre ***Eutokios***'un kesirlerine ve gerçek değerlere göre π'ye yaklaşımlar. Kırmızı renkli rakamlar π'nin doğru basamaklarını gösterir.

Bu tabloda görüldüğü üzere π için ***Eutokios***'un kesirlerinden elde edilen en iyi sonuç, 2. satırdakidir. Bu sonuç, orijinal keşfi Resim 2.2'de görülen ve Snellius ekstrapolasyonu için ilk keşfettim (2.7)'deki algoritmadan gelir (ki bu sonucun oluşmasında $\sqrt{3}$ için verilen üst sınır $\frac{1351}{780}$ kesri başat rol oynar). Sonraki satırlardaki sonuçlar π'nin 3 ondalığını göstermekle birlikte, bunlar 2. satırdakine yakın olurlar. Oysa 2. sütuna baktığımızda π için birikimli artımlar görülür ve son sütunda π'nin 16 ondalığının doğru olduğu görürüz. Fakat 2. sütundaki sonuçlara erişebilmek için rasyonel yaklaşıklıklar (kesirler) öyle inanılmaz büyürler ki hesaba konmaya elverişli olmazlar. İşte ***Eutokios***, bunun önüne geçebilmek için kendisine bir hedef seçmiş ve 2. satırdaki sonuç hariç π'nin 3 ondalığı doğru olacak şekilde kesirlerle π'ye yaklaşmaya çalışmıştır. Sözkonusu bu hedef, π'nin üst sınırı için $\frac{22}{7}$ ya da $3\frac{1}{7}$ iken alt sınır için bir araştırma yaptığı açıktır ve bunun sonucunda da $3\frac{10}{71}$ kesrine ulaşmıştır. Yani bu alt sınır kesri ***Arşimet***'ten gelmez. Bu çalışmada ondan bize kalan yegâne miras, ***"Çifte Katlama Metodu"*** adını verdiğim metotla $\frac{22}{7}$'ye erişilmesidir!

Arşimet Palimpseti'ne Bakmak Gerekiyor!

Hatırlanacağı üzere ***Arşimet***'in *"Daire Çevresi Ölçmesi"* risalesi en son Arşimet Palimpsesti'nde görüldü. M.Ö. 3. yüzyılda yaşayan ***Arşimet***'in orijinal yazıları kayboldu, fakat bir kâtip tarafından M.S. 950'de kopyalandı. O günden beri, kitap hafifçe yandı, küflenmeye bırakıldı ve hatta yazıları silindi, ama şimdi modern teknoloji eski yazıları yeniden ortaya çıkarmak için kullanılıyor. Bir Palimpsest; bir el yazmasının silinip, bir başka yazının üzerine yazıldığı parşömen kağıdı üzerine yazılmış bir çalışmadır. 174 sayfalık metin ancak son günlerde açığa çıktı. Yunan memurlarının Constantinople, şimdiki İstanbul'daki bir kütüphaneden (Kutsal Kabir Metoksiyonu) çalındığını söyledikleri çalışma 1920'lerden beri görülmemişti! Kudüs Ortodoks

([5]) 2004'ten beri Giza Piramitleri'nin mimari tasarımlarında çalışan biri olarak şunu rahatlıkla söyleyebilirim ki, $\pi < B_4 = 96.\frac{153}{4673\frac{1}{2}} = 3{,}1428(26575\cdots) \lesssim 3\frac{1}{7} = 3.142857\cdots$ yaklaşımını piramitte gördüğüm an, bunun $3\frac{1}{7}$ RC olduğuna derhal kanaat getiririm. Örneğin ***Petrie***, Kral Odası'na giden pasajın girişinde ilk granit zemin taşının uzunluğunu 64,9 BI = 3.14706 RC olarak vermişti ve bu, rahatlıkla $3\frac{1}{7}$ RC olarak alınabilinir (Bkz. *"Sec 47. Antechamber and passages"*). Kaldı ki bu taş şunun için önemlidir: ***Petrie***'ye göre piramitin kuzey tabanından bu taşın sonlandığı yere kadar olan mesafe, $\frac{9068.8}{2}$ BI + 3 RC + 64.9 BI $\cong \frac{9068.8}{2}$ BI + 3 RC + $3\frac{1}{7}$ RC = 226.0200353 ≅ 226 RC'dir.

Patrikliği, Christie's'i dava etti ve 174 sayfalık metnin çalındığını iddia etti. Mezatevi, şimdiki sahiplerinin cildi 1920'lerde kanuni olarak satın alan bir Fransız'ın neslinden olduklarını ileri sürdü.

Burada Arşimet Palimpsesti'nin tarihçesini vermem mümkün değil ama ***Heiberg*** ve sonrasında gelişen olayları kısaca şu şekilde verebilirim: 1907'de, o zamana kadar birçok Eski Çağ matematikçilerinin, bu arada **Öklit** (***Eukleides***) ve ***Arşimet***'in (***Archimedes***) metinlerini mükemmel bir şekilde yayınlamış olan Danimarkalı filolog ***Johan Ludvig Heiberg***, Kudüs'teki San Sepulcher Manastırı Kitaplığı'ndan getirilmiş bir papirüsü incelemek üzere İstanbul'a geldi. ***Heiberg*** sadece bir büyüteç ve Güneş ışığını kullanarak ***Arşimet***'in metnini -daha koyu kahverengi mürekkebin altındaki açık kahverengi soluk çizgiler gibi görünen- ilk olarak kopya etti. ***Heiberg***, kendisinden önce sadece **"şekiller de içeren bir Matematik Metni"** olduğu bilinen eski metni hemen hemen tamamen okumayı başardı. Bu metin ***Arşimet***'in bilinen çeşitli risalelerinden parçalarla birlikte, kaybolduğu sanılan **"Metot"** adlı ve son derece önemli eserini de kapsamaktaydı.

Fakat ***Heiberg***, en şiddetli bölgede bulunan ***Arşimet***'in eserlerini yeniden kopyalarken en kötüsü de İstanbul'daki manastırda kaldı. Bununla birlikte, ***Heiberg***'in ***Arşimet***'in bu dikkat çekici yeni keşiflerini içeren çalışmalarının yeni baskısının ([6]) yayımlanmasından önce, bölge Avrupa'nın geri kalanıyla birlikte savaşa girdi. I. Dünya Savaşı sırasında, müttefikleri Osmanlı İmparatorluğu'nu bölmeyi planladı, ancak daha sonra ***"Atatürk"*** olarak bilinen ***Mustafa Kemal Paşa***'nın farklı fikirleri vardı. ***Atatürk*** yerel ayaklanmalarla, kendisine karşı çıkan resmi Osmanlı Kuvvetleri ile ve Yunan Silahlı Kuvvetleri ile karşı karşıya kaldı. Bununla birlikte, Türkiye, Ocak 1921'de egemenliğini ilân etti. Ancak 1 yıl sonra Yunan ordusu neredeyse Ankara'ya ulaşmada büyük ilerlemeler kaydetti (**Y.N.** İnkılap Tarihi derslerimizden Yunan Kuvvetleri'nin Ankara'da Polatlı-Haymana'ya kadar geldiklerini biliyoruz. Bkz. "*Sathı Müdafaa veya Sangarios Çıkmazı*"). İstanbul'daki Kutsal Kabir Metoksiyonu kütüphanesinin hayatta kalması garanti altına alınamamıştır ve Yunan Ortodoks Kilisesi'nin başı, kütüphanedeki kitapların güvenliğini sağlamak için Yunanistan Milli Kütüphanesi'ne gönderilmesini talep etmiştir. Kütüphanedeki 890 eserden sadece 823'ü Yunanistan Ulusal Kütüphanesi'ne ulaştı ama Arşimet Palimpsesti aralarında değildi!

Arşimet Palimpsesti'nin başına gelenler belirsizdir. Anlaşılan, 1920'lerden beri adı bilinmeyen bir Fransız koleksiyoncunun elinde, en kötüsü resmen kaybolmuş ve çoğu insan tahrip edildiğini varsaymıştı. Fransız koleksiyoncu kısa süre önce satmış olabilir. Ancak kesin olarak bildiğimiz tek şey, 1998'de New York'taki Christie's müzayedesinde anonim bir satıcı adına satılması, en şiddetli şey olduğudur. Kitap 29.10.1998, 14:35 EDT'de (Ankara'da 21:35) Christie's müzayedesinde isimsiz bir alıcıya 2,202,500 $'a satıldı (Bkz. "*Archimedes Palimpsest, Sale 9058*"). Fakat bu tarih tam da Cumhuriyetimizin 75. Yıldönümüne denk geliyordu. Çünkü kitabın çalınmasından Yeni Türkiye Cumhuriyeti'ni, dolayısıyla onun kurucusu ***Atatürk***'ü sorumlu tutuyorlardı. Acaba ***Atatürk***, kendisine yöneltilen bu kinin farkında mıydı? Çünkü tarih ve saat gayet açık.

Peki ***Atatürk***, Cumhuriyeti ilân ettikten sonra 21:35'te ne yapıyordu?

Resim 2.4. TBMM'sinin açılışında ***Atatürk*** ve kurmaylarının binadan çıkışının havadan fotoğrafı, 23 Nisan 1920. Tabii ki ***Atatürk*** ve kurmayları önde oldukları için fotoğraf karesinin dışına çıkmışlardır (Bkz. "*Kanvas Tablo*"). Fakat bu fotoğrafta ilgimi çeken şey, daha önce hiçbir fotoğrafta görmediğim yıldızın aynısını 2008'deki ***"Babil Algoritmasından Modern Kök Algoritmalarına Doğru 4000 Yıllık Bir Yolculuk"*** kitabımın kapağında kullanmış olmamdır. Powerpoint ile hazırladığım o kapakta yıldızın içini kırmızı renkle boyamış ve üzerine de beyaz renkle *"Atam izindeyiz!"* yazısını yazmıştım. Buradaki yıldız ise renklendirmede beyaz çıktı. Yani beklendiği gibi bayrağımızdakiyle aynı renktedir.

29/30 Ekim 1923 gecesi Meclis Cumhuriyet'in ilânı için toplandı ve ***M. Kemal Paşa***'nın ifadesiyle Cumhuriyetimiz şöyle ilân edildi: *"Efendiler, Meclis'çe Cumhuriyet kararı 29/30 Ekim 1923 gecesi saat 20.30'da verildi"*. 15 dakika sonra yani 20.45'te Cumhurbaşkanı seçildi. Bunun üzerine ***Mustafa Kemal Paşa***, Meclis'te kısa bir Teşekkür konuşması yaparak şöyle dedi: *"Türkiye Cumhuriyeti mesut, başarılı ve muzaffer olacaktır"*. Durum, aynı gece bütün memlekete bildirildi ve her tarafta gece yarısından sonra 101 pâre top atılarak ilân edildi (Bkz. "*Cumhuriyet'in İlânı*").

Böylesine önemli bir karar ve böylesine kısa bir konuşma… Kimse anlam veremedi.

Bunun nedenini yıllar sonra şöyle açıkladı: *"Diş protezlerimi yeni takmıştım, tecrübe devresindeydi, henüz alışamamıştım, söz söylemeye başladığım vakit ıslık gibi sesler çıkıyordu veyahut ağzımdan düşüyordu, dilime dolaşıyordu, rahat konuşamıyordum, ne yapayım kısa kestim!"*

Gündüz bu haldeydi. Peki ya akşam?

29 Ekim 1923 akşamı burnunda sıcaklık hissetti. Banyoya koştu, lavabo kan içinde kaldı. Ecza dolabını açtı, önceden hazırlanmış pamuk tamponlarını burnuna tıkadı, sırtüstü uzandı.

([6]) ***J. L. Heiberg*** *(ed.), Archimedes Opera omnia cum commentariis Eutocii (Leipzig, 1910-15, reprinted 1972).*

Bir süredir böyleydi… Hizmetlileri tembihliydi; kanlı havlu, kanlı yastık varsa, kimse görmeden ortadan kaldırılıyordu, gizlice yıkanıp ütüleniyordu. Yaverlerinden, arkadaşlarından saklıyordu. Doktor demek kısıtlama demekti.

Keşke böyle düşünmeseydi ama, böyle düşünüyordu. Çok işi vardı… İstirahat gibi tavsiyeleri duymak istemiyordu.

30 Ekim 1923 sabahı… ***Mustafa Kemal***, ***İsmet İnönü***’ye mektup yazdı.

Cumhuriyet'in ilk cumhurbaşkanı, Cumhuriyet'in ilk gününde, Cumhuriyet'in ilk başbakanına şöyle diyordu:

“Bize, geri, borçlu, hastalıklı bir vatan miras kaldı. Yoksul ve esir ülkelere örnek olacağız. Kaderin bizim kuşağımıza yüklediği bir görev bu!

Özgür bir toplum oluşturmak zorundayız. Çağdaşlaşmak, bu ideali gerçekleştirmek zorundayız.

Bu görevin ağırlığını ve onurunu seninle paylaşmak istedim. Allah yardımcımız olsun.”

Bu zavallı durumdaki memleket, Mustafa Kemal vizyonu sayesinde, sadece 10 yıl sonra bilim dünyasının çekim merkezi haline geldi… Nazi zulmünden kaçan Alman profesörler Atatürk Cumhuriyeti'ne sığındı.

Not 2.1. Yukarıda resimden sonraki ilk paragraftan sonrakiler ***Yılmaz Özdil***’in “*Mustafa Kemal*” adlı kitabının 160, 163 ve 164. sayfalarından alınmadır. Ama ben soruma bir yanıt bulamadım!

Fakat bize kazık atan aynı Amerika ([7]), Yunanlılar’a daha fena kazık atıyordu. Bu nedenle konuyu ***Antreas Hatzipolakis***’in mesajlarından takip ederken Arşimet Palimptsesti’nin Yunanistan’a geri verilmeden müzayedede satışa sunulmasından dolayı ben de üzülmüştüm. Çünkü bir Arşimet uzmanı ve Princeton’da İleri Çalışma Enstitüsü’nde (Institute for Advanced Study) Tarih Emeritus profesörü olan ***Marshall Clagett***’in, *“Çalışma kesinlikle bir halk enstitüsünde bulunmalı ve bir kişinin aile arşivine hapsedilmemelidir. O, bunun için çok önemli bir çalışmadır.”* dediği gibi kitap Yunanca idi ve kesinlikle bir kişiye ait olamazdı. İşte bu yüzden Christie’s çok büyük bir hata yapıyordu. Ama bundan daha fenası, sanki kitabın çalınmasından biz Türkler sorumluymuşuz gibi Cumhuriyetimizin 75. Yıldönümü olan 29 Ekim 1998’de satma kararı alması ve uygulamasıydı. Hafızam beni yanıltmıyorsa Yunan Kültür Bakanı ***Evangelos Venizelos***’un çabaları unutulur gibi değildi!

Resim 2.5. ***Venizelos*** Cumhuriyet Balosu’nda, 29 Ekim 1930. Soldan sağa doğru ***İsmet İnönü***’nün eşi ve kendisi, Macaristan Başbakanı ***Kont Betlen***’in eşi ve kendisi, ***Afet İnan***, Yunanistan Başbakanı ***Venizelos***, Bayan ***Venizelos*** ve ***Atatürk***, Meclis Başkanı ***Kazım Özalp***’in eşi ve kendisi.

Yunan Kültür Bakanı ***Evangelos Venizelos***’un adaşı olan Yunan Başbakanı ***Elefteros K. Venezilos***, Balkan Paktı’nın çekirdeğini oluşturan bir dizi antlaşma için 26 Ekim 1930’da İstanbul’a geldi ve oradan Ankara’ya geçerek Cumhuriyet Balosu’na katıldı. Bu ziyaret esnasında Türk-Yunan Dostluğu’nun temelleri atıldı. Taraflarca kabul edilen antlaşmalar Yunan Meclisi’nin 20 Aralık 1930 tarihli toplantısında müzakere edilerek kabul edildi. ***Venizelos***, konuşmasında Ankara’ya giderek el ele verip dostluk temin ettiğini, Türkler’in geçmişte Yunanlılar’ın yapmış olduğu tahribatı unuttuğunu, kendilerinin de fedakarlıkta bulunduğunu söyledi. ***Venizelos***, bu durumu Nobel’e aday gösterdiği ***Atatürk***’e yazdığı mektubunda ısrarla vurgular ve mektubun sonunda şöyle der: *“Bu nedenle 1930 yılında Yunan Hükümet Başkanı sıfatı ile ben, Türk-Yunan Paktı’nın imzası ile Yakın Doğu’da barışa doğru yeni bir devir başlarken, Mustafa Kemal Paşa’yı Yüksek Nobel Ödülü için aday göstermekle şeref kazanırım”*, *Venizelos’un Atatürk’e mektubu, 1934*. Fakat dostluk tek taraflı değildir. ***Atatürk*** de buna karşılık, berberiyle şakalaşırken son noktayı koyar (ki berber deyip geçmeyin. Her şeyi ilk ona anlatırdı. Yani berber, ***Atatürk***’ün sırdaşı idi): *“Bu memleket işidir. Bu yüzden dost olmaya, dost görünmeye mecburuz. Hem bunu yapmazsak tarih bizi affetmez!”*, *Venizelos’un İstanbul’a gelişi*.

Arşimet Palimpsesti’nin başına gelen olaylar yukarıda özetle anlattığım şekilde olurken bizde de şu gelişmeler oldu: 21 Şubat 1997’de birçok gazetede *“Manisalı Pi Dahisi”* başlıklı haber çıktı. Manisa’da bir oto lastik satıcısı olan ***Taner Yönder***, ilkokul mezunu olduğu halde Arşimet’in Teoremi’nden yola çıkarak trigonometriyi devredışı bırakan

([7]) Amerika’dan kasıt, Türkiye-Yunanistan’a ve dünyanın diğer tüm ülkelerine karşı kötücül düşüncelere ve bunları uygulama gücüne sahip olan bir grup Amerikalıdır. Yani halklar daima iyidir ama yönetimler bazen kötü olabiliyor.

bir yöntem geliştirdi. Yöntemi, açının 2'ye bölündüğü dik üçgenlerde Pisagor Teoremi'ne dayanır. O, bu keşfi **"Sayıların Tutkunu"** olmasına bağlar ve şöyle der: *"Benim yöntemimle π sayısının hesabını, karekök almayı ve 4 işlem bilen herkes yapabilir"*. ***Yönder***, kendi adına tescil ettirdiği formülü, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'ndeki bir grup öğretim üyesine anlattı ve şimdi bu formül onun adına kayıtlıdır. Bkz. *"π İçin Yeni Bir Seri"*. Hatta, gazetelerden hatırladığım kadarıyla, Başbakan ***Prof. Dr. Necmettin Erbakan***, bu gelişme karşısında *"İlim Avrupa'ya Türk ve Müslümanlar yoluyla geldi…"* minvalinde bir açıklama bile yapmıştı.

Sözkonusu ***Taner Yönder***'in çalışmasına nasıl eriştiğimi ve ilgilendiğimi DPTALBUM1-eBook4.pdf dosyasında şu şekilde vermiştim:

*"**Arktanjant Fonksiyonu'nun İlk Gerçek Formülü'nün Keşfi ve Arşimet'in Metodu-Milenyum Versiyonu Albümü'nün Doğuşu***

*1997'de **Taner YÖNDER**'in, çalışmaları sonunda **Arşimet'in Metodu**'nda 3000 yıldır gözden kaçan ve önermiş olduğu çokgenlerin kenarları arasındaki oranları bulması dikkatimi çekmişti. Bu gelişme haber olarak 21 Şubat 1997'de **Manisalı Pi dahisi** başlığıyla Akşam gazetesinde çıkmıştı. Hatta, dönemin Başbakanı **Prof. Dr. Necmettin ERBAKAN** konuyla ilgili bir açıklama bile yapmıştı! Benim bu çalışmaya erişmem ise 16.8.2000'de internete **Superonline** (18 aylık sınırsız) sayesinde bağlanmamla oldu ve 31.12.2000'de **Copernic 2000** programı sayesinde http://sci.ege.edu.tr/~durusoys/Turkey_pi/index.html adresinden **Taner YÖNDER**'in **Turkey Pi** adıyla tanıtılan çalışmasını aldım. 2001 ve 2002'de yurtdışındaki pi sayısı ile ilgili birçok sitede bu adresi gördüm ve oralarda da yayınlanmasına hem şaşırdım, hem de bir Türk olarak gururlandım. Onun çalışmasını Archimedes, Viete ve Taner YÖNDER tarafından π için verilen serilerin genelleştirilmesi dosyasında esaslı bir şekilde ele aldım ve 16.7.2001 tarihinde web sayfamın kütüphanesinde*

*Derya PAMUK TULUM: **Archimedes, Viete ve Taner YÖNDER tarafından pi için verilen serilerin genelleştirilmesi**, **The MathQuake**, 16.7.2001, SS. 26.*

şeklinde yayınladım. Bu çalışmayı yeniden bazı eklerle bu albümde yayınlayacağım. Tabii ki bu konu üzerinde çalışmalarımı sürdürürken, 2001 Temmuz'unda web sayfamın kütüphanesinde 10 tane PDF (Adobe Acrobat 5.0 Dosyaları) formatlı dosya yayınlamıştım!"

Burada sözüne ettiğim çalışma, 22.07.2002 tarihli ve A4 formatında 243 sayfalık 10 e-kitaptan oluşan ***"Arşimet'in Metodu M.V."*** albümü idi. İşte bu çalışmalarım sonucunda 31.08.2002'de ***Arşimet***'in ***"Daire Çevresi Ölçmesi Hakkında"*** adlı risalesindeki **Önerme 3**'ünün ***Eutokios***'un yorumundan sonra 2. kez yorumlama şansına sahip oldum. Bu yeni yorumda ***Eutokios***'un hesaplamalarını değiştirmeden yalnızca çalışmanın iskeletini modernleştirdim ve bu çalışmayı derhal tripodtaki siteme *"D. PAMUK TULUM: Daire Çevresi Ölçmesi, Önerme 3: Türk-Yunan Dostluğu 2002 için Yeni Bir Versiyon, 1. Albüm: Arşimet'in Metodu MV-Türk-Yunan Metodu Ver. 1.0, The Mathquake-2002"* başlığıyla koydum. Yani ***Taner Yönder*** ile benim yaptığım şey, ***Atatürk*** ile ***Venizelos***'un başlattığı Türk-Yunan Dostluğu'na bir katkı idi!

2.1.1.2. Leydenli Krallara Bir Saygı Ziyareti

Şimdi bu dostluk adına daha fazla ileri gitmeden Tablo 2.2'deki sonuçlar için şu sonuca dikkat edelim: Tablo 2.2'nin 2. sütununda π'nin doğru basamaklarını veren kırmızı renkli rakamlarını elde edebilmek için, o satırdaki A_n ve B_n'lerin aynı sayıda basamakta doğru olmaları gerekir. Örneğin 3. Satır-3. Sütundaki $S_0^{(2)}$ ile π'nin 7 ondalığı doğrulanmıştır. Bu durumda A_0, A_1, A_2 ve B_0, B_1, B_2'lerin de 7 ondalıklarının doğru olması gerekiyor. Peki bu tür hesaplar Antik dönemde yapılabiliniyor muydu? Mümkün değil. Çünkü π için ilk büyük hesaplar (ki bunlara ***"Büyük El Hesapları"*** deniyordu) 16. yy.'da ***Vieta*** ile başlayarak ***Van Ceulen*** ile sona erdi ve 17. yy.'da da ***Snellius*** ile başladı.

Çok ilginçtir ***Snellius***, *"Cyclometricus"*unda öğretmeni ***Van Ceulen***'in π için 32 ondalığında takılan hesaplarını 35 ondalığa tamamlamaya çalışırken Tablo 2.2'nin 2. Sütunundakilere yakın olan yaklaşıklıkları şöyle verdiler:

***Van Ceulen* ve *Snellius*'un π İçin İnanılmaz Performansları**			
$\mathbf{2^n, 5.2^n}$**-genler**	***Matematikçi***	π_n	Π_n
$\mathbf{5.2^4 = 80}$	*Van Ceulen*	3.1404	3.14325
	Snellius	3.1404	3.1438
$\mathbf{5.2^6 = 320}$	*Van Ceulen*	3.1414	3.1418
	Snellius	3.1414	3.1418
$\mathbf{5.2^{13} = 40,960}$	*Van Ceulen*	3.14159265	3.14159266
	Snellius	3.14159265	3.14159266
$\mathbf{5.2^{19} = 1,048,5760}$	*Van Ceulen*	3.1415926535889	3.141592653592
	Snellius	3.1415926535889	3.1415926535898
$\mathbf{2^{30} = 1,073,741,824}$	*Van Ceulen*	3.14159265358979322	3.14159265358979325
	Snellius	3.141592653589793225	3.141592653589793245

Tablo 2.3. Tablonun son 2 sütunundaki sonuçlar ***Van Ceulen***'in *"Vanden Circkel"*i ve ***Snellius***'un *"Cyclometricus"*undan alınmıştır. Kırmızı renkli rakamlar π'nin doğru basamaklarını ve diğerleri hatalı rakamları gösterir.

Şimdi Tablo 2.2&2.3'ü bir araya getirdiğimizde 400 yıl sonra şu sonucu görüyoruz: Eğer ***Van Ceulen*** ve ***Snellius*** Snellius ekstrapolasyonunu keşfetselerdi π için yıllar süren hesaplamalar yapmalarına gerek kalmazdı. Çünkü örneğin son satıra bakarsak; ***Van Ceulen*** ve ***Snellius*** π'nin 16 ondalığını 2^{30}-genlerle bulurlarken $S_0^{(4)}$ için yalnızca 6,12,24,48,96-genler yetiyordu!

2.1.2. Ekstrapolasyonda Aritmetik Ortalama

Eğer K ve T için (2.2)'de ilkin $k = 0$ alırsak taraf tarafa toplamada (1.18)'e göre

$$R_{n+1,1}(K) = \frac{4R_{n+1,0}(K) - R_{n,0}(K)}{4-1} = \frac{4K_{n+1} - K_n}{3}$$
$$R_{n+1,1}(T) = \frac{4R_{n+1,0}(T) - R_{n,0}(T)}{4-1} = \frac{4T_{n+1} - T_n}{3}$$
$$R_{n+1,1}(K) + R_{n+1,1}(T) = \frac{4(K_{n+1} + T_{n+1}) - (K_n + T_n)}{3} = \frac{4.2K_{n+2} - 2K_{n+1}}{3} = 2.\frac{4K_{n+2} - K_{n+1}}{3} = 2.\frac{4R_{n+2,0}(K) - R_{n+1,0}(K)}{4-1} = 2R_{n+2,1}(K)$$

eşitliklerinden

$$(2.12)\quad R_{n+2,1}(K)=\frac{R_{n+1,1}(K)+R_{n+1,1}(T)}{2}$$

sonucu elde edilir.

Sonuçta işleme bu şekilde devam edildiği takdirde MEM gereğince herhangi bir k doğal sayısı için

$$(2.13)\quad R_{n+2,k}(K)=\frac{R_{n+1,k}(K)+R_{n+1,k}(T)}{2}$$

eşitliğini doğru kabul edersek $k+1$ için yani K ve T için (2.2)'de taraf tarafa toplamada (2.13)'e göre

$$R_{n+1,k+1}(K)=\frac{4^{k+1}R_{n+1,k}(K)-R_{n,k}(K)}{4^{k+1}-1}$$
$$R_{n+1,k+1}(T)=\frac{4^{k+1}R_{n+1,k}(T)-R_{n,k}(T)}{4^{k+1}-1}$$

$$R_{n+1,k+1}(K)+R_{n+1,k+1}(T)=\frac{4^{k+1}\left(R_{n+1,k}(K)+R_{n+1,k}(T)\right)-\left(R_{n,k}(K)+R_{n,k}(T)\right)}{4^{k+1}-1}=\frac{4^{k+1}.2R_{n+2,k}(K)-2R_{n+1,k}(K)}{4^{k+1}-1}=2.\frac{4^{k+1}R_{n+2,k}(K)-R_{n+1,k}(K)}{4^{k+1}-1}=2R_{n+2,k+1}(K)$$

eşitliklerinden

$$(2.14)\quad R_{n+2,k+1}(K)=\frac{R_{n+1,k+1}(K)+R_{n+1,k+1}(T)}{2}$$

şeklinde (1.18)'deki aritmetik ortalamanın ekstrapolasyonda da yani R altında da geçerli olduğu sonucu çıkar.

Sözkonusu (1.12)'deki sıralamanın R altından da korunduğunu

$$(2.15)\quad K_{n+1}<\cdots<R_{n+1,k+1}(K)<R_{n+2,k+1}(K)<\cdots<I<\cdots<R_{n+1,k+1}(T)<\cdots<T_{n+1}$$

gösteren ve I'ya yaklaşımların K ve T'nin kendilerinden çok daha hızlı olduklarını ama (2.14)'teki aritmetik ortalamayla bunun biraz daha da iyi olduğunu veren konkav f(x) fonksiyon ailesinin mevcut olduğuna dikkat etmek gerekiyor. Yani bu sıralamayı koruyan konkav f(x) fonksiyon ailesinin mevcut olduğunu göstermek bir araştırma konusudur. Yani konkav f(x) fonksiyonunun eğriliği (eğrilik çapı) ne olması gerekir ki bu sıralama korunsun? Ve bu türdeki konkav f(x) fonksiyonları tek midir yoksa bir aile oluşturur mu?

2.1.2.1. Tekrar Hoş Geldin Snell Amca!

Fakat (2.15)'e göre Snellius algoritması yine aritmetik ortalamadan daha iyidir:

$$(2.16)\quad R_{n+1,k+1}(K)<R_{n+2,k+1}(K)<\underbrace{\frac{2R_{n+1,k+1}(T)+R_{n+1,k+1}(K)}{3}}_{\text{Snellius}-1621}<\cdots<I<\cdots<R_{n+1,k+1}(T).$$

Tarihi bilgilerimize göre ***Snellius (Snelyüz)***, 1621'de *"Cyclometricus"*da RİK 1'deki (29)'u, dolayısıyla (2.4)'ü vermiştir. Fakat 19 ve 20. yy.'da trapez yöntemi için ekstrapolasyonların önemi anlaşılınca bu formül 1911'de ***Becker*** tarafından tekrar verilmiştir (Bkz. *"Survey of Extrapolation Processes In Numerical Analysis/3. Numerical integration"*, p. 442, (28)). Ancak ***Becker***, (2.4)'ün, Snellius algoritması olduğundan habersiz olarak, yalnızca K_n ve T_n'nin Euler-Maclaurin formülüne göre elimine yoluyla çıkarmıştır!

Burada biraz duralım. Çünkü 1458'de ***Kardinal Nikolas***, 1621'de ***Snellius*** ve 1654'de ***Huygens*** tarafından π için verilen algoritmalar aynı zamanda ilk ekstrapolasyon formülleridir ve bunlar genelleştirilebilinir. Kaldı ki 2002'de Snellius Ekstrapolasyonu'nu ve 2003'te de Kardinal Nikolas Ekstrapolasyonu'nu ortaya çıkarttım ve ***Huygens***'in algoritmasının genelleştirilmiş şekli de Richardson Ekstrapolasyonu olduğuna göre, bunların üçü de Nümerik Analiz'in kurucusu sayılır ya da Nümerik Analiz bunlarla başlar dersek yanlış olmaz. Yani ***Becker***'in yaptığı iş, ***Troçki***'nin, ona hapishane müdürünün bir pasaj okuduğunda, ***Dostoyevski***'yi tanımamasına benzer ki ben, sadece bu tarihi gerçeği hatırlattım! (Bkz. *"Trotsky"*)

Yine tarihi bilgilerimize göre ***Snellius***, 1621'de (2.4)'ü verirken yalnızca π için vermişti ve bu, f(x)'in konveks olmasına denk düşer ki (burada düzgün n-genlerin konveks olmasına dikkat ediniz) RİK 1'deki (29)'dur. Oysa Şekil 1.1'deki f(x) konkavdır ve bu durumda K ile T yer değiştirirler ve (2.15)'e göre bunlara ait aritmetik ortalama ile Snellius algoritması I'nın alt sınırı olurlar!

2.1.2.1.1. Snellius- Huygens Algoritmaları Arasındaki İlişki: Öncelikle Snellius algoritması ile Huygens algoritması π'de birbirlerinden elde edilemediklerine ve bunların yaklaşık halinde olduklarına dikkat etmemiz gerekiyor. Fakat ekstrapolasyona geçtiğimizde (2.3)'e göre (2.2)'de $k=0$ için elde edilen Huygens algoritmasından, (1.18)'deki aritmetik ortalamayı kullandığımızda,

$$(2.17)\quad R_{n+1,1}(K)=\frac{4R_{n+1,0}(K)-R_{n,0}(K)}{4-1}=\underbrace{\frac{4K_{n+1}-K_n}{3}}_{\text{Huygens}-1654}=\frac{4.\overbrace{\frac{K_n+T_n}{2}}^{\text{Aritmetik Ortalama}}-K_n}{3}=\underbrace{\frac{2T_n+K_n}{3}}_{\text{Snellius}-1621}$$

Snellius algoritmasını elde ederiz. Yani π'de birbirine yaklaşık halinde olan Snellius-Huygens algoritmaları ekstrapolasyonda birbirine eşittirler!

Sözkonusu bu ilişki ekstrapolasyonda genel olarak da geçerlidir. Yani ***Huygens***'in algoritmasından,

$$(2.18)\quad \frac{4R_{n+2,k+1}(K) - R_{n+1,k+1}(K)}{3} = \frac{4.\frac{R_{n+1,k+1}(K) + R_{n+1,k+1}(T)}{2} - R_{n+1,k+1}(K)}{3} = \frac{2R_{n+1,k+1}(T) + R_{n+1,k+1}(K)}{3}$$

şeklinde ***Snellius***'un algoritması ya da ***Snellius***'un algoritmasından

$$(2.19)\quad \frac{2R_{n+1,k+1}(T) + R_{n+1,k+1}(K)}{3} = \frac{2\left(2R_{n+2,k+1}(K) - R_{n+1,k+1}(K)\right) + R_{n+1,k+1}(K)}{3} = \frac{4R_{n+2,k+1}(K) - R_{n+1,k+1}(K)}{3}$$

şeklinde ***Huygens***'in algoritması elde edilebilinmektedir!

Burada son olarak (2.16)'daki Snellius algoritmasının (1.14)'teki aritmetik ortalamadan

$$(2.20)\quad R_{n+2,k+1}(K) = \frac{R_{n+1,k+1}(K) + R_{n+1,k+1}(T)}{2} < \frac{2R_{n+1,k+1}(T) + R_{n+1,k+1}(K)}{3} < \cdots < I \Rightarrow R_{n+1,k+1}(K) < R_{n+1,k+1}(T)$$

sonucu nedeniyle I'ya daha yakın olduğuna dikkat etmek gerekiyor!

Derya PAMUKTULUM

Derya PAMUKTULUM

Dijital olarak imzalayan Derya PAMUKTULUM
Tarih: 2019.11.05 21:26:40 +03'00'