Önsöz

Arktanjant Fonksiyonu'nun İlk Gerçek Formülü ile Pi Sayısının Hesabı

π'nin Arktanjant Bağıntılarına Dayalı Hesapların Tarihi Gelişimi

Bu tarihi gelişimi genel olarak üç döneme ayırabiliriz:

I. Dönem (π'nin Geometrik Dönemi): 17. yüzyıla kadar π sayısı için geometriksel çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmaların çoğu; bir çemberin içine veya içine ve dışına çizilen düzgün çokgenlerin çevrelerinin veya alanlarının hesaplarından yararlanılması suretiyle π sayısı için yaklaşımlara dayalıydı. Bu dönem boyunca π, henüz bir notasyon olarak kullanılmıyordu. Çünkü, π sayısı yalnızca geometriksel bir orandı.

Ben de, *Arşimet*'in orijinal düşünüşüne sadık kalmak suretiyle bu dönemin çalışmalarını esaslı bir şekilde yeniden inceledim. Sözkonusu, bu incelemelerde; *π'nin Geometrik Dönemi*'ne ilişkin *Tarihi Örnekler* ile birlikte bazı örnekler olmak üzere toplam 11 tane örnek incelenmiştir. Bunun için; *çapı 1 birim olan çemberin içine ve dışına cetvel ve pergelle çizilebilen bazı düzgün çokgenler ile pi'nin hesapları* yapılmıştır ve sonuçta, **Geometrik Dönem'in veya Arşimetçilerin Örnekleri'nin Genelleştirilmesi** yapılmıştır.

II. Dönem (π'nin Geometrik Dönemi Sonrası veya Klasik Dönem): Bu döneme bazen *Klasik Dönem* de denilmektedir. Bu dönem, 1650'lerde başladı ve 1970'lere kadar devam etti. Bu dönem boyunca π sayısı için çok sayıda analitik ifade (Sonsuz Seriler, Sonsuz Çarpımlar,...) keşfedildi ve π'nin birçok basamağı hesaplandı.

1655'de *Wallis*, π sayısı için bir sonsuz çarpım formülü verdi, 1658'de de *Lord Brouncker*, bir sonsuz sürekli kesir formülü verdi. Birkaç yıl sonra, 1671'de *Gregory* ve 1676'da *Newton* sırasıyla arktanjant ve arksinüs fonksiyonu için bir kuvvet serisi buldular. 1706'da *Machin*, bir arktanjant formülüyle π'nin ilk 100 basamağını hesapladı. 18. yüzyıl boyunca π için diğer arktanjant formülleri *Klingenstierna*, *Euler*, *Hutton*, *Herman*, *Pfaff*, *Gauss*, *Buzengeiger*,… tarafından verildi. 1796'da *Vega* π'nin ilk 136 basamağını buldu.

Önsöz

19. yüzyıl devasa el hesaplarının yapıldığı bir zamandı! Bu inanılmaz insanüstü hesaplayıcılar, π'nin daha fazla basamağını buldular. *Dahse*, *Lehmann*, *Clausen*, *Rutherford* ve sonuçta en büyük el hesabıyla 1874'de *William Shanks*, π'nin ilk 707 basamağını buldu.

1945'te elektronik hesaplayıcılarla π'nin daha fazla basamağı için yeniden araştırmalar başladı. *Ferguson*, *Shanks*'ın hesabındaki 528-inci basamakta bir hata buldu. 1970'lerin sonlarına doğru arktanjant bağıntıları π'nin basamaklarını arttırmak için kullanıldı. *Wrench*, *D. Shanks*, *Guilloud*, *Kanada*,... bu dönemin aktörlerinden birkaçı. Ancak, 20. yüzyılın başlarında π'nin sıradışı (olağanüstü) serilerini bulan Hintli matematikçi *Ramanujan*'a özel bir bölüm ayırmak gerekli!

Sözkonusu olan, arktanjant fonksiyonunun ilk gerçek formülüyle bu döneme ait örneklerin incelemesinde; *π'nin Geometrik Dönemi Sonrası*'na ilişkin *Tarihi Örnekler* ile birlikte bazı örnekler olmak üzere toplam 26 tane örnek incelenmiştir. Bu tarihi örnekler sırasıyla **Machin-1706**, **D. H. Lehmer-1938**, **Hutton-1776**, **Euler-1755- Pfaff**, **Klingenstierna-1730-Buzengeiger**, **Herman-1706**, **Strassnitzky-1844**, **Pascal SEBAH**, **Wetherfield-1996**, **Derya PAMUK TULUM-29.07.2001**, **Knop**, **FibonacciPi**, **LucasPi** ve **GoldenMeanPi** formülleridir.

III. Dönem (Modern Dönem): Bu dönem, 1970'lerde *Richard Brent* ve *Eugene Salamin*'in çalışmasıyla başladı. *Eugene Salamin*, 1976'da ilk bilinen ***Kuadratik Algoritma***yı yayınladı ve aynı yılda *Richard Brent* de aynı algoritmayı *Eugene Salamin*'nin çalışmasından bağımsız olarak keşfetti. Bu iki matematikçi, π'nin yeni bir tür ifadesini bulmak için *Aritmetik ve Geometrik Ortalama* (*Arithmetic-Geometric Mean* (AGM)) üzerine *Gauss* ve *Legendre* tarafından verilen sonuçları kullandılar. Diğer benzer sonuçlar, *Jonathan Borwein* ve *Peter Borwein* tarafından keşfedildi.

III. Dönem'de En Büyük Keşif: BBP Serileri

1995'te *David Bailey*, *Peter Borwein* ve *Simon Plouffe*, π için yeni bir algoritma keşfettiler ve bu algoritmaya *BBP Serileri* adı verildi (Bu serilere BBP Serileri denmesinin nedeni; bu serileri ilk kez keşfeden üç matematikçinin baş harflerinden **BBP** (**B**ailey-**B**orwein-**P**louffe) oluşmaktadır.). BBP Serileri, 1995 de daha yeni keşfedildiğinden, bu serilerin yapısı tam anlamıyla anlaşılabilmiş değil. Çünkü, bu seriler birer hipergeometrik seri olduğundan, genel terimleri karmaşık yapıdadır.

Sözkonusu, bu yeni seriler, matematiksel bir sabitin basamakları bulunurken; önceki basamaklara gerek kalmadan doğrudan sonraki basamakları hesaplayabilme imkanı vermektedir. Bu durum, bize BBP serileriyle matematiksel bir sabitin basamaklarını hesaplarken, önceki basamaklar bloklar halinde izole edildiğinden, bunları depolama imkanını verir ki; bu bloklar sıralı olarak yanyana getirildiğinde, hesaplanan matematiksel sabitin basamakları yazılmış olur.

DAVID BAILEY, *PETER BORWEIN* ve *SIMON PLOUFFE*'un BBP Serileri için yaptıkları ortak çalışmalar bir rapor halinde:

1. On The Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants, 1997

2. The Quest for Pi, The Mathematical Intelligencer, 1997

yayınlanmıştır. Bu iki çalışmanın genel hatlarına bakıldığında; bu üç matematikçinin ve diğer matematikçilerin polilogaritma fonksiyonundan hareketle bu fonksiyona özdeş olan bazı fonksiyonların lineer kombinasyonlarıyla bazı matematiksel sabitleri hesaplamışlardır. Bu formüllerdeki matematiksel sabitler genel olarak 2'nin bir kuvveti tabanında hesaplanmaktadır. Ancak, bu formüllerin bilgisayara uyarlanmasında 2 tabanı ve daha çok 16 tabanı tercih edilmektedir.

Bu matematiksel sabitlerin hesaplanmasında kullanılan algoritmalara dikkatli bir şekilde bakıldığında; burada arktanjant fonksiyonu için en iyi algoritmayı veren *Fabrice BELLARD* faktörü ortaya çıkmaktadır. Çünkü, benim de BBP Serileri üzerine yaptığım araştırmalarda; doğrudan BBP formunda olup, en iyi yakınsama yapan arktanjant fonksiyonlarından üçünden ikisini *Fabrice BELLARD* bulmuş ve diğeri de ilk kez **James Gregory** (1638-1675) tarafından bulunan, zamanında bizlere ***Leibniz Serisi*** olarak tanıtılan arktanjant fonksiyonudur. Halbuki, bu arktanjant fonksiyonunu 1671'de ilk kez seriye açan *James Gregory* adında İskoçyalı bir matematikçiymiş!

Oysa, bu serileri keşfeden *Bailey-Borwein-Plouffe*, 1995'de daha hızlı yakınsama yapan fonksiyonlar üzerinde çalışsalardı, 1997'de *Fabrice BELLARD*'ın bir arktanjant fonksiyon çiftine ait formülleri daha önce bulmuş olurlardı!

Fabrice Bellard (1973) Blason de L'Ecole Polytechnique'te bir öğrenci. Onun 20 Ocak 1997'de bulduğu algoritma sayesinde, arktanjant özdeşlikleriyle π sayısı için birçok BBP Formülü bulunabilinir. O kendi sitesinde; "Bu algoritmayı Taylor Serileriyle oynarken bulduğunu belirtmiş!" Bu hiç önemli değil. Çünkü, BBP serileriyle çalışan diğer matematikçilerin genel formdan hareketle buldukları π sayısının BBP Formülleri hemen hemen aynı yakınsama hızlarındadırlar. Ancak, *Fabrice BELLARD*'ın algoritmasıyla bu hızın yaklaşık olarak % 50 arttığını söyleyebiliriz. Bundan dolayı, ben, bu tür arktanjant serilerine *Süper Arktanjant Serileri* adını vermiştim ve *Fabrice BELLARD*'ın bulduğu arktanjant serisine 1. süper arktanjant serisi adını verdikten sonra, 29 Temmuz 2001'de keşfettiğim 2. süper arktanjant seri çiftine ait formülleri web sayfamın girişine koymuştum.

Bu konuda *Fabrice BELLARD*, π sayısı için bulduğu BBP Formülü için *Plouffe*'nkinden % 43 daha hızlı olduğunu söylemiştir ve bunun için kendi sitesinde

"The existence of a formula faster than (1) to calculate the **n**th binary digit of π remains an open question."

şeklinde açıkça meydan okumuştur. Burada (1) ile kastettiği şey, π sayısı için bulduğu BBP Formülüdür. Bu konuda detaylı bilgi almak için

Fabrice Bellard's Pi Page: http://fabrice.bellard.free.fr/pi/index.html#binary

linkine tıklayınız.

Bu bakımdan, π sayısının BBP Formülleri için *Fabrice BELLARD*'ın algoritması bir mihenk taşıdır. Zaten, beni bu işe sokan da onun çalışması ve onunla ilk kez 25 Nisan 2001'de başlayıp yaklaşık 1 aydır süren e-mailleridir.

Bu konuyla ilgili yaptığım ilk çalışma **Leonhard Euler'in Kaçırdığı Keşif ve BBP Serileri**dir. Bu çalışmadaki amaç; BBP Serileri için 1995'deki gibi BBP Serileri'nin polilogaritma fonksiyonlarından elde edilmesi gibi ağır bir çalışma değildi. Zaten bu metotla elde edilen BBP serilerinin pratikteki uygulamaları yeterli değildir. Bunun yerine, bu çalışmada BBP serilerinin pratik bir metotla elde edilmesi ve kullanışının da pratik olması esas amacımdı.

Ne yazık ki; BBP serileri ile tanışmam 2001-Nisan ayının sonlarına doğru olmuş ve bu yeni sahada esaslı çalışmalarım ise, ancak 2001-Haziran ayında olmuştur. Bu yeni seriler için internette birçok kez sörf yaptım ve *David Bailey*, *Peter Borwein*, *Simon Plouffe*, *Fabrice Bellard* ve *Victor Adamchick*'in çalışmalarını izleme şansım oldu. Bu beş matematikçinin yaptığı çalışmalara baktığımda; "Neden, bunlar BBP Serileri'ni daha kolay yoldan elde edememişler?" diye kendi kendime bir soru sormuştum. Çünkü, bunların çalışmalarına baktığımda, oldukça ağır matematiksel davranışlar içine girdiklerini gördüm. Gerçekten de, ilk başta ben de onların metotlarıyla birkaç tane yeni BBP Serisi elde etmiştim. Ancak, az önce de belirttiğim gibi, elde ettiğim bu BBP serilerini kullandıkları metot yönlendirdiği için, kullanımları da pek pratik olmuyordu ve istenilen bir fonksiyon için elde edilen BBP serisi, bu bakımdan pratik olmuyordu.

İşte, bu soruya yanıt bulabilmem için; **Leonhard Euler'in Kaçırdığı Keşif ve BBP Serileri** çalışmasını yapmam gerekirmiş. Çünkü, bu yeni serilerin içeriğini anlamam ancak bu çalışma sayesinde oldu ve orada R[x] polinom halkasında **Polinomlarda Çarpanlara Ayırma**dan yararlanarak **Geometri Serileri**ne uygulamamla birlikte 4 tane yeni BBP serisi tanımladım. Ancak, bu 4 yeni BBP serisini veren fonksiyonları bir integralin alınması sonucuna bıraktım. Zaten, BBP serilerinde önermiş olduğum metot da buradan çıktı. Çünkü, bu çalışmadan hareketle Polinomlarda Çarpanlara Ayırma yoluyla bir dizi araştırma yaptım ve sonunda bu düşüncemin doğru olduğunu gördüm. Bu, bir fonksiyonun seriye açılımı için; eski, fakat pek önem verilmeyen veya dikkat çekmeyen bir yöntemdir. Bu yöntemde de, bir fonksiyonun x'in kuvvet serilerine açılımı sözkonusudur, ancak bunu yaparken Polinomlarda Çarpanlara Ayırma Yöntemi'nden yararlanılır. İşte, yeni veya daha önce bilinip de bu konu için önemsenmeyen davranış budur. Bunu bir örnekle açıklayayım. Bu örnek, *Leonhard Euler'in Kaçırdığı Keşif ve BBP Serileri*'nde yaptığım ilk örnektir:

Euler, 1779 da Petersburg Akademisi'nde iken şu formülü bulmuştur. Bu formül, hatırlanacağı üzere,

$$\operatorname{Arc}\tan\frac{x}{2-x}=2\int_0^x\frac{1}{4+x^4}dx+2\int_0^x\frac{x}{4+x^4}dx+\int_0^x\frac{x^2}{4+x^4}dx$$

şeklindedir. Ben, bu formülden yararlanarak,

$$[1]\quad \operatorname{Arc}\tan\frac{x}{2-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+2}}\left(\frac{x^{4n+3}}{4n+3}+2.\frac{x^{4n+2}}{4n+2}+2.\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)$$

şeklinde $\operatorname{Arc}\tan\frac{x}{2-x}$ fonksiyonunu x'in kuvvetlerine göre seriye açmıştım. Yine, bu formülün dualitesi olan

$$\operatorname{Arc}\tan\frac{x}{2+x}=2\int_0^x\frac{1}{4+x^4}dx-2\int_0^x\frac{x}{4+x^4}dx+\int_0^x\frac{x^2}{4+x^4}dx$$

şeklindeki formülden yararlanarak,

$$[2] \quad \operatorname{Arctan}\frac{x}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+2}}\left(\frac{x^{4n+3}}{4n+3} - 2.\frac{x^{4n+2}}{4n+2} + 2.\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)$$

şeklinde $\operatorname{Arctan}\frac{x}{2+x}$ fonksiyonunu x'in kuvvetlerine göre seriye açmıştım.

Peki, $\operatorname{Arctan}\frac{x}{2-x}$ ve $\operatorname{Arctan}\frac{x}{2+x}$ fonksiyonunun x'in kuvvetlerine göre seriye açılımları nasıl yapıldı? İşte, kritize edilmesi gereken soru budur? Çünkü, fonksiyonların x'in kuvvetlerine göre seriye açılımları veya 1995'de bu serilere verilen yeni adla BBP Serileri'ne açılımları, burada yatan davranışla elde edilebilirler. Ne yazık ki; BBP'cilerin yaptıkları çalışmalara bakıldığında; bir fonksiyonun BBP Serisi için bu basit davranıştan habersiz oldukları görülür. Çünkü, onlar BBP Serileri için bu basit davranış yerine, çok ağır davranışlar içine girmişler. İşte, matematik ve tüm bilimlerde bu karanlık noktaların çözümü için; bilimde esnek düşünceli olmak gerekir. Yani, bir bilimdeki yöntemler arasındaki ilişkileri görebilmek ve bunları iyi analiz edip, istenilen sonucu çıkartmak gerekir ki; bu yönteme *algoritma* ve bu kişilere de *algorist* dendiğini biliyoruz. *Leonhard Euler*, matematik dünyasının yetiştirdiği en büyük algorist olarak bilinmektedir. *Euler*'in algoristliği, problemi karmaşıklıktan kurtarıp kolaylaştırmasında ve farklı yöntemler kullanarak çözmesinde yatar. Ancak, onun da ne derecede bir algorist olduğunu, **Leonhard Euler'in Kaçırdığı Keşif ve BBP Serileri**nde gördük. Bu durumda, *Leonhard Euler*'in $\operatorname{Arctan}\frac{x}{2-x}$ fonksiyonunu x'in kuvvetlerine göre seriye açılımını veya yeni adıyla BBP Serisi'ne açmayı beceremediğini kabul etmemiz gerekir. Kısacası, *Euler* [1] formülünü bulamamıştır. Ayrıca, [2] formülünü de gözden kaçırması, *Euler* için affedilmez bir davranıştır. Ama, sonuç ne olursa olsun, BBP Serileri için bulduğum algoritma, onun çalışması sayesinde ortaya çıkmıştır.

Arktanjant Fonksiyonu'nun İlk Gerçek Formülü'nün Keşfi ve Arşimet'in Metodu-Milenyum Versiyonu Albümü'nün Doğuşu

1997'de **Arşimet'in Metodu** için *Taner YÖNDER*'in Çalışmaları sonunda 3000 yıldır gözden kaçan ve önermiş olduğu çokgenlerin kenarları arasındaki oranları bulmasıyla dikkatim çekildi. Bu haber olarak, 1997 yılında (yalnızca haberle ilgili haber küpürünü kestiğimden, tam tarih veremiyorum.) **Manisalı Pi dahisi** başlığıyla *Akşam* gazetesinde çıkmıştı. Hatta, zamanın başbakanı ***Prof. Dr. Necmettin ERBAKAN***, konuyla ilgili bir açıklama bile yapmıştı! Ancak, benim bu çalışmaya erişmem 16.8.2000'de internete ***Superonline*** (18 aylık sınırsız) sayesinde bağlanmamla oldu. Daha sonra, ***Copernic 2000*** programı sayesinde 31.12.2000'de

http://sci.ege.edu.tr/~durusoys/Turkey_pi/index.html

adresinden *Taner YÖNDER*'in **Turkey Pi** adıyla tanıtılan çalışmasını aldım. Daha sonraları, 2001 ve 2002'de, yurtdışındaki pi sayısı ile ilgili birçok sitede bu adresi gördüm. Bu çalışmanın yayınlanmasına hem şaşırdım, hem de bir Türk olarak gururlandım. Neden? Bu sorunun açılımı çok geniştir. Ama, bu işin kestirmeden izahı şudur: Onlar, yani çağdaş ülkeler matematiğe, dolayısıyla insanlığa katkıda bulunan herkese, ırkına, diline, dinine,... vb. bakmadan ilgi gösteriyorlar. İşte, bunun için *Taner YÖNDER*'in çalışmasına ilgi göstermişler.

Önsöz

Daha sonra, ben bu çalışmayı **Archimedes, Viete ve Taner YÖNDER tarafından π için verilen serilerin genelleştirilmesi** dosyasında esaslı bir şekilde ele aldım ve 16.7.2001 tarihinde web sayfamın kütüphanesinde

Derya PAMUK TULUM, ***Archimedes, Viete ve Taner YÖNDER tarafından pi için verilen serilerin genelleştirilmesi***, ***The MathQuake***, 16.7.2001, SS. 26.

şeklinde yayınlamıştım. Bu çalışmayı yeniden bazı eklerle bu albümde yayınlayacağım.

Tabii ki, bu konu üzerinde çalışmalarımı sürdürürken, 2001 Temmuz'unda web sayfamın kütüphanesinde 10 tane PDF (Adobe Acrobat 5.0 Dosyaları) formatlı dosya yayınlamıştım. Ne yazık ki; kütüphanemdeki bu 10 çalışma, özellikle BBP Serileri, *Arşimet'in Metodu* çalışmasını oldukça yavaşlattığını ve bazen de sıfırladığını söyleyebilirim.

5 Ekim 2001/Cuma günü saat: 20:00 civarlarında BBP Serileri üzerine çalışma yaparken, kendi kendime "*Fabrice BELLARD*'ın ([1]) yaptığı uygulamanın bir benzeri neden *Arşimet Metodu* ile, elde edilebilirse, arktanjant fonksiyonu ile yapılmasın?" sorusunu sormuştum ve bir çemberdeki yayın limitinden hareketle bulduğum arktanjant fonksiyonunu klasik arktanjant bağıntılarına uygulayarak, π'nin yeni formüllerini buldum. Yanılmıyorsam; pek çok tarihi kaynakları da kontrol etmek suretiyle π sayısı için ilk defa bu formülleri ben vermiş oluyorum. Ancak, doğrusu bu konuda o kadar da iddialı olmak istemem. Çünkü, bu konuyla ilgili birçok kaynağa bakmama rağmen, yine de yanılabilirim. Fakat, hiçbir kaynakta π için bu tür formülleri görmediğimi itiraf etmeliyim. Ayrıca, böyle bir gelişme karşısında kayıtsız kalamayacakları açık olup, bu formüllerin internete de aktarılmamış olması da bir gerçeğin altını çizmekte olduğunu düşünüyorum. Sonuçta, daha önceden π için bu tür formüller verilmiş olsun veya verilmemiş olsun bu çalışmayla yeniden gündeme getirmiş olmanın mutluluğu içindeyim.

Gerçi, *Bir Çemberde Kiriş Uzunluğunun Yay Uzunluğuna Oranı'nın Yarım Açı Formülüyle Bulunması* çok önceden biliniyor ve buradan arktanjant fonksiyonunun bulunması çok basit bir davranıştır. Ancak, arktanjant fonksiyonunun trigonometrik formülden rekürans (cebirsel) formülüne geçiş (bilinen, ancak pek az önem verilen bir bilgi) ve π nin klasik arktanjant bağıntılarına dayalı hesap şekli yeni bir davranış olarak karşımıza çıkmaktadır. Daha önceden aynı davranışı, 20 Ocak 1997'de *Fabrice BELLARD* yapmıştır.

Söz konusu, bu yeni davranışla π nin Geometrik Dönemi'ne ve Geometrik Dönemi Sonrası'na ilişkin Tarihi Örnekler ile birlikte diğer örnekler esaslı bir şekilde yeniden incelenmiştir.

Öte yandan, bu çalışmayla *Taner YÖNDER*'in; "***Benim yöntemimle π sayısının hesabını, karekök almayı ve dört işlemi bilen herkes yapabilir.***" şeklinde çok arzuladığı dileğini en geniş bir şekilde yerine getirdiğim için, ayrıca çok mutluyum. Çünkü, **1. Nesil Arktanjant Fonksiyonu ile Pi Sayısının Hesabı**, **Ver. 3** çalışması, **Archimedes, Viete ve Taner YÖNDER tarafından π için verilen serilerin genelleştirilmesi** çalışmasını da kapsayan en genel haldeki çalışmadır.

([1]) 20 Ocak 1997'de *Fabrice BELLARD*, klasik olmayan arktanjant serisini (Ben, bu tür arktanjant serilerine *Süper Arktanjant Serileri* adını vermiştim ve *Fabrice BELLARD*'ın bulduğu arktanjant serisine 1. süper arktanjant serisi adını verdikten sonra, 29 Temmuz 2001'de keşfettiğim 2. süper arktanjant seri çiftine ait formülleri web sayfamın girişine koymuştum.) bulmuş ve pi'nin BBP Serileri'ni vermişti.

Önsöz

Bu yeni çalışmayı, **Bir Çemberde Kiriş Uzunluğunun Yay Uzunluğuna Oranı ile Pi Sayısının Hesabı** adıyla 12 Ekim 2001'de adresi:

http://dpamuktulum.tripod.com **(The MathQuake)**

olan web sayfamda yayınladım. Bu dosya web sayfamın girişinde aşağıdaki tanıtımla sitemde yayınlanmıştı!

The last revised (Turkish) Formula to compute Pi

Derya PAMUK TULUM, 12.10.2001

Bir Çemberde Kiriş Uzunluğunun Yay Uzunluğuna Oranı'nın limiti'nden elde edilen ***arktanjant fonksiyonu***: Negatif olmayan her x reel sayısı için

$$(1)\quad f_n(x)=\sqrt{2+f_{n-1}(x)},\quad f_0(x)=2\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

olmak üzere

$$(2)\quad \tan^{-1}x=\lim_{n\to\infty}2^{n-1}\sqrt{2-f_n(x)}.$$

Örnek 1 (*Çapı 1 birim olan çemberin içine çizilen düzgün* 4.2^n *-genin çevresiyle pi'nin hesabı*)**:**

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1$$

eşitliğinde

$$f_n(1)=\sqrt{2+f_{n-1}(1)},\quad f_0(1)=0$$

için

$$\pi=\lim_{n\to\infty}2^{n+1}\sqrt{2-f_n(1)}.$$

Örnek 2 (*Machin'in Formülü ile pi'nin hesabı*)**:** 1706'da *Machin*, pi'nin arktanjant fonksiyonuna dayalı aşağıdaki özdeşliği vermiştir:

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

Arktanjant fonksiyonunun ilk gerçek sunumuyla ***Machin'in Formülü***:

Önsöz

$$f_n\left(\frac{1}{5}\right)=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)},\quad f_0\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{24}{13}$$

$$f_n\left(\frac{1}{239}\right)=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{239}\right)},\quad f_0\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{57120}{28561}$$

için

$$\pi=\lim_{n\to\infty}2^{n+1}\left(4\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{5}\right)}-\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{239}\right)}\right).$$

Gerçi, *Bir Çemberde Kiriş Uzunluğunun Yay Uzunluğuna Oranı'nın Limiti* çok önceden biliniyor ve buradan arktanjant fonksiyonunun bulunması çok basit bir davranıştır. Ancak, yeniden gözden geçirilerek elde edilen ***ilk gerçek arktanjant fonksiyonu***nun trigonometrik formülünden rekürans (cebirsel) formülüne dönüştürülmesi (bilinen, ancak pek az önem verilen bir bilgi) ve pi'nin klasik arktanjant bağıntılarına dayalı hesap şekli, daha önceden farkedilmemiş bir davranış olarak karşımıza çıkmaktadır.

14.11.2001'de bu çalışma; *Alper ZENGİNTAŞ*'ın uyarısı üzerine Lise Seviyesi'nde yeni bir sunumla ***1. Nesil Arktanjant Fonksiyonu ile Pi Sayısının Hesabı, Ver. 2*** olarak

1. MATEMATÜRK (http://www.matematurk.f2s.com) sitesindeki YAZILAR bölümünde,
2. MATEMATİK DOSYASI (http://www.matematik.dosyasi.com) sitesindeki ÖZEL KONULAR bölümünde

yayınlandı. Bu çalışma için, sitemin giriş sayfasında aşağıdaki duyuruyu yapmıştım:

"Hatırlarsanız, en son çalışmam olan Arktanjant Fonksiyonuyla Pi Sayısının Hesabı çalışmasını Lise Seviyesi'ne indirgemiştim ve şu anda bu çalışma:

1. MATEMATÜRK (http://www.matematurk.f2s.com) sitesindeki YAZILAR bölümünde,
2. MATEMATİK DOSYASI (http://www.matematik.dosyasi.com) sitesindeki ÖZEL KONULAR bölümünde

yayınlamaktadır.

Tabii ki, bu 14 sayfalık çalışma *A*rşimet Metodu ile Pi Sayısının Hesaplanmasında bir yenilikti. Şimdi hedef büyüttüm ve bu çalışmayı da kapsayan ***ARŞİMET PROJESİ*** için ***Düzgün Poligonlar ile Çemberin Ölçümüyle Birlikte Gelen Yeni Keşifler***i 2002'nin ilk çeyreğinde yayınlayarak, yayın hayatına yeniden döneceğim. İnanıyorum ki; bu albüm Arşimet Projesi'nde en önemli kilometre taşlarından biri olacaktır."

Açık olarak; Lise Seviyesi için bu yeni sunumun önsözünde aşağıdaki uyarıyı yapmıştım:

Önsöz

"Şimdi, 8 Kasım 2001 tarihi itibariyle bu çalışmayı daha da genişleterek, yeni keşiflerin ortaya çıktığını söyleyebilirim. Ancak, bu yeni gelişmeleri sizlere aktarabilmek, oldukça zor bir iştir. Çünkü, bu çalışmada Cebir-Analiz-Geometri-Trigonometri'nin oldukça ağır araçları kullanılmıştır. Ben de, *Alper ZENGİNTAŞ*'ın uyarısı üzerine, bu çalışmayı "bir lise (Ne yazık ki; en az Lise 3) öğrencisinin anlayabileceği" düzeyde aşağıda sunmaya çalıştım. Çünkü, bu çalışmada geçen Dizi-Limit konuları Lise 3'te anlatılmaktadır. Ancak, bana göre; matematik aşığı bir Lise 1 öğrencisi bile aşağıda en basite indirgediğim çalışmayı anlayabilir. Çünkü, insanda var olan temel güdü; ***öğrenme isteği*** sınır tanımamaktadır. O halde, bu çalışmanın daha iyi anlaşılabilmesi için; **Örnek 7**'deki pi sayısının hesabını aşağıda açık bir şekilde veriyorum: **Örnek 7**'deki formüllerden yararlanan bir Lise 1 öğrencisi:

$$\pi_0 = 2\left(\sqrt{2 - f_0\left(\frac{1}{2}\right)} + \sqrt{2 - f_0\left(\frac{1}{3}\right)}\right) = 2\left(\sqrt{2 - \frac{6}{5}} + \sqrt{2 - \frac{8}{5}}\right) = \frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{5}} = 3,(05376544\ldots)$$

$$\pi_1 = 2^2\left(\sqrt{2 - f_1\left(\frac{1}{2}\right)} + \sqrt{2 - f_1\left(\frac{1}{3}\right)}\right) = 2^2\left(\sqrt{2 - \frac{4}{\sqrt{5}}} + \sqrt{2 - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt[4]{5}}\left(\sqrt{2\sqrt{5} - 4} + \sqrt{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}\right) = 3,1(1948130\ldots)$$

$$\pi_2 = 2^3\left(\sqrt{2 - f_2\left(\frac{1}{2}\right)} + \sqrt{2 - f_2\left(\frac{1}{3}\right)}\right) = 2^3\left(\sqrt{2 - \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+4}}{\sqrt[4]{5}}} + \sqrt{2 - \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{5}}}\right)$$

$$= \frac{8}{\sqrt[8]{5}}\left(\sqrt{2\sqrt[4]{5} - \sqrt{2\sqrt{5}+4}} + \sqrt{2\sqrt[4]{5} - \sqrt{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}}\right) = 3,1(3605511\ldots)$$

$$\vdots$$

$$\pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

çalışmasını yapabilir. Diğer örneklerin çözümü de benzer şekilde yapılabilir."

Öte yandan, maalesef bu tür zorlu çalışmaların yayını için kesin bir tarih vermek mümkün değil, ama bu albümü 2002'nin ilk çeyreğinde yayınlayabileceğimi düşünmüştüm. Ancak, günümüzün moda deyimiyle "Evdeki hesap çarşıya uymadı". Yani, ***1. Nesil Arktanjant Fonksiyonu ile Pi Sayısının Hesabı, Ver. 3*** dosyasını ve dolayısıyla bu çalışmayla elde edilen bu albümü içime sinmeden yayınlamak istemedim. Yoksa, elimdeki çalışmaları derleyerek de bu albümü yayınlamam mümkündü. Fakat, bu durumda da şimdi yayınladığım bu albümden birçok güzellik yok olurdu.

Son olarak; *Taner YÖNDER'in Çalışması* hariç, üzülerek hiçbir matematikçiden referans almadığımı belirtmek isterim.

Derya PAMUK TULUM, 18.05.2002 00:56

Arktanjant Fonksiyonu'nun İlk Gerçek Formülü: Negatif olmayan her x reel sayısı için

$$(1)\quad f_n(x)=\sqrt{2+f_{n-1}(x)},\quad f_0(x)=2\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

olmak üzere,

$$(2)\quad a_n(x)=2^{n-1}\sqrt{2-f_n(x)},\, b_n(x)=2^n\sqrt{\frac{2-f_n(x)}{2+f_n(x)}}$$

dizileri için

$$(3)\quad a_n(x)\le \tan^{-1}x\le b_n(x)$$

olur ve sonuçta

$$(4)\quad a_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}\tan^{-1}x\xleftarrow{\infty\leftarrow n}b_n(x).$$

Not 1: Arktanjant Fonksiyonu'nun İlk Gerçek Formülü hakkında detaylı bilgi almak için; **Düzgün Poligonlar ile 1. Nesil Ters Transandant Fonksiyonlar**/1. **Ters Trigonometrik Fonksiyonlar**/1.3. **Ters Tanjant Fonksiyonu**, S. 11'e bakınız.

Oradaki detay bilgiye göre; $a_n(x)$ ve $b_n(x)$ dizilerinin her x reel sayısında geçerli olabilmesi için, (2) deki kareköklerin işaretleriyle x'in işareti aynı olması gerekir. Yani, (2) formülü:

$$(2')\quad a_n(x)=2^{n-1}\mathrm{Sgn}(x)\sqrt{2-f_n(x)},\, b_n(x)=2^n\,\mathrm{Sgn}(x)\sqrt{\frac{2-f_n(x)}{2+f_n(x)}}$$

şeklinde olmalıdır.

Aşağıdaki örnekler için http://numbers.computation.free.fr/Constants/Pi/pi.html sitesindeki pigeometry.htm sayfasında yer alan ilgili bölümleri aynen aşağıya aktarıyorum:

1 The geometric period

Up to the Seventeenth Century, approximations of π were founded by geometrical considerations. Most of the methods were dealing with regular polygons circumscribed about and inscribed in the circle. The perimeter or the area of those polygons were calculated with elementary geometry. During this period the *notation π was not used* and it was not yet a constant but just a geometrical ratio.

1.0.1 Ancient estimations

In one of the oldest mathematical text, *the Rhind papyrus* (from the name of the Egyptologist Henry Rhind who purchased this document in 1858 at Luxor), the scribe Ahmes copied, around 1650 B.C.E., eighty-five mathematical problems. Among those is given a rule to find the area of a circular field of diameter 9 : *"take away 1/9 of the diameter and take the square of the remainder"*. In modern notation, it gives

$$A = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2,$$

(A is the area of the field and d it's diameter) : so if we use the formula $A = \frac{d^2}{4}\pi$, comes the following approximation

$$A = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = 3.1(6049382\ldots)$$

This accuracy is astonishing for such ancient time. See ([4]) for a possible justification of this value.

On a Babylonian tablet from Susa, about 2000 B.C.E., the ratio of the perimeter of the circle to it's diameter was founded to be

$$\pi = 3\frac{1}{8} = 3.125.$$

Not 2: Pi sayısının tarihte ilk kayıda alındığı ünlü *Rhind Papirüsü*'nün de bulunduğu *Mısır Papirüsleri* hakkında detaylı bilgiyi

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Egyptian_papyri.html

linkinden alabilirsiniz.

1.0.2 Archimedes' method

The famous treatise *"On the measurement of the Circle"* from Archimedes of Syracuse (287-212 B.C.E.) gives the following numerical bounds for π

$$3.14(0884\ldots) = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = 3.14(2857\ldots).$$

Record of computation during the geometric period

Here as some other approximations founded by various mathematicians:

150 Claudius Ptolemy (Egypt) published 3.141666... in his *Almagest* (astronomical treatise), the value was given in sexagesimal fractions $3+8/60+30/60^2$.

287-212 Archimedes (Greek) gave 3.142857 with a polygon of 96 sides.

263 Liu Hui (China) gave 3.14159 with a polygon of 3072 sides.

499 Aryabhata (India) gave 3.14156 with of a polygon of 384 sides

830 Al'Khwarizmi (Arabia) : 22/7 and 62832/20000. The term *algorithm* came from his name.

1220 Leonardo of Pisa (Italy) : 3.141818. Also known as Fibonacci.

1430 Al-Kashi (Samarkand) : 14 digits with a polygon of 6.2^{27}sides

1579 François Viète (France) : 9 digits with a polygon of 393216 sides

1593 Adrianus Romanus (Netherlands) : 15 digits with a polygon of 2^{30} sides

1596 Ludolph Von Ceulen (Germany) : 20 digits with a polygon of 60.2^{33} sides.

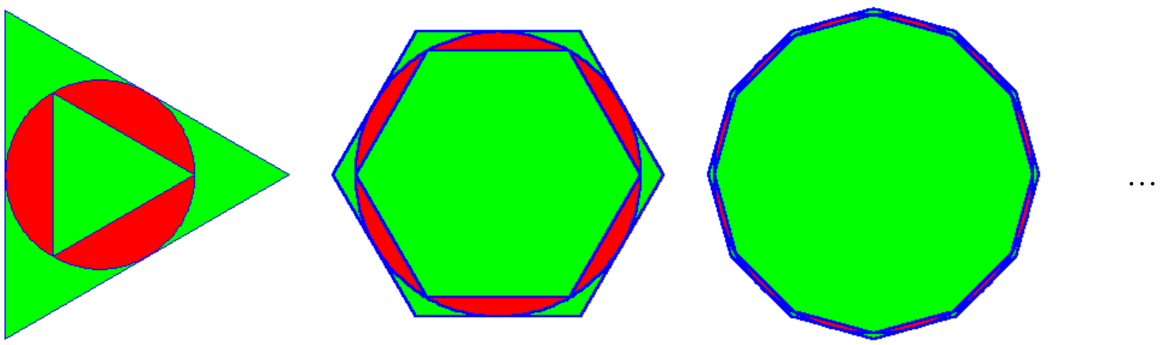
1609 Ludolph Von Ceulen (Germany) : 35 digits with a polygon of 2^{62} sides. He spent a considerable part of his life with such computations. Pi was often known as the *Ludolphine Number* in Germany.

1621 Willebrod Snellius (Netherlands) : 34 digits with a polygon of only 2^{30} sides thanks to an acceleration of Archimedes' method.

Geometrik Dönem'in veya Arşimetçilerin Örnekleri:

Örnek 1 (*Çapı 1 birim olan çemberin içine ve dışına çizilen düzgün* 3.2^n *-genin çevresiyle pi'nin hesabı*)**:**

$n=0$ $\quad$ $n=1$ $\quad$ $n=2$ $\quad \ldots$



$\pi_0 < \pi < \Pi_0$ $\quad$ $\pi_1 < \pi < \Pi_1$ $\quad$ $\pi_2 < \pi < \Pi_2$ $\quad \ldots$

$$(1) \quad \frac{\pi}{3} = \tan^{-1}\sqrt{3}$$

eşitliğinde

$$(2) \quad f_n\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{2 + f_{n-1}\left(\sqrt{3}\right)}, \quad f_0\left(\sqrt{3}\right) = -1$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n &= 3a_n\left(\sqrt{3}\right) = 3.2^{n-1}\sqrt{2 - f_n\left(\sqrt{3}\right)} \\ \Pi_n &= 3b_n\left(\sqrt{3}\right) = 3.2^{n}\sqrt{\frac{2 - f_n\left(\sqrt{3}\right)}{2 + f_n\left(\sqrt{3}\right)}} \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Not 3: 1997'de *Taner YÖNDER* (Türkiye), çalışmaları sonunda 3000 yıldır gözden kaçan ve önermiş olduğu çokgenlerin kenarları arasındaki oranları bularak, π_n formülünü

$$\pi = \underset{\times 3}{0.866025403\ldots n} : \underset{\times 6}{(\sqrt{3})} : \underset{\times 12}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})} : \underset{\times 24}{(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}})} : \underset{\times 3\times 2^{n+1}}{\ldots\ n} : 2r = 3.14159265358979323..n$$

şeklinde klasik bir ifadeyle vermektedir.

Taner YÖNDER, aynı çalışmada **Alan Hesabı**yla

$$S = \underset{\times 3}{0.375} : \underset{\times 6}{(\sqrt{3})} : \underset{\times 12}{(\sqrt{3})} : \underset{\times 24}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})} : \underset{\times \frac{3^n}{3}}{(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}})} : \ldots n : r^2 = 0.785398163\ldots n : 0.25 = 3.14159265358979323..n$$

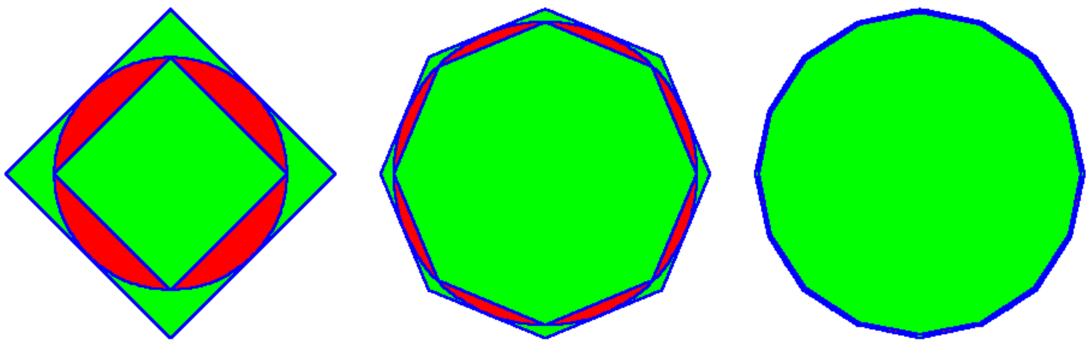
şeklinde bir formül daha vermiştir.

Taner YÖNDER'in çalışması hakkında detaylı bilgiyi

1. http://sci.ege.edu.tr/~durusoys/Turkey_pi/index.html
2. http://dpamuktulum.tripod.com/ArchimedesMethod/AlbumFiles/DPTAlbum1-eBook6.pdf

linklerinden alabilirsiniz.

Örnek 2 (*Çapı 1 birim olan çemberin içine ve dışına çizilen düzgün* $4.2^n = 2^{n+2}$ *-genin çevresiyle pi'nin hesabı*):



$$(1)\quad \frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1$$

eşitliğinde

$$(2)\quad f_n(1) = \sqrt{2 + f_{n-1}(1)}, \quad f_0(1) = 0$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n &= 4a_n(1) = 2^{n+1}\sqrt{2 - f_n(1)} \\ \Pi_n &= 4b_n(1) = 2^{n+2}\sqrt{\frac{2 - f_n(1)}{2 + f_n(1)}} \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Not 4:

1. π_n formülü, ünlü Fransız matematikçisi *François Vieta*'nın (1540-1603) 1953'te verdiği

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}.\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}.\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}} \cdots$$

formülüne karşılık gelir. Ünlü İngiliz matematikçisi *Lord Turnbull*, π için ilk gerçek formülün bu olduğunu söylemiştir.

Bu formül hakkında detaylı bilgiyi

1. http://dpamuktulum.tripod.com/ArchimedesMethod/AddendumFiles/MathGeo.pdf
2. http://numbers.computation.free.fr/Constants/Pi/iterativePi.html

linklerine tıklayarak alabilirsiniz.

2. 1593'te Hollandalı *Adrian Van Roomen* (veya *Adrianus Romanus*) nedense *Vieta'nın Formülü*'ne itibar etmemiş ki, klasik yöntemle 15 ondalığı bulmuştur. Onun kullandığı düzgün 2^{30}-genlerle π sayısı için

$$3.14159265358979323(398\ldots) = \pi_{30} < \pi < \Pi_{30} = 3.1415926535897932(4743\ldots)$$

şeklinde bir eşitsizlik elde edilir.

3. *Ludoph Von Ceulen*, π_n formülünü kullanarak düzgün bir 2^{62}-genle π nin 35 ondalığını hesapladı. *Ludolph*, bu hesap için hayatının önemli bir bölümünü, 1600'de son 10 yılını, harcadı ve 1610'da öldüğünde mezar taşına π nin 35 ondalığını veren sayı kazınarak yazıldı. Bu yüzden, π sayısı Almanya'da uzun bir süredir *Ludophine Sayısı* olarak adlandırıldı. Onun kullandığı düzgün 2^{62}-genlerle π sayısı için

$$3.14159265358979323846264338327950288(395\ldots) = \pi_{62} < \pi$$
$$< \Pi_{62} = 3.14159265358979323846264338327950288(468\ldots)$$

şeklinde bir eşitsizlik elde edilir.

Ludoph Von Ceulen hakkında bilgi almak için

Ludolph Van Ceulen's Home Page

linkine tıklayınız.

4. 1621'de Hollandalı *Willebrod Snellius*, düzgün 2^{30}-genler için Arşimet Metodu'ndaki algoritmaların hızlandırılmışı olan

$$\pi < \frac{2\pi_{30} + \Pi_{30}}{3} = 3.14159265358979323846264338327950 28(957\ldots)$$

algoritmasına karşılık gelen gometrik bir formülle π nin 35 ondalığını bulmuştur.

5. 1997'de *Taner YÖNDER* (Türkiye), çalışmaları sonunda 3000 yıldır gözden kaçan ve önermiş olduğu çokgenlerin kenarları arasındaki oranları bularak, π_n formülünü

$$\begin{array}{lllllll}\pi = 0.707106781\ldots n : & \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) : & \left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right) : & \left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\right) : & \ldots & n:2r = 3.14159265358979323..n \\ \quad \times & \times & \times & \times & & \times \\ \quad 4 & 8 & 16 & 32 & & 2^{n+1}\end{array}$$

şeklinde klasik bir ifadeyle vermektedir.

Taner YÖNDER, aynı çalışmada **Alan Hesabı**yla

$$\begin{array}{llllll}S = 0.5 : & \frac{\sqrt{2}}{2} : & \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) : & \left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right) : & \ldots\ldots n : & r^2 = 0.785398163\ldots n : 0.25 = 3.14159265358979323..n \\ & \times & \times & \times & \times & \\ & 1 & 2 & 4 & \frac{2^n}{2} & \end{array}$$

şeklinde bir formül daha vermiştir.

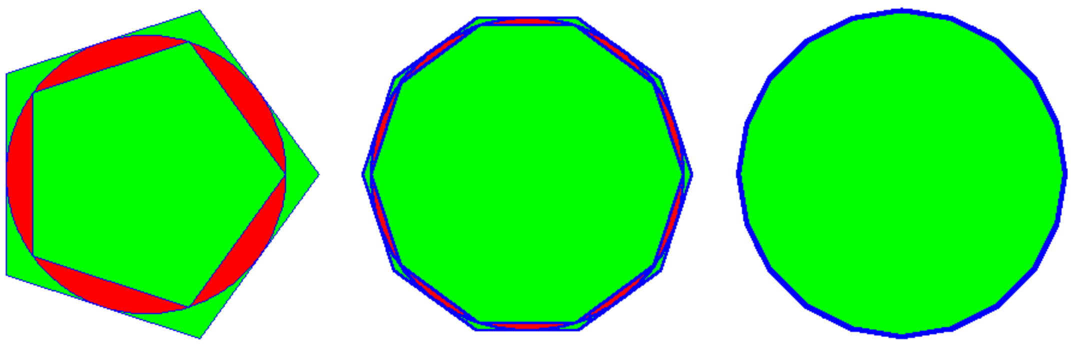
Taner YÖNDER'in çalışması hakkında detaylı bilgiyi

1. http://sci.ege.edu.tr/~durusoys/Turkey_pi/index.html
2. http://dpamuktulum.tripod.com/ArchimedesMethod/AlbumFiles/DPTAlbum1-eBook6.pdf

linklerinden alabilirsiniz.

Örnek 3 (*Çapı 1 birim olan çemberin içine ve dışına çizilen düzgün* 5.2^n *-genin çevresiyle pi'nin hesabı***):**

$n = 0$ $\quad$ $n = 1$ $\quad$ $n = 2$ $\quad$ …



…

$\pi_0 < \pi < \Pi_0$ $\quad$ $\pi_1 < \pi < \Pi_1$ $\quad$ $\pi_2 < \pi < \Pi_2$ $\quad$ …

$$(1) \quad \frac{\pi}{5} = \tan^{-1}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

eşitliğinde

$$(2) \quad f_n\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right) = \sqrt{2 + f_{n-1}\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)}, \quad f_0\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

olmak üzere,

$$
(3) \quad
\begin{aligned}
\pi_n &= 5a_n\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right) = 5.2^{n-1}\sqrt{2-f_n\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)} \\
\Pi_n &= 5b_n\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right) = 5.2^{n}\sqrt{\frac{2-f_n\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)}{2+f_n\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)}}
\end{aligned}
$$

dizileri için

$$
(4) \quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n
$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$
(5) \quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n
$$

dir.

Not 5: (1)'de

$$
\frac{\pi}{5} = \tan^{-1}\sqrt{7-4\phi}
$$

ve (2)'de

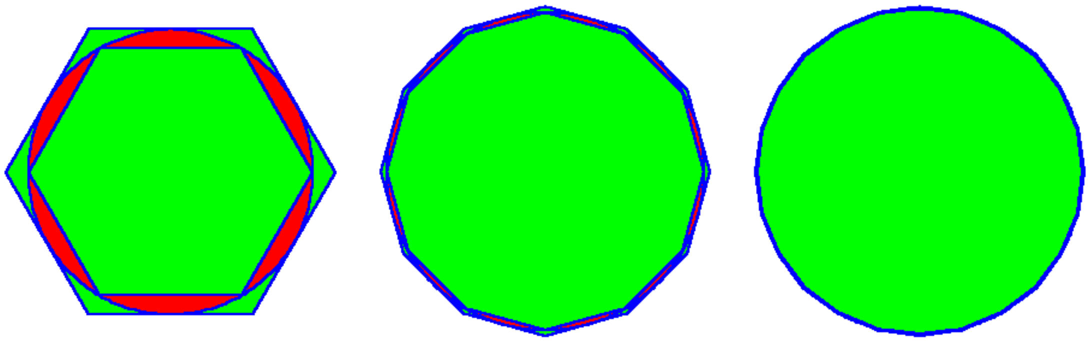
$$
f_0\left(\sqrt{7-4\phi}\right) = \frac{1}{\phi}
$$

dir. Burada ϕ sayısına ***Altın Oran*** denir.

Altın Oran hakkında detaylı bilgiyi Golden mean veya http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Golden_ratio.html linklerine bağlanarak alabilirsiniz.

Örnek 4 (*Çapı 1 birim olan çemberin içine ve dışına çizilen düzgün* $6.2^n = 3.2^{n+1}$*-genin çevresiyle pi'nin hesabı*)**:**

$n = 0$ $\quad$ $n = 1$ $\quad$ $n = 2$ $\quad$ …



…

$\pi_0 < \pi < \Pi_0$ $\quad$ $\pi_1 < \pi < \Pi_1$ $\quad$ $\pi_2 < \pi < \Pi_2$ $\quad$ …

$$(1)\quad \frac{\pi}{6} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

eşitliğinde

$$(2)\quad f_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{2 + f_{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)},\quad f_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n &= 6a_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3.2^n\sqrt{2 - f_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \\ \Pi_n &= 6b_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3.2^{n+1}\sqrt{\frac{2 - f_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2 + f_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}} \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

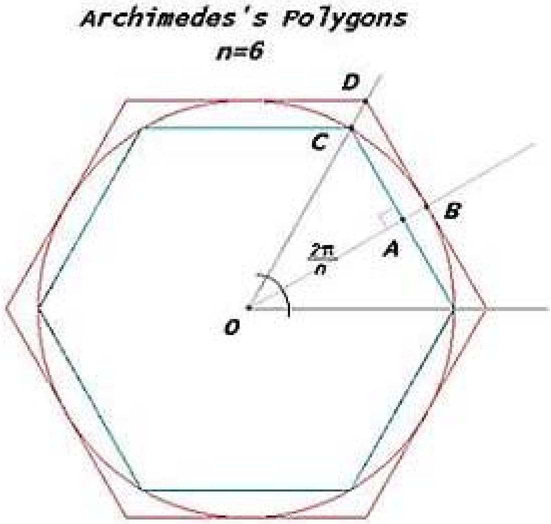
dir.

Not 6:

1. Sicilyalı *Arşimet*, kendisini ünlü yapan ***Çemberin Ölçümü*** çalışmasında π için

$$\frac{223}{71} = 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70} = \frac{22}{7}$$

eşitsizliğini vermiştir. *Arşimet*, bu çalışma için; bir çemberin içine ve dışına düzgün 6-genler çizerek, kenar sayıları 2'ye bölünen poligonlar kullanarak ki; bu poligonlar düzgün 6.2^n-genlerdir, çemberin çevresini düzgün 6-gen, 12-gen, 24-gen, 48-gen, 96-genler ile ölçmeye çalışıyor ve en sonunda çemberin çevresi için düzgün 96-genler sayesinde yukarıda kendisini tüm dünyaca meşhur matematikçi olmasını sağlayan eşitsizliği veriyor.



Arşimet'in Metodu için

http://www.escape.com/~paulg53/math/pi/archimedes/index.html

linkine bakınız.

Arşimet hakkında detaylı bilgiyi

http://www.mcs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/contents.html (***This site is a collection of Archimedean miscellanea under continual development with the following contents . . .***)

sitesinden alabilirsiniz.

Arşimet'in Çalışması ile ilgili diğer önemli linkler:

1. Archimedes' constant
2. Archimedes' constant p
3. http://itech.fgcu.edu/faculty/clindsey/mhf4404/archimedes/archimedes.html
   (Yaklaşık olarak) M.Ö. 250 yıllarında Arşimet'in ***Çemberin Ölçümü*** çalışmasında π için bir çemberin içine ve dışına düzgün 96-genler çizerek, kendisini tüm dünyaca meşhur matematikçi olmasını sağlayan eşitsizliği verdiği orijinal çalışması.
4. Archimedes' Approximation of Pi, Florida Gulf Coast University.
5. Archimedes' Method of Exhaustion, Neal Carothers.

2. 263'te Çinli *Liu Hui*, π_n formülünü kullanarak düzgün $3072 = 6.2^9$-genler ile

$$3.141592(105\ldots) = \pi_9 < \pi < \Pi_9 = 3.14159(3748\ldots)$$

π nin 5 ondalığını bulmuştur.

3. 499'da Hintli *Aryabhata*, π_n formülünü kullanarak düzgün $384 = 6.2^6$-genler ile

$$3.1415(57607\ldots) = \pi_6 < \pi < \Pi_6 = 3.141(662747\ldots)$$

π nin 4 ondalığını bulmuştur.

4. ***Pi'nin Kronolojisi***ne giren ilk ve tek Türk matematikçisi ve aynı zamanda Uluğ Bey' in gök bilimcisi olan Semerkant'lı ***Gıyasüddin Cemşid Mesut El-Kaşi*** (?-1429?), π_n formülünü bulmuştur. Bu formül hakkında detaylı bilgi için

http://dpamuktulum.tripod.com/ArchimedesMethod/AddendumFiles/MathGeo.pdf

linkine tıklayınız.

El-Kaşi'nin en önemli eseri, ***Risalet-ül Muhittiye ve Miftah-ül Hesap***'tır. ***Risate fi Muhit-ül Daire*** adlı eserinde düzgün 6.2^{27} -genler ile

$$3.1415926535891932(544\ldots) = \pi_{27} < \pi < \Pi_{27} = 3.1411592653589793\,23(05\ldots)$$

eşitsizliğindeki π_{27} ile π karşılaştırıldığında, *El-Kaşi*'nin π sayısı için bulduğu değer, bugün bilinen değere göre ilk 14 ondalık basamağına kadar doğru olduğunu göstermiştir. Bu da onun görüş ve hesaplama yönteminin üstünlüğünü ortaya koymaktadır.

5. 1579'da ünlü Fransız matematikçisi *François Viète* (1540-1603), π_n ile Π_n formülünü (Arşimet Metodu'nu) kullanarak düzgün $393216 = 6.2^{16}$ -genler ile, uzun bir hesaptan sonra

$$3.1415926535(56\ldots) = \pi_{16} < \pi < \Pi_{16} = 3.1411592653(656\ldots)$$

eşitsizliğini vererek π nin 9 ondalığını doğru olarak bulmuştur. Bu konu hakkında detaylı bilgi için http://numbers.computation.free.fr/Constants/Pi/pigeometry.html#Viete linkine tıklayınız.

6. 1621'de Hollandalı *Willebrod Snellius* (1580-1626), *Cyclometricus* adlı çalışmasında Arşimet Metodu'ndaki algoritmalardan, yani π_n ile Π_n den çok daha hızlı yakınsama yapan

$$\frac{2\pi_n + \Pi_n}{3}$$

algoritmasına karşılık gelen geometrik bir formül vermiştir. Örneğin, Arşimet'in *Çemberin Ölçümü* çalışmasında π için en son kullandığı poligonlar (düzgün 96-genler) için *Snellius*

$$\frac{2\pi_4 + \Pi_4}{3} = 3.141592(83380\ldots)$$

değerini vermiştir ki; bu yaklaşım Arşimet'inkinden çok daha iyi bir yaklaşımdır.

Willebrod Snellius'un kullandığı metotdan başka diğer *Hızlandırılmış Metotlar* için http://numbers.computation.free.fr/Constants/Pi/pigeometry.html#Phil linkine tıklayınız.

7. *Gauss*'un öğretmeni olan *Pfaff*, 1800'de Arşimet Metodu'ndaki geometrik formüllerin modern bir formülünü vermiştir. Bugün bu formül, *Pfaff Formülasyonu* olarak bilinmektedir.

Pfaff Formülasyonu: Birim çemberin içine ve dışına çizilen 6.2^n –genin çevresi sırasıyla u_n ve v_n olmak üzere, $u_0 = 2\sqrt{3}, v_0 = 3$ başlangıç değerleri için

$$(1) \quad u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$$

$$(2) \quad v_n < v_{n+1} < \ldots < \pi < \ldots < u_{n+1} < u_n$$

$$(3) \quad v_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} u_n$$

şeklindedir. Oysa, bu formüller ile **Örnek 4**'deki formüller arasında

$$(4) \quad u_n = \Pi_n, v_n = \pi_n$$

şeklinde bir ilişki vardır.

Aslında, Pfaff Formülasyonu, Arşimet Metodu ile elde edilen a_n ve b_n dizileri için de genel bir yöntemdir.

Pfaff Formülasyonu

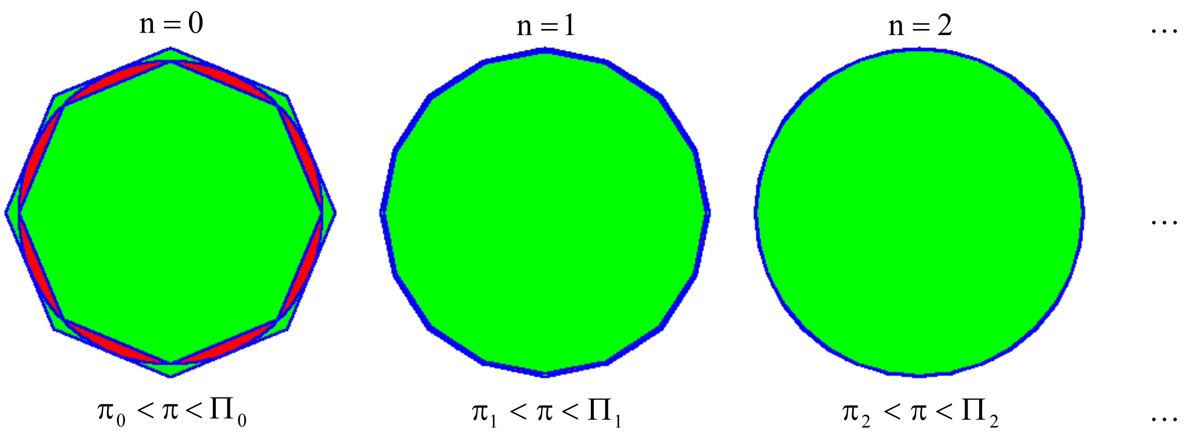
1. http://numbers.computation.free.fr/Constants/Pi/iterativePi.html
2. http://numbers.computation.free.fr/Constants/Pi/pigeometry.html

ve ***Genelleştirilmiş Pfaff Formülasyonu*** hakkında detaylı bilgiyi

3. http://dpamuktulum.tripod.com/ArchimedesMethod/AlbumFiles/DPTAlbum1-eBook3.pdf

linklerine tıklayarak alabilirsiniz.

Örnek 5 (*Çapı 1 birim olan çemberin içine ve dışına çizilen düzgün* $8.2^n = 2^{n+3}$*-genin çevresiyle pi'nin hesabı*)**:**



$$(1)\quad \frac{\pi}{8} = \tan^{-1}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

eşitliğinde

$$(2)\quad f_n\left(\sqrt{2}-1\right) = \sqrt{2+f_{n-1}\left(\sqrt{2}-1\right)},\quad f_0\left(\sqrt{2}-1\right) = \sqrt{2}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n &= 8a_n\left(\sqrt{2}-1\right) = 2^{n+2}\sqrt{2-f_n\left(\sqrt{2}-1\right)} \\ \Pi_n &= 8b_n\left(\sqrt{2}-1\right) = 2^{n+3}\sqrt{\frac{2-f_n\left(\sqrt{2}-1\right)}{2+f_n\left(\sqrt{2}-1\right)}} \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

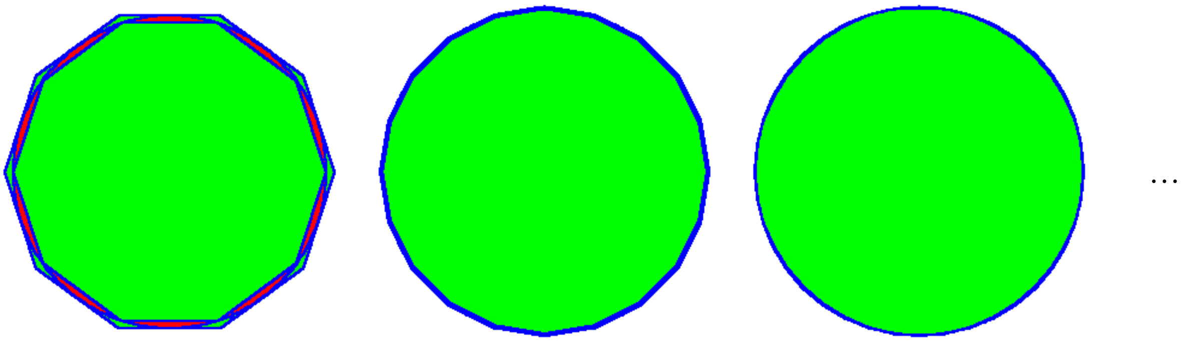
eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 6 (*Çapı 1 birim olan çemberin içine ve dışına çizilen düzgün* $10.2^n = 5.2^{n+1}$*-genin çevresiyle pi'nin hesabı*)**:**

$n = 0$ $\qquad$ $n = 1$ $\qquad$ $n = 2$ $\qquad \ldots$



$\pi_0 < \pi < \Pi_0$ $\qquad$ $\pi_1 < \pi < \Pi_1$ $\qquad$ $\pi_2 < \pi < \Pi_2$ $\qquad \ldots$

$$(1)\quad \frac{\pi}{10} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

eşitliğinde

$$(2)\quad f_n\left(\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\right)=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\right)},\quad f_0\left(\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n &= 10a_n\left(\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\right)=5.2^n\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\right)} \\ \Pi_n &= 10b_n\left(\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\right)=5.2^{n+1}\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\right)}} \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Not 7: ϕ sayısı ***Altın Oran*** olmak üzere, (1)'de

$$\frac{\pi}{10}=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{4\phi+3}}$$

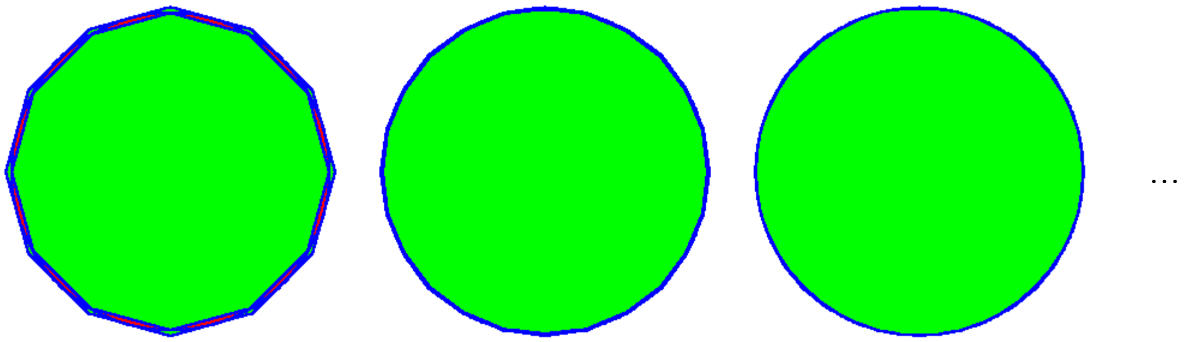
ve (2)'de

$$f_0\left(\frac{1}{\sqrt{4\phi+3}}\right)=\phi$$

dir.

Örnek 7 (*Çapı 1 birim olan çemberin içine ve dışına çizilen düzgün* $12.2^{n} = 3.2^{n+2}$*-genin çevresiyle pi'nin hesabı*)**:**

$n = 0$ $\qquad$ $n = 1$ $\qquad$ $n = 2$ $\qquad$ …



$\pi_0 < \pi < \Pi_0$ $\qquad$ $\pi_1 < \pi < \Pi_1$ $\qquad$ $\pi_2 < \pi < \Pi_2$ $\qquad$ …

$$(1) \quad \frac{\pi}{12} = \tan^{-1}\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

eşitliğinde

$$(2) \quad f_n\left(2 - \sqrt{3}\right) = \sqrt{2 + f_{n-1}\left(2 - \sqrt{3}\right)}, \quad f_0\left(2 - \sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$$

olmak üzere,

$$(3) \quad \begin{aligned} \pi_n &= 12a_n\left(2 - \sqrt{3}\right) = 3.2^{n+1}\sqrt{2 - f_n\left(2 - \sqrt{3}\right)} \\ \Pi_n &= 12b_n\left(2 - \sqrt{3}\right) = 3.2^{n+2}\sqrt{\frac{2 - f_n\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2 + f_n\left(2 - \sqrt{3}\right)}} \end{aligned}$$

dizileri için

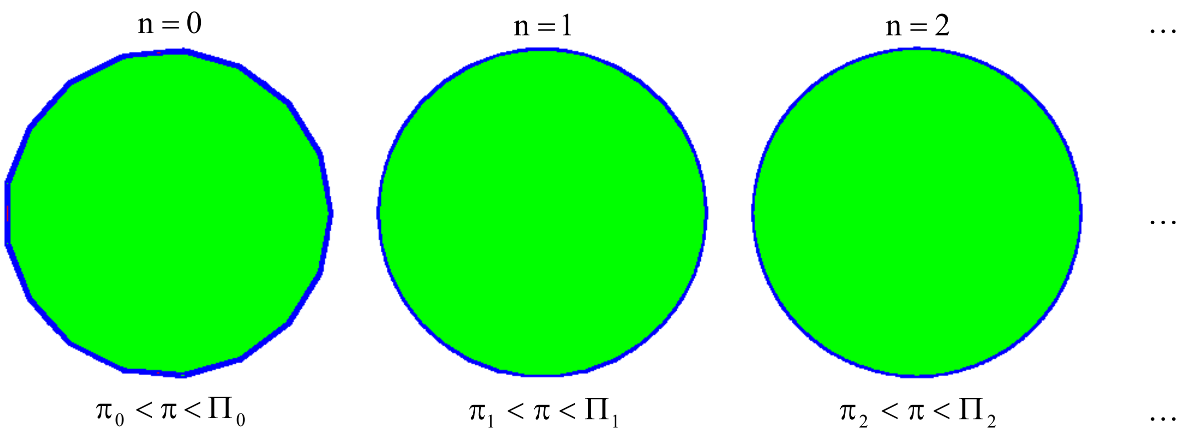
$$(4) \quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5) \quad \pi_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi \xleftarrow{\infty \leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 8 (*Çapı 1 birim olan çemberin içine ve dışına çizilen düzgün* 17.2^{n}*-genin çevresiyle pi'nin hesabı*):



$$(1)\quad \frac{\pi}{17}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{17+3\sqrt{17}-4\sqrt{34+2\sqrt{17}}-\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{2}}+\sqrt{\frac{17\left(17-\sqrt{17}\right)}{2}}}}{15+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-4\sqrt{34+2\sqrt{17}}-\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{2}}+\sqrt{\frac{17\left(17-\sqrt{17}\right)}{2}}}}}$$

$$\left(=\tan^{-1}x_{17}\right)$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned} f_0\left(x_{17}\right)&=\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-4\sqrt{34+2\sqrt{17}}-\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{2}}+\sqrt{\frac{17\left(17-\sqrt{17}\right)}{2}}}\right)\\ f_n\left(x_{17}\right)&=\sqrt{2+f_{n-1}\left(x_{17}\right)} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n&=17a_n\left(x_{17}\right)=17.2^{n-1}\sqrt{2-f_n\left(x_{17}\right)}\\ \Pi_n&=17b_n\left(x_{17}\right)=17.2^{n}\sqrt{\frac{2-f_n\left(x_{17}\right)}{2+f_n\left(x_{17}\right)}} \end{aligned}$$

dizileri için

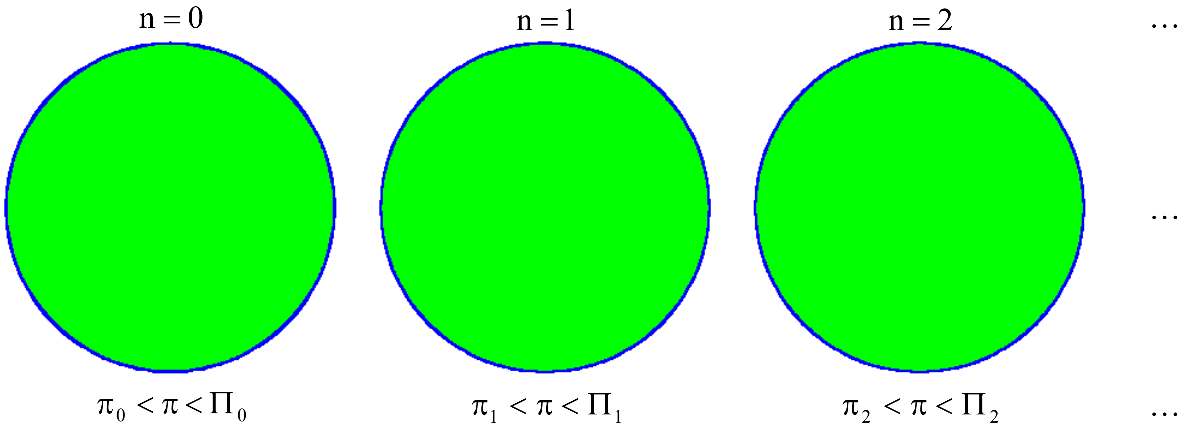
$$(4)\quad \pi_n\le\pi\le\Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n\xrightarrow{n\to\infty}\pi\xleftarrow{\infty\leftarrow n}\Pi_n$$

dir.

Örnek 9 (*Çapı 1 birim olan çemberin içine ve dışına çizilen düzgün* $60.2^{n}=3.5.2^{n+2}$ *-genin çevresiyle pi'nin hesabı*)**:**



$$(1)\quad \frac{\pi}{60}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{8-\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8+\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}\left(=\tan^{-1}x_{60}\right)$$

eşitliğinde

$$(2)\quad f_n(x_{60})=\sqrt{2+f_{n-1}(x_{60})},\quad f_0(x_{60})=\frac{\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}}{2}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned}\pi_n&=60a_n(x_{60})=3.5.2^{n+1}\sqrt{2-f_n(x_{60})}\\ \Pi_n&=60b_n(x_{60})=3.5.2^{n+2}\sqrt{\frac{2-f_n(x_{60})}{2+f_n(x_{60})}}\end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n\le\pi\le\Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n\xrightarrow{n\to\infty}\pi\xleftarrow{\infty\leftarrow n}\Pi_n$$

dir.

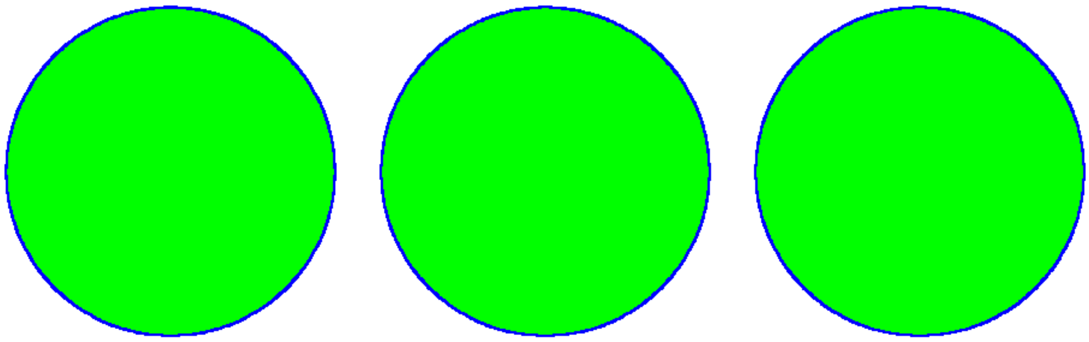
Not 8: 1596'da *Ludolph Von Ceulen*, π_n formülünü kullanarak düzgün bir 60.2^{33}-gen ile π nin 20 ondalığını bulmuştur. Onun kullandığı düzgün 60.2^{33}-genlerle π sayısı için

$$3.14159265358979323846 26(239\ldots)=\pi_{33}<\pi<\Pi_{33}=3.14159265358979323846 26(823\ldots)$$

şeklinde bir eşitsizlik elde edilir.

Örnek 10 (*Çapı 1 birim olan çemberin içine ve dışına çizilen düzgün* $120.2^n = 3.5.2^{n+3}$*-genin çevresiyle pi'nin hesabı***):**

$n=0$ $\quad$ $n=1$ $\quad$ $n=2$ $\quad \ldots$



$\pi_0 < \pi < \Pi_0$ $\quad$ $\pi_1 < \pi < \Pi_1$ $\quad$ $\pi_2 < \pi < \Pi_2$ $\quad \ldots$

$$(1) \quad \frac{\pi}{120} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{8-\sqrt{2(2-\sqrt{3})(3-\sqrt{5})}-\sqrt{2(2+\sqrt{3})(5+\sqrt{5})}}{8+\sqrt{2(2-\sqrt{3})(3-\sqrt{5})}+\sqrt{2(2+\sqrt{3})(5+\sqrt{5})}}}\left(=\tan^{-1} x_{120}\right)$$

eşitliğinde

$$(2) \quad f_n(x_{120}) = \sqrt{2+f_{n-1}(x_{120})}, \quad f_0(x_{120}) = \sqrt{\frac{4+\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6(5+\sqrt{5})}}}{2}}$$

olmak üzere,

$$(3) \quad \begin{aligned} \pi_n &= 120a_n(x_{120}) = 3.5.2^{n+2}\sqrt{2-f_n(x_{120})} \\ \Pi_n &= 120b_n(x_{120}) = 3.5.2^{n+3}\sqrt{\frac{2-f_n(x_{120})}{2+f_n(x_{120})}} \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4) \quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5) \quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

1. Nesil Arktanjant Fonksiyonu ile Pi Sayısının Hesabı, *Ver. 3*

Geometrik Dönem'in veya Arşimetçilerin Örnekleri'nin Genelleştirilmesi

Cetvel ve Pergelle Düzgün Poligonlar'ın Çizimi ve Fermat Sayısı

M.Ö. 400 yıllarında Eski Yunanlılar pergel ve cetvelle 3, 4, 5, 6, 8 ve 10 kenarlı düzgün poligonları çizebildikleri halde, 7, 9, 11, 13,... kenarlı düzgün poligonların çizim yollarını aramışlar ve bulamamışlardı. Fermat, bu problemi çözdü. Tek sayı kenarlı düzgün bir poligonun yalnız pergel ve cetvelle çizimi; ancak bu sayının bir Fermat asal sayısı,

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

şeklinde yazılabilen bir asal sayı veya bu tür asal sayıların çarpımı olan sayılar veya bu sayıların 2^k katı olan sayılar olması halinde yapılabilirdi.

***Pierre De Fermat*'ın matematiksel çalışmaları hakkında:** Yeri gelmişken, burada Fermat'ın matematiksel çalışmaları hakkında kısaca bilgi verelim. Fermat, eserlerini ve buluşlarını genellikle yayınlamaz ve birçok teoremlerini de karalamalar şeklinde bırakırdı. Hatta, bazı teoremlerin sadece ifadelerini yazdığı görülmüştür. Yani, ispata bile gereksinim duymamıştır. Bu yüzden, basit gibi görünen bir problemini *Euler*, tam 7 yılda ancak ispatlayabilmiştir.

Fermat, $n^n - n$ ile ilgili teoremini de yine ispatsız vermiş ve bu problemin ispatı da daha sonra *Leibniz* tarafından verilmiştir.

$y^3 = x^2 + 2$ Diofant Denklemi'nin (pozitif) tam sayılar kümesindeki çözümünün ispatını verebilmek çok zor olmakla birlikte, bu denklemin pozitif tamsayılı çözümünün $x = 5, y = 3$ için denemeyle olduğu derhal görülmektedir. İşte, bu sayılar dışında bu Diofant denkleminin hiçbir x ve y pozitif tamsayılı çözümü olmadığını yine Fermat göstermiştir. Fakat, yine bu ispatı ortadan kaldırmıştı. Ancak, ölümünden pek çok yıllar sonra, Fermat'a ait bu ispat bulunmuştur.

Son olarak; Fermat'ın Son Teoremi'nden bahsedelim:

Fermat'ın Son Teoremi: $n > 2, n \in N$ ve x,y,z pozitif tamsayıları için

$$x^n + y^n = z^n$$

denkleminin pozitif tamsayılarda çözümü yoktur.

Kendisi bu teoremin ispatını yazılı olarak vermemiştir. Ölürken, çalışmalarının birçoğunu da yaktığından, bize bilgi kalmamıştır. Bilgisayarla $n < 100.000$ için doğru olduğu anlaşılmıştır. Fermat, bu problemi çok ilginç bir yolla çözdüğünü söylemektedir. İleri sürdüğü ve çözdüğü problemlere bakılırsa, bu problemi de çözme olasılığı fazladır.

Fermat'ın Son Teoremi'nin çözümünü 100 yıl içinde verecek ilk kişiye, profesör *Paul Wolfskeh* (Almanya), 1908'de 100.000 marklık (? Euro) bir para bırakmıştır. Bu problemi 2007 yılına kadar ilk çözene bu 100.000 marklık paranın verileceği sözünün hala geçerli olduğu belirtilmektedir. Ancak, bu konunun uzmanlarına göre; "Büyük bir olasılıkla 2007 yılına kadar da bu problemin çözümü yapılamayacaktır. Bu süre yine 1 yüzyıl daha uzatılabilir."

Dünyaca bu ünlü probleme ışık tutmak için ben de zamanında yaptığım çalışmadan çıkan sonucu vereyim: Fermat'ın Son Teoremi için

Fermat'ın Son Teoremi ⇔ Derya PAMUK TULUM'un İddiası

ilişkisi gözönüne alınırsa, aşağıdaki iddia bilgisayarla yapılacak olan araştırmalar sonunda negatif sonuç verirse, Fermat'ın Son Teoremi'nin doğru olduğu sonucuna varılabilir.

İddia (Eisenstein-Schönemann Kriteriyle Elde Edilen Sonuç-1997): $p > 2, p \in P$ ve primitif x,y,z pozitif tamsayıları için $p \mid x$ iken $p \nmid y$ ve $p \nmid z$ ($p \mid y$ iken $p \nmid x$ ve $p \nmid z$) olacak şekilde

$$x^p + y^p = z^p$$

Diofant denkleminin pozitif tamsayılarda çözümünün olup olmadığının araştırılması yeterlidir.

Cetvel ve Pergelle Düzgün Poligonlar'ın Çizimi Üzerine

Düzgün bir m-genin pergel ve cetvelle çizimi, bilindiği üzere

$$x^m - 1$$

denkleminin rasyonel köklere sahip olmasına bağlıdır. Eğer, bu denklemin hiçbir rasyonel kökü yoksa, bu düzgün m-gen pergel ve cetvel yardımıyla çizilemez. Bunun gibi, 2^n katı olan düzgün $2^n m$-genler de pergel ve cetvelle çizilemez.

Gauss bir teorem ispatlayarak cetvel ve pergelle çizilen düzgün k-genlerin ancak

$$k = 2^n m = 2^n p_1 p_2 \ldots p_r$$

şeklinde olduğunu ifade etmiştir. Bu ifadedeki p_i sayıları (Fermat Asalları) birbirinden farklı asal sayılar olup

$$p_i = 2^{2^t} + 1$$

şeklindedir. Burada $t = 0,1,2,3,4$ için $p = 3,5,17,257,65537$ asalları elde edilir. Ancak, $t = 5$ için Euler 1732'de

$$2^{2^5} + 1 = 641.6700417$$

olduğunu ispatlayarak, 6. Fermat sayısının asal olmadığını gösterdi.

Ünlü Rus matematikçisi *Pervoushin* $t = 12$ ve $t = 23$ için Fermat sayılarının asal olmadığını kanıtladı.

Fermat sayılarının asal olup olmadığı derin matematiksel düşüncelerle anlaşılmıştır. Burada $2^{2^{12}} + 1$ ve $2^{2^{23}} + 1$ sayılarının çok büyük bir sayı olması nedeniyle, bu sayıların tam olarak yazılması çok zaman istemektedir. Bugün F_5 (6. Fermat Sayısı) in ötesinde hiçbir Fermat asalı bilinmemektedir. Ayrıca, Fermat Asalları'nın sonsuz sayıda olup olmadığı da bilinmemektedir.

Sonuçta, cetvel ve pergelle çizilen düzgün poligonların kenar sayıları

$$k = 2^n m = 2^n p_1 p_2 \ldots p_r$$

formunda olmak üzere,

$$k = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, \ldots$$

şeklindedir.

Sonuç (Genelleştirilmiş Geometrik Dönem'in veya Arşimetçilerin Örnekleri: *Çapı 1 birim olan çemberin içine ve dışına çizilen düzgün* $2^n k$ *-genin çevresiyle pi'nin hesabı***):**

$$(1) \quad \frac{\pi}{k} = \tan^{-1} x$$

eşitliğinde

$$(2) \quad f_n(x) = \sqrt{2 + f_{n-1}(x)}, \quad f_0(x) = 2\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

olmak üzere,

$$(3) \quad \begin{aligned} \pi_n &= ka_n(x) = k.2^{n-1}\sqrt{2 - f_n(x)} \\ \Pi_n &= kb_n(x) = k.2^n\sqrt{\frac{2 - f_n(x)}{2 + f_n(x)}} \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4) \quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5) \quad \pi_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi \xleftarrow{\infty \leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Not 9: Cetvel ve pergelle düzgün $2^n k$-genler çapı 1 birim olan çemberin içine ve dışına çizilebildiğinden, x sayısı cebriktir. Bunlardan yalnızca $k = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 17, 60, 120$ için **Örnek 1-Örnek 10** verilmiştir.

x sayısının Bulunması:

$$i\tan\frac{\pi}{k} = \tanh\left(\frac{\pi}{k}i\right) = \frac{e^{\frac{\pi}{k}i} - e^{-\frac{\pi}{k}i}}{e^{\frac{\pi}{k}i} + e^{-\frac{\pi}{k}i}}$$

ve

$$e^{\pi i} = -1 = i^2$$

olduğundan,

$$i\tan\frac{\pi}{k} = \frac{i^{\frac{2}{k}} - i^{-\frac{2}{k}}}{i^{\frac{2}{k}} + i^{-\frac{2}{k}}}$$

olup, buradan x sayısı

$$x = \tan\frac{\pi}{k} = \frac{i^{\frac{2}{k}-1} - i^{-\frac{2}{k}-1}}{i^{\frac{2}{k}} + i^{-\frac{2}{k}}}$$

olarak bulunur. Burada gerekli hesaplar yapılırsa, x'in hesaba elverişli şekli:

$$x = \frac{i^{\frac{4}{k}} - 1}{i^{\frac{4}{k}+1} + i}$$

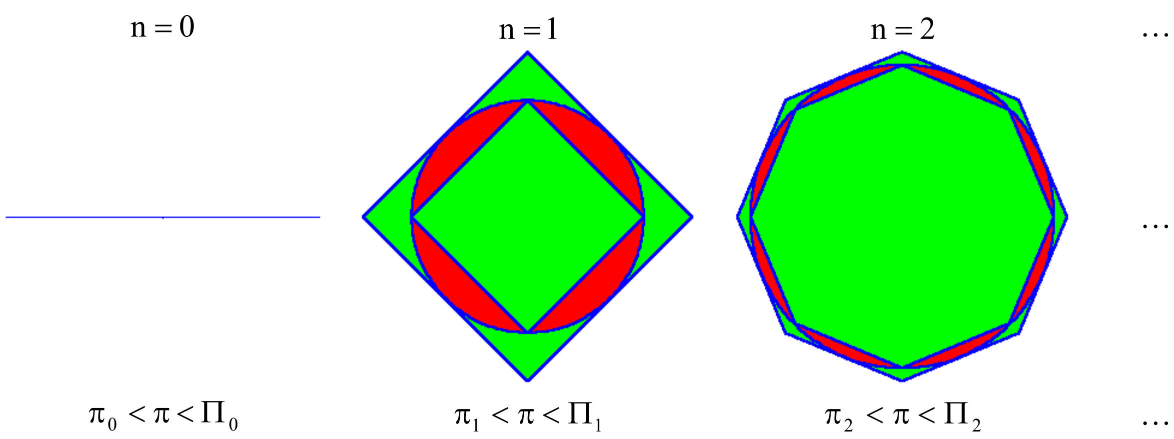
dir. Buna göre, başlangıç değeri:

$$f_0(x) = \frac{i^{\frac{8}{k}} + 1}{i^{\frac{4}{k}}}$$

olarak bulunur.

Şimdi de, $k = 2$ için sonuç gereğince elde edilen örnek üzerinde duralım. Bu örneğin şimdiye kadar tanımlanan hiçbir arktanjant fonksiyonuyla yapılamayacağı gerçeğini dile getirdikten sonra, bu örneğin geometrik anlamı; sayı doğrusundaki iki noktadır.

Örnek 11 (*Çapı 1 birim olan çemberin içine ve dışına çizilen düzgün poligonların çevresiyle pi'nin hesabı*'nda **Özel Bir Örnek**):



$$(1) \quad \frac{\pi}{2} = \tan^{-1}\infty$$

eşitliğinde

$$(2) \quad f_n(\infty) = \sqrt{2 + f_{n-1}(\infty)}, \quad f_0(\infty) = -2$$

olmak üzere,

$$(3) \quad \begin{aligned} \pi_n &= 2a_n(\infty) = 2^n\sqrt{2 - f_n(\infty)} \\ \Pi_n &= 2b_n(\infty) = 2^{n+1}\sqrt{\frac{2 - f_n(\infty)}{2 + f_n(\infty)}} \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4) \quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5) \quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

2 *Beyond the geometric period*

Şimdi de *Pi sayısı için Klasik Arktanjant Bağıntısı*yla aşağıda verilen *Tarihi Örnekler*i inceleyelim:

Not 10: *Pi sayısı için Klasik Arktanjant Bağıntısı*yla verilen *Tarihi Örnekler*i; π nin arktanjanta dayalı hesaplarına tüm dünya tarafından en popüler matematik programlarından biri olarak kabul edilen ***Mathematica*** programında Help Browser/Getting Started-Demos menüsündeki:

1. Demos/Calculating Pi/Computing π with Series/A Series Based on Arctangent-Another Arctangent Identity.
2. Formula Gallery/Trigonometric Formulas/ Another its Arccotangent Identities.

bölümlerinden bulabilirsiniz.

A Series Based on a Arctangent

Historically the calculations of the first few tens of digits of π were based on various identities involving the arctangent function. Here is such an identity, developed by ***Machin*** in 1706.

$$16\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)-4\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)=\pi$$

Arctangent has the following series representation.

$$\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

This sum converges much faster.

$$\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(16\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}-4\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}\right)$$

Örnek 12 (*Machin-1706*):

$$(1)\quad \frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned} f_n\left(\frac{1}{5}\right)&=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)},\quad f_0\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{24}{13}\\ f_n\left(\frac{1}{239}\right)&=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{239}\right)},\quad f_0\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{57120}{28561}\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n &= 16a_n\left(\frac{1}{5}\right) - 4a_n\left(\frac{1}{239}\right) = 2^{n+1}\left(4\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{5}\right)} - \sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{239}\right)}\right) \\ \Pi_n &= 16b_n\left(\frac{1}{5}\right) - 4b_n\left(\frac{1}{239}\right) = 2^{n+2}\left(4\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{5}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{5}\right)}} - \sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{239}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{239}\right)}}\right) \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Not 11: Machin'in Formülü'nün ispatı için

http://www.escape.com/~paulg53/math/pi/greg/index.html

linkine bakınız.

Another a Arctangent Identity

In the spirit of the last series, ***Lehmer*** in 1938 used the following identity to calculate π.

$$88\tan^{-1}\left(\frac{1}{28}\right) + 8\tan^{-1}\left(\frac{1}{443}\right) - 20\tan^{-1}\left(\frac{1}{1393}\right) - 40\tan^{-1}\left(\frac{1}{11018}\right) = \pi$$

This sum converges even better.

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(88\left(\frac{1}{28}\right)^{2n+1} + 8\left(\frac{1}{443}\right)^{2n+1} - 20\left(\frac{1}{1393}\right)^{2n+1} - 40\left(\frac{1}{11018}\right)^{2n+1}\right)$$

Örnek 13 (*D. H. Lehmer-1938*):

$$(1)\quad \frac{\pi}{4} = 22\tan^{-1}\left(\frac{1}{28}\right) + 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{443}\right) - 5\tan^{-1}\left(\frac{1}{1393}\right) - 10\tan^{-1}\left(\frac{1}{11018}\right)$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned} f_n\left(\frac{1}{28}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{28}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{28}\right)=\frac{1566}{785} \\ f_n\left(\frac{1}{443}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{443}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{443}\right)=\frac{196248}{98125} \\ f_n\left(\frac{1}{1393}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{1393}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{1393}\right)=\frac{1940448}{970225} \\ f_n\left(\frac{1}{11018}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{11018}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{11018}\right)=\frac{242792646}{121396325} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \pi_n &= 88a_n\left(\frac{1}{28}\right)+8a_n\left(\frac{1}{443}\right)-20a_n\left(\frac{1}{1393}\right)-40a_n\left(\frac{1}{11018}\right) \\ &= 2^{n+1}\left(22\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{28}\right)}+2\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{443}\right)}-5\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{1393}\right)}-10\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{11018}\right)}\right) \end{aligned}$$

$$(3)\quad \begin{aligned} \Pi_n &= 88b_n\left(\frac{1}{28}\right)+8b_n\left(\frac{1}{443}\right)-20b_n\left(\frac{1}{1393}\right)-40b_n\left(\frac{1}{11018}\right) \\ &= 2^{n+2}\left(22\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{28}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{28}\right)}}+2\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{443}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{443}\right)}}-5\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{1393}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{1393}\right)}}-10\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{11018}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{11018}\right)}}\right) \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Another its Arctangent Identities

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} \qquad = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{8}$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} \qquad = 3\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{5}{99}$$

$$= 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239} \qquad = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{70} + \tan^{-1}\frac{1}{99}$$

$$= 5\tan^{-1}\frac{1}{6} - \tan^{-1}\frac{16}{503} - \tan^{-1}\frac{1}{117} \qquad = 5\tan^{-1}\frac{1}{7} + 2\tan^{-1}\frac{3}{79}$$

$$= 6\tan^{-1}\frac{1}{8} + \tan^{-1}\frac{5}{99} - 3\tan^{-1}\frac{1}{268} \qquad = 8\tan^{-1}\frac{1}{10} - \tan^{-1}\frac{1}{239} - 4\tan^{-1}\frac{1}{515}$$

$$= 8\tan^{-1}\frac{1}{10} - 2\tan^{-1}\frac{2543}{452761} - \tan^{-1}\frac{1}{1393} \qquad = 8\tan^{-1}\frac{1}{10} - \tan^{-1}\frac{1}{100} - \tan^{-1}\frac{1}{515} - \tan^{-1}\frac{3583}{371498882}$$

$$= 12\tan^{-1}\frac{1}{18} + 3\tan^{-1}\frac{1}{70} + 5\tan^{-1}\frac{1}{99} + 8\tan^{-1}\frac{1}{307} \qquad = 12\tan^{-1}\frac{1}{18} + 8\tan^{-1}\frac{1}{99} + 3\tan^{-1}\frac{1}{239} + 8\tan^{-1}\frac{1}{307}$$

Pi sayısı için diğer arktanjant formüllerini

Arctangent Formulas for Pi, R. Williams, Calif. Instit. of Technology

linkinde bulabilirsiniz.

Örnek 14 (*Euler-1706, Hutton-1776*):

$$(1) \quad \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$$

eşitliğinde

$$(2) \quad \begin{aligned} f_n\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{2 + f_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{5} \\ f_n\left(\frac{1}{3}\right) &= \sqrt{2 + f_{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3) \quad \begin{aligned} \pi_n &= 4a_n\left(\frac{1}{2}\right) + 4a_n\left(\frac{1}{3}\right) = 2^{n+1}\left(\sqrt{2 - f_n\left(\frac{1}{2}\right)} + \sqrt{2 - f_n\left(\frac{1}{3}\right)}\right) \\ \Pi_n &= 4b_n\left(\frac{1}{2}\right) + 4b_n\left(\frac{1}{3}\right) = 2^{n+2}\left(\sqrt{\frac{2 - f_n\left(\frac{1}{2}\right)}{2 + f_n\left(\frac{1}{2}\right)}} + \sqrt{\frac{2 - f_n\left(\frac{1}{3}\right)}{2 + f_n\left(\frac{1}{3}\right)}}\right) \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 15 (*Hutton-1776*):

$$(1)\quad \frac{\pi}{4} = 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned} f_n\left(\frac{1}{3}\right) &= \sqrt{2 + f_{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{5} \\ f_n\left(\frac{1}{7}\right) &= \sqrt{2 + f_{n-1}\left(\frac{1}{7}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{48}{25} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n &= 8a_n\left(\frac{1}{3}\right) + 4a_n\left(\frac{1}{7}\right) = 2^{n+1}\left(2\sqrt{2 - f_n\left(\frac{1}{3}\right)} + \sqrt{2 - f_n\left(\frac{1}{7}\right)}\right) \\ \Pi_n &= 8b_n\left(\frac{1}{3}\right) + 4b_n\left(\frac{1}{7}\right) = 2^{n+2}\left(2\sqrt{\frac{2 - f_n\left(\frac{1}{3}\right)}{2 + f_n\left(\frac{1}{3}\right)}} + \sqrt{\frac{2 - f_n\left(\frac{1}{7}\right)}{2 + f_n\left(\frac{1}{7}\right)}}\right) \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Not 12: *Euler*, 1779 da Petersburg Akademisi'nde iken bir başka hesaplamasında,

$$\operatorname{Arc}\tan\frac{x}{2-x}=2\int_0^x\frac{1}{4+x^4}dx+2\int_0^x\frac{x}{4+x^4}dx+\int_0^x\frac{x^2}{4+x^4}dx$$

integral hesabını çıkarmıştır. Bu integral hesabında $x=\frac{1}{2}$, daha sonra $x=\frac{1}{4}$ alınmaktadır. $\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{3}$ de buradan bulunmuş oluyor. Daha sonra, $\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{7}$ için de aynı şeyi yapmış ve

$$\frac{\pi}{4}=2\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{3}+\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{7}$$

olarak alıp, bunu π'li hesaplarında kullanmıştır.

Johann Friedrich Pfaff da (1765-1825), π sayısını *Euler Formülü*ne uygulamıştır. Yani:

$$\frac{\pi}{4}=2\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{3}+\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{7}$$
$$\frac{\pi}{4}=5\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{7}+2\operatorname{Arc}\tan\frac{3}{79}$$

olarak verilmektedir.

Örnek 16 (*Euler-1755, Pfaff*):

$$(1)\quad \frac{\pi}{4}=5\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{3}{79}$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned} f_n\left(\frac{1}{7}\right)&=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{7}\right)},\quad f_0\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{48}{25}\\ f_n\left(\frac{3}{79}\right)&=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{3}{79}\right)},\quad f_0\left(\frac{3}{79}\right)=\frac{6232}{3125}\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n&=20a_n\left(\frac{1}{7}\right)+8a_n\left(\frac{3}{79}\right)=2^{n+1}\left(5\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{7}\right)}+2\sqrt{2-f_n\left(\frac{3}{79}\right)}\right)\\ \Pi_n&=20b_n\left(\frac{1}{7}\right)+8b_n\left(\frac{3}{79}\right)=2^{n+2}\left(5\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{7}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{7}\right)}}+2\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{3}{79}\right)}{2+f_n\left(\frac{3}{79}\right)}}\right)\end{aligned}$$

dizileri için

$$(4) \quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5) \quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 17 (*Klingenstierna-1730, Buzengeiger*): Matematik profesörü olan *Karl Buzengeiger* de (1771-1835) Freiburg'da bu formüle yeni bir şekil vermiştir. Bu formül:

$$(1) \quad \frac{\pi}{4} = 8\tan^{-1}\frac{1}{10} - \tan^{-1}\frac{1}{239} - 4\tan^{-1}\frac{1}{515}$$

şeklindedir (Klugel, Wörterbuch 1, Sa: 666'da aynı formül bu haliyle mevcuttur.). Bu formülde

$$(2) \quad \begin{aligned} f_n\left(\frac{1}{10}\right) &= \sqrt{2 + f_{n-1}\left(\frac{1}{10}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{198}{101} \\ f_n\left(\frac{1}{239}\right) &= \sqrt{2 + f_{n-1}\left(\frac{1}{239}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{57120}{28561} \\ f_n\left(\frac{1}{515}\right) &= \sqrt{2 + f_{n-1}\left(\frac{1}{515}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{515}\right) = \frac{265224}{132613} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3) \quad \begin{aligned} \pi_n &= 32a_n\left(\frac{1}{10}\right) - 4a_n\left(\frac{1}{239}\right) - 16a_n\left(\frac{1}{515}\right) \\ &= 2^{n+1}\left(8\sqrt{2 - f_n\left(\frac{1}{10}\right)} - \sqrt{2 - f_n\left(\frac{1}{239}\right)} - 4\sqrt{2 - f_n\left(\frac{1}{515}\right)}\right) \\ \Pi_n &= 32b_n\left(\frac{1}{10}\right) - 4b_n\left(\frac{1}{239}\right) - 16b_n\left(\frac{1}{515}\right) \\ &= 2^{n+2}\left(8\sqrt{\frac{2 - f_n\left(\frac{1}{10}\right)}{2 + f_n\left(\frac{1}{10}\right)}} - \sqrt{\frac{2 - f_n\left(\frac{1}{239}\right)}{2 + f_n\left(\frac{1}{239}\right)}} - 4\sqrt{\frac{2 - f_n\left(\frac{1}{515}\right)}{2 + f_n\left(\frac{1}{515}\right)}}\right) \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4) \quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5) \quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 18 (*Herman-1706*):

$$(1) \quad \frac{\pi}{4} = 2\tan^{-1}\frac{1}{2} - \tan^{-1}\frac{1}{7}$$

eşitliğinde

$$(2) \quad \begin{aligned} f_n\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{2 + f_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{5} \\ f_n\left(\frac{1}{7}\right) &= \sqrt{2 + f_{n-1}\left(\frac{1}{7}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{48}{25} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3) \quad \begin{aligned} \pi_n &= 8a_n\left(\frac{1}{2}\right) - 4a_n\left(\frac{1}{7}\right) = 2^{n+1}\left(2\sqrt{2 - f_n\left(\frac{1}{2}\right)} - \sqrt{2 - f_n\left(\frac{1}{7}\right)}\right) \\ \Pi_n &= 8b_n\left(\frac{1}{2}\right) - 4b_n\left(\frac{1}{7}\right) = 2^{n+2}\left(2\sqrt{\frac{2 - f_n\left(\frac{1}{2}\right)}{2 + f_n\left(\frac{1}{2}\right)}} - \sqrt{\frac{2 - f_n\left(\frac{1}{7}\right)}{2 + f_n\left(\frac{1}{7}\right)}}\right) \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4) \quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5) \quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 19 (*Strassnitzky-1844*):

$$(1) \quad \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{8}$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned} f_n\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{6}{5} \\ f_n\left(\frac{1}{5}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{24}{13} \\ f_n\left(\frac{1}{8}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{8}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{126}{65} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n &= 4a_n\left(\frac{1}{2}\right)+4a_n\left(\frac{1}{5}\right)+4a_n\left(\frac{1}{8}\right)=2^{n+1}\left(\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{2}\right)}+\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{5}\right)}+\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{8}\right)}\right) \\ \Pi_n &= 4b_n\left(\frac{1}{2}\right)+4b_n\left(\frac{1}{5}\right)+4b_n\left(\frac{1}{8}\right)=2^{n+2}\left(\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{2}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{2}\right)}}+\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{5}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{5}\right)}}+\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{8}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{8}\right)}}\right) \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 20 (*Pascal SEBAH*):

$$(1)\quad \frac{\pi}{4}=8\tan^{-1}\frac{1}{21}+3\tan^{-1}\frac{1}{239}+4\tan^{-1}\frac{3}{1024}$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned} f_n\left(\frac{1}{21}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{21}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{21}\right)=\frac{440}{221} \\ f_n\left(\frac{1}{239}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{239}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{57120}{28561} \\ f_n\left(\frac{3}{1024}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{3}{1024}\right)}, \quad f_0\left(\frac{3}{1024}\right)=\frac{2097134}{1048585} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\pi_n = 32a_n\left(\frac{1}{21}\right) + 12a_n\left(\frac{1}{239}\right) + 16a_n\left(\frac{3}{1024}\right)$$

$$= 2^{n+1}\left(8\sqrt{2 - f_n\left(\frac{1}{21}\right)} + 3\sqrt{2 - f_n\left(\frac{1}{239}\right)} + 4\sqrt{2 - f_n\left(\frac{3}{1024}\right)}\right)$$

$$(3)\quad \Pi_n = 32b_n\left(\frac{1}{21}\right) + 12b_n\left(\frac{1}{239}\right) + 16b_n\left(\frac{3}{1024}\right)$$

$$= 2^{n+2}\left(8\sqrt{\frac{2 - f_n\left(\frac{1}{21}\right)}{2 + f_n\left(\frac{1}{21}\right)}} + 3\sqrt{\frac{2 - f_n\left(\frac{1}{239}\right)}{2 + f_n\left(\frac{1}{239}\right)}} + 4\sqrt{\frac{2 - f_n\left(\frac{3}{1024}\right)}{2 + f_n\left(\frac{3}{1024}\right)}}\right)$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Not 13: *Pascal SEBAH*, ***PiFast*** programı için hızlı bir yakınsama yapan (1) deki formülü bulmuştur ve bu formüle ***PiSebah1*** adını vermiştir. Gerçekten de, π sayısına *Sebah formülü* ile *Machin Formülü* hemen hemen aynı hızda yakınsama yaparlar.

Bu konu hakkında detaylı bilgi için

http://numbers.computation.free.fr/Constants/PiProgram/Pi_Sebah1.pifast

linkine tıklayınız.

Örnek 21: Her x gerçel sayısı için geçerli olan

$$(1)\quad tg^{-1}x + tg^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned} & f_0(x) = 2\frac{1-x^2}{1+x^2},\ f_n(x) = \sqrt{2 + f_{n-1}(x)} \\ & f_0\left(\frac{1}{x}\right) = -f_0(x),\ f_n\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{2 + f_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n(x) &= 2a_n(x) + 2a_n\left(\frac{1}{x}\right) = 2^n\left(\sqrt{2-f_n(x)} + \sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{x}\right)}\right) \\ \Pi_n(x) &= 2b_n(x) + 2b_n\left(\frac{1}{x}\right) = 2^{n+1}\left(\sqrt{\frac{2-f_n(x)}{2+f_n(x)}} + \sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{x}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{x}\right)}}\right) \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n(x) \le \pi \le \Pi_n(x)$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n(x)$$

dir.

Not 14: Not 1’e göre (3) deki kareköklerin işaretleriyle x’in işareti aynı olması gerekir.

Örnek 22 (*Wetherfield-1996*):

$$(1)\quad \frac{\pi}{2} = 2\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} + \tan^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned} f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3} \\ f_n\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}, \quad f_0\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{14}{9} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n &= 4a_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2a_n\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 2^n\left(2\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} + \sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}\right) \\ \Pi_n &= 4b_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2b_n\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 2^{n+1}\left(2\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}} + \sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}}\right) \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 23:

$$(1)\quad \frac{\pi}{6} = 2\tan^{-1}\frac{1}{3\sqrt{3}} + \tan^{-1}\frac{1}{4\sqrt{3}}$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{array}{ll} f_n\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \sqrt{2 + f_{n-1}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)}, & f_0\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{13}{7} \\ f_n\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right) = \sqrt{2 + f_{n-1}\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)}, & f_0\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right) = \frac{94}{49} \end{array}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{array}{l} \pi_n = 12a_n\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) + 6a_n\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right) = 3.2^n\left(2\sqrt{2 - f_n\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)} + \sqrt{2 - f_n\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)}\right) \\ \Pi_n = 12b_n\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) + 6b_n\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right) = 3.2^{n+1}\left(2\sqrt{\frac{2 - f_n\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)}{2 + f_n\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)}} + \sqrt{\frac{2 - f_n\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)}{2 + f_n\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)}}\right) \end{array}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 24 (*Derya PAMUK TULUM-29.07.2001*):

$$(1)\quad \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} + \tan^{-1}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned} & f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)},\quad f_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{3} \\ & f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)},\quad f_0\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} & \pi_n=4a_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+4a_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)=2^{n+1}\left(\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}+\sqrt{2-f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)}\right) \\ & \Pi_n=4b_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+4b_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)=2^{n+2}\left(\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}+\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)}{2+f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)}}\right) \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n\le\pi\le\Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n\xrightarrow{n\to\infty}\pi\xleftarrow{\infty\leftarrow n}\Pi_n$$

dir.

Örnek 25 (*Derya PAMUK TULUM-29.07.2001*):

$$(1)\quad \frac{\pi}{4}=\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\operatorname{tg}^{-1}\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned} & f_n\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)},\quad f_0\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{14}{9} \\ & f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)},\quad f_0\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)=\frac{4+\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned}\pi_n &= 4a_n\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+8a_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)=2^{n+1}\left(\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}+2\sqrt{2-f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)}\right)\\ \Pi_n &= 4b_n\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+8b_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)=2^{n+2}\left(\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}}+2\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)}{2+f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)}}\right)\end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 26 (*Derya PAMUK TULUM-29.07.2001*):

$$(1)\quad \frac{\pi}{8}=3\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{5}$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned}f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)&=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)},\quad f_0\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)=\frac{4+\sqrt{2}}{3}\\ f_n\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)&=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)},\quad f_0\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)=\frac{46}{27}\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned}\pi_n &= 24a_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)-8a_n\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)=2^{n+2}\left(3\sqrt{2-f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)}-\sqrt{2-f_n\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)}\right)\\ \Pi_n &= 24b_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)-8b_n\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)=2^{n+3}\left(3\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)}{2+f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)}}-\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)}{2+f_n\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)}}\right)\end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 27 (*Derya PAMUK TULUM-29.07.2001*):

$$(1)\quad \frac{\pi}{8} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned} f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)}, \quad f_0\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)}, \quad f_0\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right) = \frac{4+\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n &= 8a_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) + 8a_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right) = 2^{n+2}\left(\sqrt{2-f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)} + \sqrt{2-f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)}\right) \\ \Pi_n &= 8b_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) + 8b_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right) = 2^{n+3}\left(\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)}{2+f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)}} + \sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)}{2+f_n\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\right)}}\right) \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 28 (*Derya PAMUK TULUM-29.07.2001*):

$$(1)\quad \frac{3\pi}{4}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}+2\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}-1}$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{array}{l} f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right)=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right)},\quad f_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right)=2\left(4\sqrt{2}-5\right) \\ f_n\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}-1}\right)=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}-1}\right)},\quad f_0\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}-1}\right)=2-\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1} \end{array}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{array}{l} \pi_n=\dfrac{4}{3}a_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right)+\dfrac{8}{3}a_n\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}-1}\right)=\dfrac{2^{n+1}}{3}\left(\sqrt{2-f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right)}+2\sqrt{2-f_n\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}-1}\right)}\right) \\ \Pi_n=\dfrac{4}{3}b_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right)+\dfrac{8}{3}b_n\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}-1}\right)=\dfrac{2^{n+2}}{3}\left(\sqrt{\dfrac{2-f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right)}{2+f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right)}}+2\sqrt{\dfrac{2-f_n\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}-1}\right)}{2+f_n\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}-1}\right)}}\right) \end{array}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n\le\pi\le\Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n\xrightarrow{n\to\infty}\pi\xleftarrow{\infty\leftarrow n}\Pi_n$$

dir.

Not 15: Örnek 24, **25**, **26**, **27** ve **28**’deki formülleri, 29.07.2001’de web sayfamın girişinde yayınladığım ***2. Süper Arktanjant Formülleri*** için bulmuştum. Bu konu hakkında detaylı bilgi için **EK1**’e bakınız.

Örnek 29 (*Knop*):

$$(1)\quad \frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{1}{k^2+k+1}=\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{13}+\tan^{-1}\frac{1}{21}+\tan^{-1}\frac{1}{31}+\cdots$$

eşitliğinde

$$(2)\quad f_n\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)},\quad f_0\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)=\frac{2k(k+1)(k^2+k+2)}{(k^2+1)(k^2+2k+2)}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n &= 4\sum_{k=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)=2^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)} \\ \Pi_n &= 4\sum_{k=1}^{\infty} b_n\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)=2^{n+2}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)}} \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 30:

$$(1)\quad \frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{1}{2k^2}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{8}+\tan^{-1}\frac{1}{18}+\tan^{-1}\frac{1}{32}+\tan^{-1}\frac{1}{50}+\cdots$$

eşitliğinde

$$(2)\quad f_n\left(\frac{1}{2k^2}\right)=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{2k^2}\right)},\quad f_0\left(\frac{1}{2k^2}\right)=\frac{2(2k^2-1)(2k^2+1)}{(2k^2-2k+1)(2k^2+2k+1)}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n &= 4\sum_{k=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{2k^2}\right)=2^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{2k^2}\right)} \\ \Pi_n &= 4\sum_{k=1}^{\infty} b_n\left(\frac{1}{2k^2}\right)=2^{n+2}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{2k^2}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{2k^2}\right)}} \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 31:

$$(1)\quad \frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{\infty}\tan^{-1}\frac{1}{5k^2+9k+5}+\tan^{-1}\frac{1}{5k^2+11k+5}$$
$$=2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{19}+\tan^{-1}\frac{1}{21}+\tan^{-1}\frac{1}{43}+\tan^{-1}\frac{1}{47}+\cdots$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned} f_0\left(\frac{1}{5k^2+9k+5}\right)&=\frac{2(k+1)(5k+4)(5k^2+9k+6)}{25k^4+90k^3+131k^2+90k+26}\\ f_n\left(\frac{1}{5k^2+9k+5}\right)&=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{5k^2+9k+5}\right)}\\ f_0\left(\frac{1}{5k^2+11k+5}\right)&=\frac{2(k+1)(5k+6)(5k^2+11k+4)}{(5k^2+6k+2)(5k^2+16k+13)}\\ f_n\left(\frac{1}{5k^2+11k+5}\right)&=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{5k^2+11k+5}\right)}\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned}\pi_n&=4\sum_{k=0}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{5k^2+9k+5}\right)+a_n\left(\frac{1}{5k^2+11k+5}\right)\\ &=2^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{5k^2+9k+5}\right)}+\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{5k^2+11k+5}\right)}\\ \Pi_n&=4\sum_{k=0}^{\infty}b_n\left(\frac{1}{5k^2+9k+5}\right)+b_n\left(\frac{1}{5k^2+11k+5}\right)\\ &=2^{n+2}\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{5k^2+9k+5}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{5k^2+9k+5}\right)}}+\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{5k^2+11k+5}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{5k^2+11k+5}\right)}}\end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n\le\pi\le\Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 32:

$$(1)\quad \frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \tan^{-1}\frac{1}{4k^2-2k+1} + \tan^{-1}\frac{1}{4k^2+2k+1}$$
$$= \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{13} + \tan^{-1}\frac{1}{21} + \tan^{-1}\frac{1}{31} + \cdots$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned} f_0\left(\frac{1}{4k^2-2k+1}\right) &= \frac{4k(2k-1)(2k^2-k+1)}{(4k^2+1)(2k^2-2k+1)} \\ f_n\left(\frac{1}{4k^2-2k+1}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{4k^2-2k+1}\right)} \\ f_0\left(\frac{1}{4k^2+2k+1}\right) &= \frac{4k(2k+1)(2k^2+k+1)}{(4k^2+1)(2k^2+2k+1)} \\ f_n\left(\frac{1}{4k^2+2k+1}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{4k^2+2k+1}\right)} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n &= 4\sum_{k=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{4k^2-2k+1}\right) + a_n\left(\frac{1}{4k^2+2k+1}\right) \\ &= 2^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{4k^2-2k+1}\right)} + \sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{4k^2+2k+1}\right)} \\ \Pi_n &= 4\sum_{k=1}^{\infty} b_n\left(\frac{1}{4k^2-2k+1}\right) + b_n\left(\frac{1}{4k^2+2k+1}\right) \\ &= 2^{n+2}\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{4k^2-2k+1}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{4k^2-2k+1}\right)}} + \sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{4k^2+2k+1}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{4k^2+2k+1}\right)}} \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 33:

$$(1)\quad \frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{1}{4k^2+2k+1}+\tan^{-1}\frac{1}{2k^3+k}-\tan^{-1}\frac{1}{4k^3+3k}$$

$$=\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{18}+\tan^{-1}\frac{1}{21}-\tan^{-1}\frac{1}{38}+\cdots$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned}
f_0\left(\frac{1}{4k^2+2k+1}\right)&=\frac{4k(2k+1)(2k^2+k+1)}{(4k^2+1)(2k^2+2k+1)}\\
f_n\left(\frac{1}{4k^2+2k+1}\right)&=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{4k^2+2k+1}\right)}\\
f_0\left(\frac{1}{2k^3+k}\right)&=\frac{2(2k^3+k-1)(2k^3+k+1)}{(k^2+1)(2k^2-2k+1)(2k^2+2k+1)}\\
f_n\left(\frac{1}{2k^3+k}\right)&=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{2k^3+k}\right)}\\
f_0\left(\frac{1}{4k^3+3k}\right)&=\frac{2(4k^3+3k-1)(4k^3+3k+1)}{(k^2+1)(4k^2+1)^2}\\
f_n\left(\frac{1}{4k^3+3k}\right)&=\sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{4k^3+3k}\right)}
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\pi_n = 4\sum_{k=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{4k^2+2k+1}\right) + a_n\left(\frac{1}{2k^3+k}\right) - a_n\left(\frac{1}{4k^3+3k}\right)$$
$$= 2^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{4k^2+2k+1}\right)} + \sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{2k^3+k}\right)} - \sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{4k^3+3k}\right)}$$

$$(3)\quad \Pi_n = 4\sum_{k=1}^{\infty} b_n\left(\frac{1}{4k^2+2k+1}\right) + b_n\left(\frac{1}{2k^3+k}\right) - b_n\left(\frac{1}{4k^3+3k}\right)$$
$$= 2^{n+2}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{4k^2+2k+1}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{4k^2+2k+1}\right)}} + \sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{2k^3+k}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{2k^3+k}\right)}} - \sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{4k^3+3k}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{4k^3+3k}\right)}}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 34:

$$(1)\quad \frac{\pi}{8} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \tan^{-1}\frac{1}{\left(1-\sqrt{2}\right)^{2k}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{2k}}$$
$$= \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{17} + \tan^{-1}\frac{1}{99} + \tan^{-1}\frac{1}{577} + \tan^{-1}\frac{1}{3363} + \cdots$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned} f_0\left(\frac{1}{\left(1-\sqrt{2}\right)^{2k}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{2k}}\right) &= 2\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^{4k}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{4k}+1}{\left(1-\sqrt{2}\right)^{4k}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{4k}+3} \\ f_n\left(\frac{1}{\left(1-\sqrt{2}\right)^{2k}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{2k}}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{\left(1-\sqrt{2}\right)^{2k}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{2k}}\right)} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n &= 8\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_n\left(\frac{1}{\left(1-\sqrt{2}\right)^{2k}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{2k}}\right) = 2^{n+2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{\left(1-\sqrt{2}\right)^{2k}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{2k}}\right)} \\ \Pi_n &= 8\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_n\left(\frac{1}{\left(1-\sqrt{2}\right)^{2k}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{2k}}\right) = 2^{n+3}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{\left(1-\sqrt{2}\right)^{2k}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{2k}}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{\left(1-\sqrt{2}\right)^{2k}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{2k}}\right)}} \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 35 (*FibonacciPi*):

$$(1)\quad \frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{1}{F_{2k+1}} = \tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{13}+\tan^{-1}\frac{1}{34}+\tan^{-1}\frac{1}{89}+\cdots$$

eşitliğinde

$$(2)\quad f_n\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) = \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right)},\quad f_0\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) = 2\frac{F_{2k}F_{2k+2}}{F_{2k-1}F_{2k+3}}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n &= 4\sum_{k=1}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) = 2^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right)} \\ \Pi_n &= 4\sum_{k=1}^{\infty}b_n\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) = 2^{n+2}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right)}} \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Örnek 36 (*LucasPi*):

$$(1)\quad \frac{\pi}{4} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \tan^{-1}\frac{1}{L_{2k+3}} - \tan^{-1}\frac{1}{L_3} = \tan^{-1}\frac{1}{3} + 2\tan^{-1}\frac{1}{7} + 2\tan^{-1}\frac{1}{18} + 2\tan^{-1}\frac{1}{47} + \cdots$$

eşitliğinde

$$(2)\quad f_n\left(\frac{1}{L_{2k+3}}\right) = \sqrt{2 + f_{n-1}\left(\frac{1}{L_{2k+3}}\right)},\quad f_0\left(\frac{1}{L_{2k+3}}\right) = 2\frac{L_2 + L_{4k+5}}{L_3 + L_{4k+5}}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n &= 8\sum_{k=0}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{L_{2k+3}}\right) - 4a_n\left(\frac{1}{L_3}\right) = 2^{n+1}\left(2\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{2 - f_n\left(\frac{1}{L_{2k+3}}\right)} - \sqrt{2 - f_n\left(\frac{1}{L_3}\right)}\right) \\ \Pi_n &= 8\sum_{k=0}^{\infty} b_n\left(\frac{1}{L_{2k+3}}\right) - 4b_n\left(\frac{1}{L_3}\right) = 2^{n+2}\left(2\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2 - f_n\left(\frac{1}{L_{2k+3}}\right)}{2 + f_n\left(\frac{1}{L_{2k+3}}\right)}} - \sqrt{\frac{2 - f_n\left(\frac{1}{L_3}\right)}{2 + f_n\left(\frac{1}{L_3}\right)}}\right) \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5)\quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Not 16: **Örnek 35** ve **Örnek 36** ile π sayısının klasik arktanjant bağıntılarıyla *Fibonacci Sayıları* ve *Lucas Sayıları* için özdeşlikleri verilmiştir. Bunlardan **Örnek 35**'deki (1) formülüne ***FibonacciPi*** ve **Örnek 36**'daki (1) formülüne ***LucasPi*** de denilmektedir.

π nin Fibonacci Sayılarıyla Hesaplanması:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \tan^{-1}\frac{1}{F_{2k+1}} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{13} + \tan^{-1}\frac{1}{34} + \tan^{-1}\frac{1}{89} + \cdots$$

π nin Lucas Sayılarıyla Hesaplanması:

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{3} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{1}{L_{2k+3}} = \tan^{-1}\frac{1}{3} + 2\tan^{-1}\frac{1}{7} + 2\tan^{-1}\frac{1}{18} + 2\tan^{-1}\frac{1}{47} + \cdots$$

Genel olarak; her k doğal sayısı arktanjant özdeşlikleri:

Fibonacci Sayıları için:

$$\tan^{-1}\frac{1}{F_{2k}} = \tan^{-1}\frac{1}{F_{2k+1}} + \tan^{-1}\frac{1}{F_{2k+2}}$$

Lucas Sayıları için:

$$\tan^{-1}\frac{1}{F_{2k+1}} = \tan^{-1}\frac{1}{L_{2k+1}} + \tan^{-1}\frac{1}{L_{2k+3}}$$

şeklindedir.

Özel durumda her m doğal sayısı arktanjant özdeşlikleri:

Fibonacci Sayıları için:

$$\tan^{-1}\frac{1}{F_{2m}} = \sum_{k=m}^{\infty}\tan^{-1}\frac{1}{F_{2k+1}}$$

Lucas Sayıları için:

$$\tan^{-1}\frac{1}{F_{2m}} = \tan^{-1}\frac{1}{L_{2m+1}} + 2\sum_{k=m}^{\infty}\tan^{-1}\frac{1}{F_{2k+3}}$$

şeklindedir.

Uyarı: Not 16'da Fibonacci Sayıları ve Lucas Sayıları için verilen bilgiler aşağıdaki mesajlardan ve bir linkten alınmıştır.

1. Yahoo! Groups pi-hacks Messages Message 433.htm

   From: Shane

   Date: Fri Sep 7, 2001 5:55 am

   Subject: LucasPi

   URL: http://groups.yahoo.com/group/pi-hacks/message/433

2. Yahoo! Groups pi-hacks Messages Message 436.htm

   From: Shane Findley, Dover NH

Date: Sat Sep 8, 2001 12:34 am

Subject: D.H. Lehmer ?

URL: http://groups.yahoo.com/group/pi-hacks/message/436

3. Pi ve Fibonacci Sayıları, Pi ve Lucas Sayıları hakkında detaylı bilgiyi

Pi and the Fibonacci Numbers

linkinden alabilirsiniz.

Örnek 37 (*GoldenMeanPi*):

$$(1)\quad \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{\phi} + \tan^{-1}\frac{1}{\phi^3} = \tan^{-1}(\phi-1) + \tan^{-1}(2\phi-3)$$

eşitliğinde

$$(2)\quad \begin{aligned} f_0\left(\frac{1}{\phi}\right) &= \frac{2}{2\phi-1} \\ f_n\left(\frac{1}{\phi}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{\phi}\right)} \\ f_0\left(\frac{1}{\phi^3}\right) &= 2f_0\left(\frac{1}{\phi}\right) \\ f_n\left(\frac{1}{\phi^3}\right) &= \sqrt{2+f_{n-1}\left(\frac{1}{\phi^3}\right)} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi_n &= 4a_n\left(\frac{1}{\phi}\right) + 4a_n\left(\frac{1}{\phi^3}\right) = 2^{n+1}\left(\sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{\phi}\right)} + \sqrt{2-f_n\left(\frac{1}{\phi^3}\right)}\right) \\ \Pi_n &= 4b_n\left(\frac{1}{\phi}\right) + 4b_n\left(\frac{1}{\phi^3}\right) = 2^{n+2}\left(\sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{\phi}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{\phi}\right)}} + \sqrt{\frac{2-f_n\left(\frac{1}{\phi^3}\right)}{2+f_n\left(\frac{1}{\phi^3}\right)}}\right) \end{aligned}$$

dizileri için

$$(4)\quad \pi_n \le \pi \le \Pi_n$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$(5) \quad \pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \Pi_n$$

dir.

Not 17: Burada ϕ sayısı

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

olup, buna *Altın Oran (Kesim)* denmektedir ve ardışık iki Fibonacci sayısının birbirine oranı

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \xrightarrow{n\to\infty} \phi$$

dir.

Burada yeni sunumla n-inci Fibonacci Sayısı (***Derya PAMUK TULUM-1995***):

$$F_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2k+1} 5^k \quad (n = 1,2,\ldots)$$

şeklindedir.

Şimdi, ϕ sayısı ile Fibonacci Sayısı arasındaki

$$(1) \quad \begin{aligned} \phi^n &= F_{n+1}\phi + F_n \\ \phi^{-n} &= (-1)^{n-1}(F_n\phi - F_{n+1}) \end{aligned}$$

ilişkisinden ϕ sayısını bulalım. Örneğin, (1) eşitliği nedeniyle

$$\phi^n = F_{n+1}\phi + F_n$$

$$\underline{\phi^{n+1} = F_{n+2}\phi + F_{n+1}}$$

$$\phi^n + \phi^{n+1} = (F_{n+1} + F_{n+2})\phi + (F_n + F_{n+1}) = F_{n+3}\phi + F_{n+2} = \phi^{n+2}$$

olduğundan,

$$\phi^n + \phi^{n+1} = \phi^{n+2} \Rightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0$$

ve sonuçta, bu denklemin

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

köküne ***Altın Oran*** denmektedir.

Not 18: ***Altın Oran*** hakkında detaylı bilgiyi Golden mean veya http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Golden_ratio.html linklerine bağlanarak alabilirsiniz.

Ekler

EK 1: Aşağıdaki çalışmayı, 29.07.2001'de sitemin girişine koymuştum.

Intro: 2. Süper Arktanjant Formülleri (29.07.2001): $\dfrac{2}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} < |a|$ sayısı için

$$
\begin{aligned}
P_6(a) = {} & \left(1+\sqrt{2}\right)^3 \frac{a^6}{8n+1} + 2\left(1+\sqrt{2}\right)^3 \frac{a^5}{8n+2} + 2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^3 \frac{a^4}{8n+3} + 8\left(1+\sqrt{2}\right)^2 \frac{a^3}{8n+4} \\
& + 8\left(1+\sqrt{2}\right)^2 \frac{a^2}{8n+5} + 16\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{a}{8n+6} + 16\sqrt{2}\,\frac{1}{8n+7} \\
Q_6(a) = {} & \left(1+\sqrt{2}\right)^3 \frac{a^6}{8n+1} - 2\left(1+\sqrt{2}\right)^3 \frac{a^5}{8n+2} + 2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^3 \frac{a^4}{8n+3} - 8\left(1+\sqrt{2}\right)^2 \frac{a^3}{8n+4} \\
& + 8\left(1+\sqrt{2}\right)^2 \frac{a^2}{8n+5} - 16\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{a}{8n+6} + 16\sqrt{2}\,\frac{1}{8n+7}
\end{aligned}
$$

olmak üzere,

$$
(1) \quad \mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{2}-1}{a-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{3n}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{4n+4} a^{8n+7}} P_6(a)
$$

$$
(2) \quad \mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{2}-1}{a+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{3n}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{4n+4} a^{8n+7}} Q_6(a)
$$

(1) ve (2) formülleri, 2. Süper Arktanjant Formülleri'dir. Bilindiği gibi, bu süper arktanjant formülleri, pi'nin n-inci basamağını hesaplamak için yeni formüllerin bulunmasında kullanılmakta olup, 1. Süper Arktanjant Formülleri'ni 20 Ocak 1997 de Fabrice BELLARD vermiştir.

2. süper arktanjant formülleri, Fabrice BELLARD'ın arktanjant formüllerine göre daha iyi bir yaklaşım vermesine karşılık, π nin *BBP Formülü*nü veren örneğe rastlanamamıştır. Aşağıdaki örnekler, yukarıdaki formüllerle π nin bir BBP Formülü için yalnızca birer yaklaşımdan ibarettir.

Eğer, (1) ve (2) formülleriyle π nin BBP formülünü bulan bir matematikçi olursa, kendisini şimdiden TEBRİK EDERİM.

$$
\begin{aligned}
[1] \quad \frac{\pi}{4} &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \\
&= \mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}-2\right)+1}
\end{aligned}
$$

$$
[2] \quad \frac{\pi}{4} = 2\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}
$$

$$
[3] \quad \frac{\pi}{4} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}
$$

$$[4] \quad \frac{\pi}{8} = 3\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1} - \mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$[5] \quad \frac{\pi}{8} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$[6] \quad \frac{3\pi}{4} = 2\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}-1} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$$

EK 2: Aşağıda Pi sayısının Tarihi Gelişimi'ni anlatan linkler var. Bu linklerden 2. linkle Pi sayısının Kronolojisi'ni açık bir şekilde aşağıda veriyorum. Bu kronolojiye baktığımda; Semerkand'lı bir Türk matematikçi olan Al-Kashi (El-Kaşi) den başka hiçbir Türk matematikçisini göremiyorum, göremiyorum, göremiyorum,…

1. Pi sayısının Tarihi:
   1. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html
   2. A history of pi, Lazarus Mudehwe.
   3. history of Pi
2. Pi Through the Ages, J. J. O'Connor and E. F. Robertson , Univ. of St. Andrews.
3. Ancient Pi: Knowers of the Universe, Charles William Johnson, Earth/matriX Science in Ancient Artwork, 1998.
4. Pi nin Kronolojisi:

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Pi_chronology.html

A chronology of pi

Pre computer calculations of π

	Mathematician	Date	Places	Comments
1	Rhind papyrus	2000 BC	1	3.16045 (= $4(8/9)^2$)
2	Archimedes	250 BC	3	3.1418 (average of the bounds)
3	Vitruvius	20 BC	1	3.125 (= 25/8)
4	Chang Hong	130	1	3.1622 (= $\sqrt{10}$)
5	Ptolemy	150	3	3.14166
6	Wang Fan	250	1	3.155555 (=142/45)
7	Liu Hui	263	5	3.14159
8	Tsu Ch'ung Chi	480	7	3.141592920 (= 355/113)
9	Aryabhata	499	4	3.1416 (=62832/2000)
10	Brahmagupta	640	1	3.1622 (= $\sqrt{10}$)
11	Al-Khwarizmi	800	4	3.1416
12	Fibonacci	1220	3	3.141818
13	Madhava	1400	11	3.14159265359
14	Al-Kashi	1430	14	3.14159265358979
15	Otho	1573	6	3.1415929
16	Viète	1593	9	3.1415926536
17	Romanus	1593	15	3.141592653589793
18	Van Ceulen	1596	20	3.14159265358979323846
19	Van Ceulen	1596	35	3.14159265358979323846264338327950 29
20	Newton	1665	16	3.1415926535897932
21	Sharp	1699	71	
22	Seki Kowa	1700	10	

23	Kamata	1730	25	
24	Machin	1706	100	
25	De Lagny	1719	127	Only 112 correct
26	Takebe	1723	41	
27	Matsunaga	1739	50	
28	von Vega	1794	140	Only 136 correct
29	Rutherford	1824	208	Only 152 correct
30	Strassnitzky, Dase	1844	200	
31	Clausen	1847	248	
32	Lehmann	1853	261	
33	Rutherford	1853	440	
34	Shanks	1874	707	Only 527 correct
35	Ferguson	1946	620	

General Remarks:

A. In early work it was not known that the ratio of the area of a circle to the square of its radius and the ratio of the circumference to the diameter are the same. Some early texts use different approximations for these two "different" constants. For example, in the Indian text the *Sulba Sutras* the ratio for the area is given as 3.088 while the ratio for the circumference is given as 3.2.

B. Euclid gives in the *Elements* **XII** Proposition 2:

Circles are to one another as the squares on their diameters.

He makes no attempt to calculate the ratio.

Computer calculations of π

Mathematician	Date	Places	Type of computer
Ferguson	Jan 1947	710	Desk calculator
Ferguson, Wrench	Sept 1947	808	Desk calculator
Smith, Wrench	1949	1120	Desk calculator
Reitwiesner et al.	1949	2037	ENIAC
Nicholson, Jeenel	1954	3092	NORAC
Felton	1957	7480	PEGASUS
Genuys	Jan 1958	10000	IBM 704
Felton	May 1958	10021	PEGASUS
Guilloud	1959	16167	IBM 704
Shanks, Wrench	1961	100265	IBM 7090
Guilloud, Filliatre	1966	250000	IBM 7030
Guilloud, Dichampt	1967	500000	CDC 6600
Guilloud, Bouyer	1973	1001250	CDC 7600
Miyoshi, Kanada	1981	2000036	FACOM M-200
Guilloud	1982	2000050	
Tamura	1982	2097144	MELCOM 900II

Tamura, Kanada	1982	4194288	HITACHI M-280H
Tamura, Kanada	1982	8388576	HITACHI M-280H
Kanada, Yoshino, Tamura	1982	16777206	HITACHI M-280H
Ushiro, Kanada	Oct 1983	10013395	HITACHI S-810/20
Gosper	Oct 1985	17526200	SYMBOLICS 3670
Bailey	Jan 1986	29360111	CRAY-2
Kanada, Tamura	Sept 1986	33554414	HITACHI S-810/20
Kanada, Tamura	Oct 1986	67108839	HITACHI S-810/20
Kanada, Tamura, Kubo	Jan 1987	134217700	NEC SX-2
Kanada, Tamura	Jan 1988	201326551	HITACHI S-820/80
Chudnovskys	May 1989	480000000	
Chudnovskys	June 1989	525229270	
Kanada, Tamura	July 1989	536870898	
Chudnovskys	Aug 1989	1011196691	
Kanada, Tamura	Nov 1989	1073741799	
Chudnovskys	Aug 1991	2260000000	
Chudnovskys	May 1994	4044000000	
Kanada, Tamura	June 1995	3221225466	
Kanada	Aug 1995	4294967286	
Kanada	Oct 1995	6442450938	
Kanada, Takahashi	Aug 1997	51539600000	HITACHI SR2201
Kanada, Takahashi	Sept 1999	206158430000	HITACHI SR8000

General Remarks:

A. Calculating π to many decimal places was used as a test for new computers in the early days.

B. There is an algorithm by Bailey, Borwein and Plouffe, published in 1996, which allows the nth hexadecimal digit of π to be computed without the preceeding n- 1 digits.

C. Plouffe discovered a new algorithm to compute the nth digit of π in any base in 1997.

Article by: *J J O'Connor* and *E F Robertson*

Reference (One book/article)

Other Web sites:

Simon Fraser University (Tables of Computations)

JOC/EFR September 2000

The URL of this page is:

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Pi_chronology.html