KAMUYA AÇIKLANACAK

GÖZDEN GEÇİRİLDİ
Derya PAMUKTULUM 08:00, 1.11.19

Teşekkür

Leyden Üniversitesi Matematik Profesörü ***Willebrord Snell van Royen (1580-1626)***, Digitaler Portraitİndex.

Bir merak üzerine Romberg Metodu'nu araştırmaya başladığım bu ilk çalışmamda bana esin kaynağı olan ***Snellius***'u ne kadar ansam azdır. Çünkü Romberg Metodu'ndaki Bölüm 1: Trapez Metodu'nu iyi-kötü bir şekilde çıkaracağımı biliyordum ama 2. Bölüm'e nasıl başlayacağımı kestiremiyordum. İşte orada aklıma E-ATA 1 Algoritmaları'ndaki 2002'de keşfettiğim Snellius Ekstrapolasyonu geldi ve hemen ***Snellius***'un 1621'deki algoritmasını ekstrapolasyonda incelemeye başladım. Bu inceleme sırasında, ***Huygens***'in 1654'te verdiği algoritmadan ***Snellius***'un 1621'deki algoritmasına nasıl geçildiğini ve bunların aynı şeyler olduklarını gördüm. Oysa ***Huygens***, 1654'te algoritmasını ***Snellius***'unkinden değil, ***Kardinal Nikola***'nınkinden keşfetmişti. Yani bu çakışma ***Huygens*** için kötü şans ama Matematik için iyi şanstır!

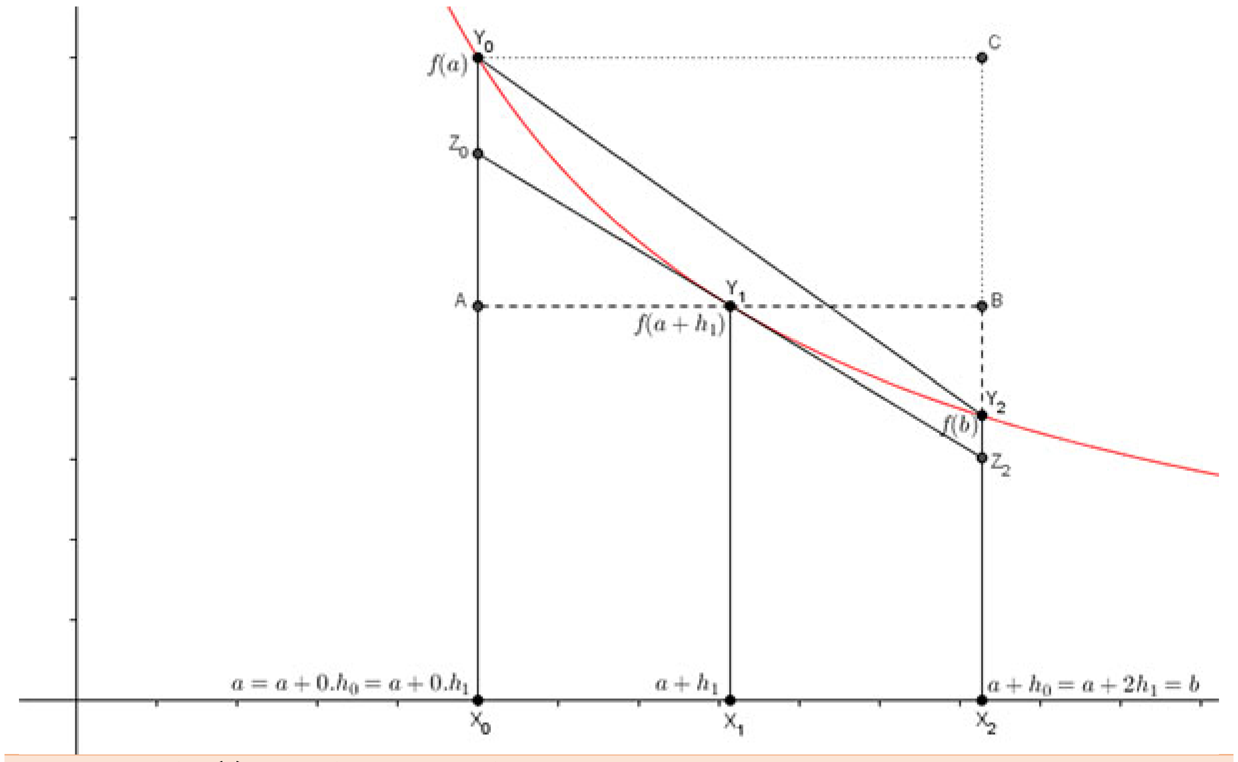
Derya PAMUK TULUM.

ONAYLANDI

Romberg İntegrasyonu Kronolojim 1

1. **Romberg Metodu ve Ötesi:** Romberg metodunun trapez ile ilgili bölümünü aşağıda görüldüğü üzere 5 parçada (ki sonuncusunu durum değerlendirmesi nedeniyle şimdi ekledim. Yani 5. Parça orijinalde yer almaz) inceledim.

*"1.1. **Trapez Metodu:** 14 Şubat 1955'te [Werner Romberg (1909-2003)] tarafından keşfedilen ve ondan sonra bu isimle anılan metottaki trapez metodu, $I = \int_a^b f(x)dx$ belirli integrali için*



Şekil 1. Konveks f(x) eğrisinde trapez metodu.

şeklindeki $f(x)$ fonksiyonunun altında kalan $X_0X_2Y_2Y_0$ bölgesine $X_0X_2Y_2Y_0$ dik yamuğunun alanıyla başlayan ve her seferinde bu yamuğun $h_0 = h = b - a$ yüksekliğinin 2'ye bölünmesiyle ortaya çıkan dik yamukların yüksekliklerine karşılık gelen yanal kenarların $f(x)$'e yakınlaştırılması yoluyla bu dik yamukların alanlarının toplamının $X_0X_2Y_2Y_0$ bölgesine yakınsaklaştırılmasından ibaret metottur.

Çok ilginçtir, eğer konveks $f(x)$ fonksiyonunda ya da $f(x)$ fonksiyonunun konveks olan parçalarında trapez metodunu uygularsak, yani şekilde $n = 1$. adımda görüldüğü üzere $X_0X_2Y_2Y_0$ dik yamuğunun alanı $f(x)$ fonksiyonunun altında kalan $X_0X_2Y_2Y_0$ bölgesinden büyüktür, dolayısıyla $I < B_1$ sonucu ve genelde de n. adımda $I < B_n$ eşitsizliği geçerli olur. Yani B_n, I'nın üst sınırı olur.

Şu halde $X_0X_2Y_2Y_0$ dik yamuğunun alanını hesaplarsak;

$$B_0 := A(X_0X_2Y_2Y_0) = (b-a).\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitliklerinden

$$(1)\quad B_0 = h_0.\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

olduğunu görürüz.

Fakat B_n için $[a,b]$ aralığını 2^n tane eş alt aralığa bölersek, bu şekilde doğrudan dik yamuğun alan formülüyle hesap yapmak zorlaşır. O halde bu şekilde dik yamuğun alan formülüyle hesaplamak yerine $X_0X_2Y_2Y_0$ dik yamuğunu $X_0X_2CY_0$ dikdörtgenine tamamlarsak,

$$B_0 = A(X_0X_2Y_2Y_0) = A(X_0X_2CY_0) - A(Y_2CY_0) = (b-a)f(a) - \frac{(b-a)\big(f(a)-f(b)\big)}{2} = h_0f(a) - h_0.\frac{\big(f(a)-f(b)\big)}{2} = h_0.\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

işleminden (1)'in elde ediliş şekli daha kolay olur.

Diğer taraftan, eğer $[a,b]$ aralığının ortası olan $\frac{a+b}{2} = \frac{2a+(b-a)}{2} = a + \frac{b-a}{2} = a + h_1$'ye karşılık gelen X_1 noktasını gözönüne alır ve X_1Y_1 dikmesinin $f(x)$ eğrisini kestiği Y_1'den Z_0Z_2 teğetini çizersek bu teğetin denklemi,

$$(2)\quad y - f(a+h_1) = f'(a+h_1)\big(x - (a+h_1)\big)$$

şeklindedir. Burada eğim Leibnitz Teoremi'ne göre $m = f'(a+h_1)$ dir.

Buna göre Z_0 noktasının değeri (2)'den,

$$y - f(a+h_1) = f'(a+h_1)\big(a - (a+h_1)\big) \Rightarrow z_0 = f(a+h_1) - h_1f'(a+h_1)$$

ve Z_2 noktasının değeri ise

$$y - f(a+h_1) = f'(a+h_1)\big(a + 2h_1 - (a+h_1)\big) \Rightarrow z_2 = f(a+h_1) + h_1f'(a+h_1)$$

olduklarından

$$(3)\quad \begin{cases} z_0 = f(a+h_1) - h_1 f'(a+h_1), \\ z_2 = f(a+h_1) + h_1 f'(a+h_1) \end{cases}$$

sonuçları çıkar.

İşte bu sonuçlara göre $f(x)$ eğrisinin altında kalan $X_0X_2Z_2Z_0$ dik yamuğunun alanı,

$$A_0 := A(X_0X_2Z_2Z_0) = (b-a).\frac{z_0+z_2}{2} = (b-a)f(a+h_1) = h_0 f(a+h_1)$$

olup buradan

$$(4)\quad A_0 = h_0 f(a+h_1)$$

olarak elde edilir.

Fakat burada da aynı durum sözkonusudur. Yani B_n için $[a,b]$ aralığını 2^n eş alt aralığa böldüğümüzde (2) ile (3)'ten 2^n tane dik yamuğun alanını hesaplamak ve bunların alanlarını toplamak çok zaman ister. İşte burada I'nın alt sınırı hesaplamak için son derece basit olan şu sonucu görmek gerekiyor: Eğer Y_1'den X_0Y_0 ve X_2Y_2 doğrularına birer dikme çizersek $X_0X_2Z_2Z_0$ dik yamuğunun alanı, eş $X_0X_1Y_1A$ ve $X_1X_2BY_1$ dikdörtgenlerinin alanlarının toplamına eşit olur, yani

$$A_0 = A(X_0X_2Z_2Z_0) = A(X_0X_1Y_1A) + A(X_1X_2BY_1) = h_1 f(a+h_1) + h_1 f(a+h_1) = 2h_1 f(a+h_1) = h_0 f(a+h_1)$$

işleminden (4) derhal elde edilmiş olur.

Peki, bu nasıl oldu?

Dikkat edilirse şekilde $f(x)$ eğrisine Y_1 noktasında çizilen Z_0Z_2 teğeti nedeniyle $AY_1Z_0 \cong BY_1Z_2$ (K.A.K) eş dik üçgenlerinden

$$(5)\quad A(AY_1Z_0) = A(BY_1Z_2)$$

alanlar eşitliği gerçekleşir. Dolayısıyla $X_0X_2Z_2Z_0$ dik yamuğundaki AY_1Z_0 dik üçgeni $X_1X_2BY_1$ dikdörtgenine BY_1Z_2 olarak transfer edilmiş olur ki, $X_0X_2Z_2Z_0$ dik yamuğunun alanı eş $X_0X_1Y_1A \cong X_1X_2BY_1$ dikdörtgenlerinin alanlarının toplamına dönüşür.

Sonuçta (1) ve (4)'ten $I = \int_a^b f(x)dx$ integrali için

$$(6)\quad A_0 < I < B_0$$

şeklinde tam sıkıştırma (sandöviç) teoremi geçerli olur.

İkinci olarak, B_1 için $[a,b]$ aralığını 2 eşit parçaya bölersek, ki bu durum şekilde mevcuttur,

$$B_1 = A(X_0X_1Y_1Y_0) + A(X_1X_2Y_2Y_1) = h_1 f(a) - \frac{h_1\big(f(a) - f(a+h_1)\big)}{2} + h_1 f(a+h_1) - \frac{h_1\big(f(a+h_1) - f(b)\big)}{2}$$
$$= h_1\big(f(a) + f(a+h_1)\big) + h_1.\frac{f(b)-f(a)}{2} = h_1 f(a+h_1) + h_1.\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{B_0}{2} + h_1 f(a+h_1)$$

eşitliklerinden

$$(7)\quad B_1 = \frac{B_0}{2} + h_1 f(a+h_1)$$

sonucu elde edilir.

Diğer taraftan, X_0 ile X_1 ve X_1 ile X_2 nokta çiftlerinin orta noktalarını bulur (ki X_0 ile X_1'in orta noktası $\frac{a+a+h_1}{2} = a + \frac{h_1}{2} = a + h_2$ ve X_1 ile X_2'nin orta noktası da $\frac{a+h_1+a+2h_1}{2} = a + \frac{3h_1}{2} = a + 3h_2$'dir) ve bu orta noktalardan çıkılan dikmelerin $f(x)$ eğrisini kestiği noktalardan birer teğet çizersek,

$$A_1 = 2h_2 f(a+h_2) + 2h_2 f(a+3h_2) = h_1\big(f(a+h_2) + f(a+3h_2)\big)$$

eşitliklerinden

$$(8)\quad A_1 = h_1\big(f(a+h_2) + f(a+3h_2)\big)$$

sonucu elde edilir.

Sonuçta işleme bu şekilde devam edersek MEM (Matematiksel Endüksiyon Metodu) gereğince n pozitif tam sayısı için

$$(9)\quad \begin{cases} A_n = h_n \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} f(a + (2k-1)h_{n+1}), \\ B_n = \dfrac{B_{n-1}}{2} + h_n \displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-1}} f(a + (2k-1)h_n) \end{cases}$$

olmak üzere (ki bunlardan A_n, orta nokta formülü iken B_n, trapez formülüdür)

$$(10)\quad A_1 < A_2 < \cdots < A_n < \cdots < I < \cdots < B_n < \cdots < B_2 < B_1$$

*eşitsizlikleri gerçekleşir. Burada $n \to \infty$ için I integrali için **Arşimet**'in kullandığı tam bir sıkıştırma teoremi gerçekleşir. Fakat bu eşitsizlikler $f(x)$'in konveks (azalan) ya da konveks olduğu yerlerde geçerlidir.*

Eğer $f(x)$ konkav (artan) ise ya da $f(x)$'in konkav olduğu yerleri mevcutsa A_n ve B_n'ler yer değiştirirler ve,

$$(11)\quad B_1 < B_2 < \cdots < B_n < \cdots < I < \cdots < A_n < \cdots < A_2 < A_1$$

eşitsizlikleri geçerli olur."

Burada dikkat çekici özellik şudur: *"Çok ilginçtir, (9)'dan*

$$B_{n+1} = \frac{B_n}{2} + h_{n+1} \sum_{k=1}^{2^n} f(a + (2k-1)h_{n+1}) = \frac{B_n}{2} + h_{n+1}.\frac{A_n}{h_n} = \frac{B_n}{2} + \frac{h_{n+1}}{h_n}.A_n = \frac{B_n}{2} + \frac{1}{2}.A_n = \frac{A_n + B_n}{2}$$

eşitliklerine göre

$$(12)\quad B_{n+1} = \frac{A_n + B_n}{2}$$

aritmetik ortalama bağıntısı vardır!"

1.2. **Romberg Metodu'na İlişkin Orijiinal Formüller:** 03.11.2016, 16:46'da ***Byrnjulf Owren***'in "*Werner Romberg: Vereinfachte Numerische Integration*" adlı makalesine ulaştım ve (9) ile (12)'nin ***Romberg*** tarafından verilmiş olduğunu gördüm. Çünkü günümüzdeki kaynaklarda, yetkin akademik kaynaklar hariç, bu formüllerden yani ***Romberg***'in orijinal metodundan bahsedilmez!

Bu nedenle bu parçada şu tanımlamayı yaptım: *"Safkan bir Alman bilim adamı olan (yani Yahudi değil!) **Werner Romberg**, 14 Şubat 1955'te $f_0 = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ başlangıç değeri ve $0 < k$ için*

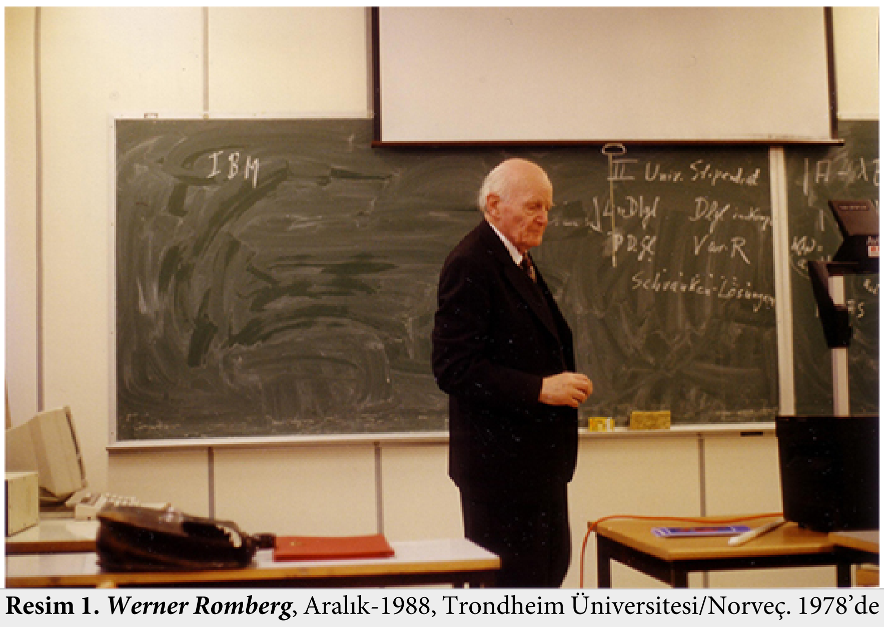
$$(13)\quad \begin{cases} T_n = h.\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f_k\,, f_k = f(a + kh), \\ U_n = h.\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}}\,, f_{k+\frac{1}{2}} = f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h\right) \end{cases}$$

bağıntılarından hareketle

$$(14)\quad T_{2n} = \frac{T_n + U_n}{2}$$

sonucunu vererek (9)'daki B_n'yi tanımlamış oldu!"

Sözkonusu bu formüller ***Romberg***'in orijinal makalesinde ya da sonradan yaptığı bir çalışmada geçmez. Çünkü bu formüller ***Romberg***'in hesaplarının derli toplu şekilleridir. Yani bu formüller ***Owren***'in, ***Romberg***'in ülkesine (Norveç) ve Uygulamalı Matematik, Sayısal Analiz ve Dijital Hesaplamalar alanlarındaki katkıları nedeniyle ölümünün 9. Yıldönümü'nde 20.03.2012 tarihli "*SKRIFTER 2011 nr. 4*" dergisinde 8 sayfalık aynı adla yazdığı makalede geçer!



Resim 1. ***Werner Romberg***, Aralık-1988, Trondheim Üniversitesi/Norveç. 1978'de 69 yaşındayken emekli oldu. Uzun emekliğinin tadını çıkardı. Aralık 1988'de, yaklaşık 80 yaşında olduğunda, Trondheim Üniversitesi'nde onuruna ***"İnterpolasyon, Ekstrapolasyon, Kuadratür ve Rasyonel Yaklaşıklıklar Hakkında Romberg Semineri"*** düzenlendi.

1.3. **$\mathrm{A_n}$ ve $\mathrm{B_n}$ Dizilerinin $\mathrm{A_0}$ ve $\mathrm{B_0}$ Başlangıç Terimlerine İndirgenmesi:** İlkin $\mathrm{B_n}$'yi $\mathrm{B_0}$'a adım adım indirgerken

$$(16)\quad \mathrm{B_n} = \frac{\mathrm{B_0}}{2^{\mathrm{n}}} + \mathrm{h_n} \sum_{\mathrm{k=1}}^{2^{\mathrm{n}}-1} \mathrm{f(a + kh_n)}$$

şeklinde yeni bir formüle ulaştım!

Burada okuyucu Nümerik Analiz kitaplarında ve bilgisayar programlarında bu formül yerine (9)'un geçtiğine ve bilgisayar uygulamalarımda neden (9) yerine (16)'yı kullandığıma dikkat etmelidir!

İkinci olarak, $\mathrm{A_n}$'yi de adım adım $\mathrm{A_0}$'a indirgerken

$$(18)\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{A_{n-k}}{2^k}=h_n\sum_{k=1}^{2^n-1}f(a+kh_n)$$

formülünün geçerli olduğunu gördüm.

Yani bu formüllere göre

$$(19)\quad B_n=\frac{B_0}{2^n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{A_{n-k}}{2^k}$$

indirgeme bağıntısı geçerlidir.

Eğer (19)'da her adımda (12) bağıntısını kullanırsak,

$$(20)\quad \begin{cases} B_n=\dfrac{B_0}{2^n}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A_{n-k}}{2^k}+\frac{B_0}{2^n}=\frac{A_0+B_0}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A_{n-k}}{2^k}=\frac{2B_1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A_{n-k}}{2^k}=\frac{B_1}{2^{n-1}}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A_{n-k}}{2^k}\\ =\dfrac{B_1}{2^{n-1}}+\dfrac{A_1}{2^{n-1}}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2}\frac{A_{n-k}}{2^k}=\frac{A_1+B_1}{2^{n-1}}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{A_{n-k}}{2^k}=\frac{B_2}{2^{n-2}}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{A_{n-k}}{2^k}\\ \vdots\\ =\dfrac{B_{n-1}}{2^{n-(n-1)}}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-(n-1)}\frac{A_{n-k}}{2^k}=\frac{B_{n-1}}{2}+\frac{A_{n-1}}{2}=\frac{A_{n-1}+B_{n-1}}{2}\end{cases}$$

şeklinde (12)'deki aritmetik bağıntı ortaya çıkar!

1.4. **Romberg İle Çakışmamız!**

Eğer ***Romberg***'in algoritmasında $T_{2n}=:T_{n+1}$ dersek,

$$(21)\quad \begin{cases} T_{n+1}=T_{2n}=\dfrac{T_n+U_n}{2}=\dfrac{\frac{T_{n-1}+U_{n-1}}{2}+U_n}{2}=\dfrac{U_n}{2}+\dfrac{U_{n-1}}{2^2}+\dfrac{T_{n-1}}{2^2}=\displaystyle\sum_{k=0}^{1}\frac{U_{n-k}}{2^{k+1}}+\frac{T_{n-1}}{2^2},\\ =\dfrac{U_n}{2}+\dfrac{U_{n-1}}{2^2}+\dfrac{\frac{T_{n-2}+U_{n-2}}{2}}{2^2}=\displaystyle\sum_{k=0}^{2}\frac{U_{n-k}}{2^{k+1}}+\frac{T_{n-2}}{2^3},\\ \vdots\\ =\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{U_{n-k}}{2^{k+1}}+\frac{T_{n-n}}{2^{n+1}}=\frac{T_0}{2^{n+1}}+\sum_{k=0}^{n}\frac{U_{n-k}}{2^{k+1}}\end{cases}$$

sonuçlarının gerçekleştiğini görürüz.

Fakat burada (14) nedeniyle

$$(22)\quad T_n=2T_{n+1}-U_n$$

bağıntısını (21)'deki son eşitlikte kullanırsak,

$$T_{n+1}=\frac{T_0}{2^{n+1}}+\sum_{k=0}^{n}\frac{U_{n-k}}{2^{k+1}}\Rightarrow 2T_{n+1}=\frac{T_0}{2^n}+\sum_{k=0}^{n}\frac{U_{n-k}}{2^k}=\frac{T_0}{2^n}+U_n+\sum_{k=1}^{n}\frac{U_{n-k}}{2^k}\Rightarrow T_n=2T_{n+1}-U_n=\frac{T_0}{2^n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{U_{n-k}}{2^k}$$

eşitliklerinden

$$(23)\quad T_n=\frac{T_0}{2^n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{U_{n-k}}{2^k}$$

bağıntısı elde edilir ki, buradan $T_0=hf_0=B_0$ iken

$$(24)\quad T_{2^n}=B_n,U_{2^n}=A_n$$

sonuçlarının geçerli olduğu sonucu çıkar! Ancak burada ilk eşitlik açıkken ikincisi için yukarıdaki gibi bir ispatın ortaya konulması gerekiyor!

Bunun hemen altına da şöyle bir değerlendirmede bulundum:

*"Çok ilginçtir, bu sabah, 18.11.2016'nın ilk saatlerinde YAHOO'daki "Explorers Discovered A Nazi Time Capsule, But What Missing From It?" haberinde 1934 tarihli zaman kapsülünde **Hitler**'in 2 ciltlik orijinal **"Mein Kampf (Kavgam)"** kitabını görünce şöyle demiştim: 'Vaaay… hem çift kitap, hem de orijinal!'. **Romberg** ile çakışmamızı ve ondan önceki bölümü (1.3)'ü akşam eve gelince çözdüm. Burada orijinallik çok önemlidir. Çünkü **Romberg**'in algoritması öyle her yerde yayınlanmaz; onu Norveççe yazan tarihi bir*

*makaleden ([1]) aldım. Yani bu çalışmalarla **Romberg**'in algoritmasının çift sınırlı olduğu gerçeği ortaya çıktı. Eğer **Owren**'in makalesi elimde olmasaydı, ben de bu gerçeği göremeyecektim!"*

Fakat ben bu değerlendirmeyi ***Owren***'in makalesine göre yapmıştım ve ***Romberg***'in orijinal makalesini görene kadar da bundan emin değildim. Çünkü ilk sayfanın sonundaki T_1 için verilen formül, ***Romberg***'in (13)'tekinden farklı bir hesap yaptığını gösteriyordu!

Burada bu tahmini yaparken şunlar dikkatimi çekmişti: Öncelikle ***Owren***'in DKNVS'deki *"Werner Romberg: Vereinfachte Numerische Integration"* adlı makalesinin ilk sayfasını ilk gördüğümde derhal orijinal olduğunu yani ***Romberg***'in makalesinin ilk sayfasını olduğunu anlamıştım. Çünkü orada WERNER ROMBERG'in altındaki *"14 Şubat 1955 tarihinde yapılan ortak toplantıda **S. Selberg** tarafından sunulmuştur (Fremlagt i Fellesmøtet 14de februar 1955 av herr **S. Selberg**)."* ibaresi bunun böyle olduğu söylüyordu. Bununla birlikte metnin Almanca olması, ilk sayfanın orijinal olduğunu kanıtlıyordu!

İşte bunun üzerine internette, her yerde ***Romberg***'in orijinal makalesini aramaya başladım ve elimden 100'lerce kaynak geçti. Bunların içinde en dikkat çeken, dolayısıyla en başta yer alan kaynak, 01.01.2017, 02:23'te ulaştığım ***Jean Luc Chabert***'in *"History of Algorithms from Pebble to the Microchip"* kitabı idi (**Y.N.** Normalde bu kitap Amazon'da 103.81 $'a satılır (Bkz. *"History of Algorithms from Pebble to the Microchip"*) ve başka yerde daha ucuzunu bulmanız imkânsızdır. Aynı şekilde, bu kitabı internette boşuna aramayın; çünkü telif hakkı nedeniyle bulmanız imkânsızdır. Ama şimdi bu kitabı bir hayırseverin yardımıyla linki tıklayarak web sitemden alabilirsiniz). Çünkü bu kitabın 451-453. sayfalarında ***Romberg***'in orijinal makalesinin ilk 5 sayfasının bazı yerlerinin, ***Romberg***'in ikide bir ***"Metodumuz (unsere Methode)"*** dediği ve günümüzde ***"Romberg Metodu"*** olarak anılan yerlerin 1-1 İngilizce çevirisi vardı ve ben, ***Romberg***'in bu sayfalardaki hesaplarını yani (24)'teki eşitlikleri teker teker ispatlayarak ***Romberg***'in metodunu tamamen deşifre etmiş oldum (ki ***Owren***'in (13)'te verdiği formüller yalnızca h farkı için geçerlidir, dolayısıyla (24)'teki eşitlikler için yani $2h, 4h, 8h$ için dönüştürmek gerekiyor. Bu dönüşümün nasıl olduğunu Bölüm 2'de anlattım).

1.5. Romberg'in Orijinal Makalesinin Peşinde!

Gerçi, ***Romberg***'in metodunu deşifre ettiğime göre orijinal makaleye ihtiyacım yoktu ama yine de kafalarda herhangi bir kuşku kalmasın diye her yerde harıl harıl aradım. Araştırmalarıma göre ***Romberg***'in orijinal makalesi *"Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab (The Royal Norwegian Society of Sciences: Norveç Kraliyet Bilim Derneği)"*'nde yoktu, orada sadece ***Brynjulf Owren***'in *"Werner Romberg: Vereinfachte Numerische Integration; DKNVS Forhandlinger 1955"* makalesi vardı. DKNVS, Norveç Kralı ***Harald V*** tarafından 1760'ta Trondheim'da kurulmuş olup kâr amacı gütmeyen bir kuruluştur. Onların ellerinde kalan eski dergiler 1774-1920 yıllarına ait olup sınırlı sayıdadır. Yani bunlar sıralı değil, yalnızca ellerinde kalanlardır. Eski sayıların başta amazon olmak üzere pek çok yerde ticareti yapılıyor. Oralara da baktım ve 1955 sayısını bulamadım (ki olsa paraya kıyardım). İnanır mısınız ***Romberg***'in orijinal makalesi için bakmadığım yer kalmadı ve sonunda şu muhtemel sonuçlara ulaştım:

1. NTNU'da,
2. Heidelberg Üniversitesi Kütüphanesi'nin 495101141 no'lu kataloğunda,
3. ResearchGate'teki *"Vereinfachte Numerische Integration"* adlı dosyasında.

Bunlardan ilkindeki mevcut durumu yukarıda açıkladım ve üçüncüsüne ancak **"Not a researcher"** ile üye olup 2 kez e-posta göndermeme rağmen dosyayı elinde tutan kişi bana geri dönüş yapmadı (ki muhtemelen elinde yoktu). İkincisinde ise üçüncüsündeki gibi kütüphaneye bağlı bir üniversiteye öğrenci olmanız ya da ilişkili olmanızı şart koşuyordu ve DigiKat'tan yaptığım araştırmaya göre de bu makalenin kartını göremedim. Yani bu makale orada dijital olarak değil, fiziksel olarak mevcut idi. Bu ise oraya girmekten başka bir çare bırakmıyordu. Denedim, Almanya'da bir yakını olup Heidelberg Üniversitesi'ne ulaşabilecek bir öğretmen arkadaşım ve öğrencim var mı diye araştırdım. Sonuç olumsuz idi!

Romberg İle Aynı Kaderi Paylaşıyorum!

Bu nedenle son çare olarak NTNU'da bu makalenin adını yazdığım zaman karşıma hep ***Brynjulf Owren*** çıkıyordu, yani ona yönlendiriliyordum ve ben de ona 23.12.2018, 04:10'da bir e-posta yolladım ve akşamleyin e-posta kutuma baktığımda 09:11'de yani 5 saat sonra yıldırım hızıyla bana yanıt gönderdiğini gördüm. ***Owren***, makaleye ait dosyanın ekte olduğunu söyleyerek bana en iyi dileklerini iletiyordu. Gerçekten de eke baktığımda ***Romberg***'in 14 Şubat 1955'te NTNU'da yayınlanan 7 sayfalık orijinal makalesini gördüm ve bu, bana yeni yıl armağanı oldu. Armağanı, pardon dosyayı ekten alır almaz hemen Bölüm 1'de ***Jean Luc Chabert***'in *"History of Algorithms from Pebble to the Microchip/14.6 Romberg's Integration Method, S. 451-453"*'e göre yaptığım çalışmalarıma baktım ve her 2 metni karşılaştırdığımda ***Jean Luc Chabert***'in ***Romberg***'in orijinal makalesindeki trapez metoduyla ilgili bölümleri Almanca'dan İngilizce'ye 1-1 çeviri yapmış olduğunu gördüm (ki ***Jean Luc Chabert***, atladığı yerleri "[…]" ile gösterir). Yani Bölüm 1'de gerçekten nokta atışı bir çalışma çıkartmışım. Bununla birlikte, ***Romberg***'in metodunu deşifre ederek modernleştirdiğimi gördüm (ki bu arada, tüm yönleriyle ele alarak zenginleştirdiğimi gördüm (bkz. 1.3'e)) ve ***Romberg***'in orijinal makalesine neden ihtiyacım olmadığımı bu sayede ispatlamış oldum. Çünkü ***Romberg***'in 14 Şubat 1955'teki trapez metoduyla ilgili orijinal çalışmasını günümüze taşıyan tek çalışma Bölüm 1'de görüldüğü üzere bana nasip oldu. Ama yine de bu orijinal makaleyi bir yerden bulmalıydım ve bu ***Owren***'in yardımı sayesinde gerçekleşti.

Özetle, ***Romberg***'in metodunu, orijinal makalesine bakmadan deşifre edebildiğime göre, kitabımın Bölüm 1'indeki çalışmalara hiç dokunmadan, ***"Romberg Metodu'nun Deşifrasyonu ya da Modernizasyonu"*** adlı çalışmanın altına bir not çıkartarak ***Romberg***'in orijinal makalesi hakkında bir değerlendirmede bulundum!

Bu arada, ***Romberg***'in orijinal makalesini araştırırken, ki bu tam bir tarama idi, Japon matematikçi ***Seiji Fujino***'nun ***"Romberg İntegrasyonunun Mucidi Werner Romberg ile Bir Röportaj"*** adlı 4 sayfalık Japonca bir dosya da ağıma takıldı ve daha da meraklanmaya başladım!

Derya PAMUKTULUM

2. **Romberg Algoritmasının Richardson Ekstrapolasyonu İle Hızlandırılması ve Ötesindeki Gelişmeler Hakkında:** Bu bölümde şöyle bir giriş yaptım: "*Trapez metoduyla bulunan (9) (ya da (13))'teki B_n algoritması son derece zayıf bir lineer yakınsamaya sahiptir ancak, **Huygens**'i takip eden **Jacques Frederic Saigey** tarafından 1856 ve 1859'da verilen $B_n =: R_{n,0}$ için*

([1]) ***Werner Romberg*** 1938'te Oslo'daki arkadaşı ***Hylleraas***'ın asistanı olarak çalışmak için Prag'a kaçmasına rağmen gerekli izinlere sahip değildir. Bu yüzden 20 Kasım 1938'de Prag'tan Oslo'ya uçar. Bunun bir diğer ama en önemli nedeni, ***Hitler***'in Prag ile birlikte tüm Çekoslovakya'yı 15 Mart 1939'da işgal etmiş olmasıdır. ***Romberg*** herhalde bu işgalin olacağını daha önceden öngörüyordu (Bkz. *"Hitler ve Göring PRAG'ta"*). ***Romberg*** 1949'da Trondheim'daki Norveç Teknoloji Enstitüsü'ne katılır ve hayatının büyük bölümünü Norveç'te geçirir. İşte Norveçliler ***Romberg***'e bu yüzden ilgi gösterirler!

$$(25)\quad \begin{cases} R_{n+1,1} := R_{n+1,0} + \dfrac{R_{n+1,0} - R_{n,0}}{3} = \dfrac{4B_{n+1} - B_n}{3}, \\ R_{n+1,2} := R_{n+1,1} + \dfrac{R_{n+1,1} - R_{n,1}}{15}, \\ R_{n+1,3} := R_{n+1,2} + \dfrac{R_{n+1,2} - R_{n,2}}{63} \end{cases}$$

*ekstrapolasyonuyla yakınsaklığı hızlandırılabilinir. Bu ekstrapolasyon daha sonra **Lewis Fry Richardson** tarafından 1927'de genelleştirilerek tekrar keşfedilmiştir ve adına **"Richardson Ekstraposyonu"** denmiştir!*

***Romberg**, 14 Şubat 1955'te (13) ile gösterilen (14)'teki T_{2^n} yani (9)'daki B_n'yi keşfettikten sonra, B_n'nin*

$$(26)\quad R_{n+1,k+1} := \frac{4^{k+1}R_{n+1,k} - R_{n,k}}{4^{k+1} - 1}$$

*ekstrapolasyonuyla hızlandırılabiliniceğini farketti! Fakat Richardson ekstrapolasyonunun bu genel iteratif yazımı 1963'te **Jean Pierre Laurent** tarafından verildi ve böylece Romberg İntegrali Yöntemi dünya genişliğinde bilinir oldu!*

Burada başlangıç değeri,

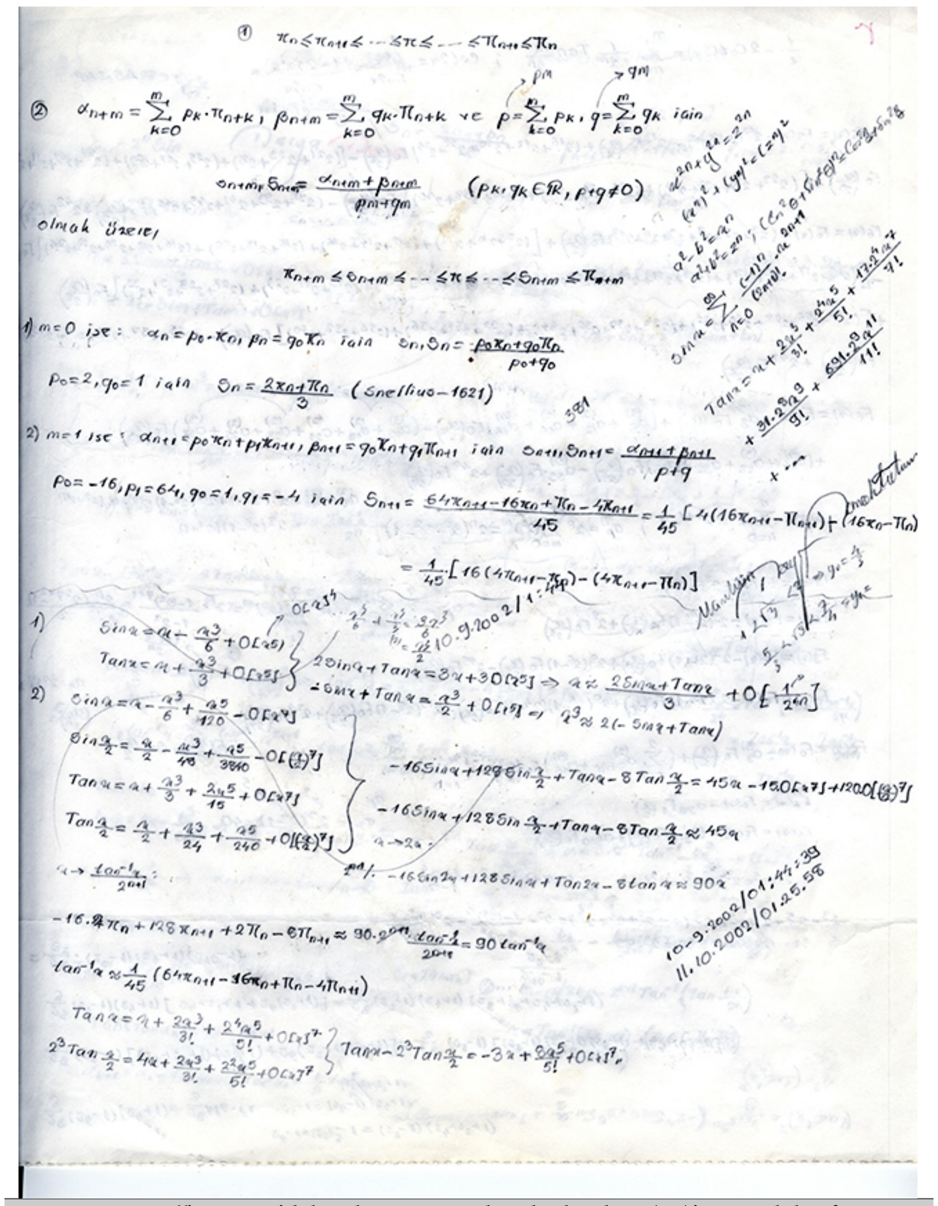
$$(27)\quad R_{n,0} = B_n$$

dir."

Sonra aklıma 2002-2003'te yaptığım ***"E-ATA 1 Algoritmaları"*** geldi ve oradaki özellikle Snellius Ekstrapolasyonu'ndaki gibi I'ya alttan ve üstten ekstrapolasyonlarla yaklaşıp yaklaşamayacağımı ele aldım.

Bunun için şu çıkarımlarıma dikkat ediniz:

"



Resim 2. *Snell*'in 1621'deki algoritmasından hızlı olan (32)'yi nasıl keşfettiğimi gösteren ilk çalışma sayfam. Bu, aynı zamanda 2002'de Snellius Ekstrapolasyonu'nun keşfindeki ilk sayfadır!

Şimdi (12)'ye göre,

$$A_n \overset{(12)}{\cong} 2B_{n+1} - B_n \overset{(27)}{\cong} 2R_{n+1,0} - R_{n,0} \overset{(26)}{\cong} 2R_{n+1,0} + 3R_{n+1,1} - 4R_{n+1,0}$$
$$= 3R_{n+1,1} - 2R_{n+1,0} \overset{(27)}{\cong} 3R_{n+1,1} - 2B_{n+1}$$

eşitliklerinden (ki burada 3. eşitlikte (26)'dan $R_{n+1,1} = \frac{4R_{n+1,0} - R_{n,0}}{3}$ iterasyonu kullanıldı),

$$(28)\quad R_{n+1,1} = \frac{A_n + 2B_{n+1}}{3}$$

*bağıntısı elde edilir. Bu, **Snell** algoritmasının Richardson ekstrapolasyonundaki karşılığıdır!*

*Burada ilk dikkat çeken nokta, A_n ile B_{n+1}'in I'ya yaklaşımlarının eş olduğu ama 2 katsayısının **Snell** algoritmasındakinin tersine üst sınırda olmasıdır!*

Çok ilginçtir, (28)'de (12)'yi kullanırsak,

$$R_{n+1,1} = \frac{A_n + 2B_{n+1}}{3} = \frac{A_n + A_n + B_n}{3} = \frac{2A_n + B_n}{3}$$

eşitliklerinden

$$(29)\quad R_{n+1,1} = \frac{2A_n + B_n}{3}$$

***Snell**'in algoritmasını elde etmiş oluruz ki (28) ile (29) aynı şeydir!*

İkinci olarak, (26)'ya göre $k = 1$ için

$$(30)\quad R_{n+1,2} = \frac{16R_{n+1,1} - R_{n,1}}{15}$$

olduğundan (28)'i kullanırsak,

$$15R_{n+1,2} = 16R_{n+1,1} - R_{n,1} = 16\frac{A_n + 2B_{n+1}}{3} - \frac{A_{n-1} + 2B_n}{3} = \frac{16A_n + 32B_{n+1} - A_{n-1} - 2B_n}{3}$$

eşitliklerinden

$$(31)\quad R_{n+1,2} = \frac{16A_n - A_{n-1} + 32B_{n+1} - 2B_n}{45}$$

bağıntısı elde edilir. Burada A_n ile B_{n+1} ve A_{n-1} ile B_n aynı eş alt aralıklara sahip olduklarından I'ya yaklaşımları eştir.

Buna benzer bir algoritmayı 10.09.2002, 01:44:39'da şu şekilde vermiştim (Bkz. Resim 2): $A_n < \pi < B_n$ *için*

$$(32)\quad R_{n+1,2}(A,B) = \frac{64A_{n+1} - 16A_n + B_n - 4B_{n+1}}{45}.$$

*Eğer **Snell** için geliştirdiğim bu algoritmaya yakından bir göz atarsak,*

$$\frac{64A_{n+1} - 16A_n + B_n - 4B_{n+1}}{45} = \frac{16}{15}.\frac{4A_{n+1} - A_n}{3} - \frac{1}{15}.\frac{4B_{n+1} - B_n}{3}$$
$$= \frac{16R_{n+1,1}(A) - R_{n+1,1}(B)}{15} =: R_{n+1,2}(A,B)$$

ile (30)'daki iterasyonun çift sınır için geçerli olduğunu görürüz!"

İşte bu son çıkarımıma göre yani Richardson ekstrapolasyonunu Snellius ekstrapolasyonundaki gibi yazmaya çalıştığımda şu sonuç çıktı:

*"2.1. **Richardson Ekstrapolasyonu Alt ve Üst Sınırlarla Birlikte Çalışmaz!***

Öncelikle (10)'daki I'nın alt ve üst sınırlarına ait

$$(33)\quad \begin{cases} R_{n+1,k+1}(A) = \dfrac{4^{k+1}R_{n+1,k}(A) - R_{n,k}(A)}{4^{k+1}-1}, \\ R_{n+1,k+1}(B) = \dfrac{4^{k+1}R_{n+1,k}(B) - R_{n,k}(B)}{4^{k+1}-1} \end{cases}$$

ekstrapolasyonik yaklaşıklıkların

$$(34)\quad A_{n+1} < \cdots < R_{n+1,k+1}(A) < I < R_{n+1,k+1}(B) < \cdots < B_{n+1}$$

şeklinde yine aynı eşitsizlikleri gerçeklediklerini (ki böylesine istikrarlı sıralamanın mevcut olduğu konveks $f(x)$ *eğrileri ye da* $f(x)$*'in konveks olan parçaları vardır) ama I'ya yaklaşımlarının kendilerinden çok daha hızlı olduklarını bilmemiz gerekiyor.*

Fakat bu sınırlar Richardson ekstrapolasyonunda birlikte yazılınca işin rengi değişiyor ve (33)'teki tek başlarına ait Richardson ekstrapolasyonlarınkinden bile daha kötü sonuçlar üretiriyorlar!

Bunun için ilkin, (32)'nin genelleştirilmiş şekli olan

$$(35)\quad R_{n+1,k+1}(A,B) = \frac{4^{k+1}R_{n+1,k}(A) - R_{n+1,k}(B)}{4^{k+1}-1}$$

ekstrapolasyonik yaklaşıklıklığını gözönüne alır ve bunu da

$$(36)\quad R_{n+1,k+1}(A,B) = R_{n+1,k}(A) - \frac{R_{n+1,k}(B) - R_{n+1,k}(A)}{4^{k+1}-1}$$

şeklinde açarsak, (34)'e göre $0 < R_{n+1,k}(B) - R_{n+1,k}(A)$ *olduğundan,*

$$(37)\quad R_{n+1,k+1}(A,B) = R_{n+1,k}(A) - \frac{R_{n+1,k}(B) - R_{n+1,k}(A)}{4^{k+1}-1} < R_{n+1,k}(A) < I$$

eşitsizlikleri ortaya çıkar. Yani (35)'teki yaklaşım (33)'ün ilk eşitliğindekine göre daha kötü oluyor!

İkinci olarak, (35)'teki A ile B sınırlarının yerlerini değiştirirsek,

$$(38)\quad R_{n+1,k+1}(B,A) = R_{n+1,k}(B) + \frac{R_{n+1,k}(B) - R_{n+1,k}(A)}{4^{k+1}-1}$$

eşitliğinde yine $0 < R_{n+1,k}(B) - R_{n+1,k}(A)$ *gerçekleştiğinden,*

$$(39)\quad I < R_{n+1,k}(B) < R_{n+1,k+1}(B,A)$$

eşitsizlikleri geçerli olur. Yani (35)'teki yaklaşım da (33)'ün ikinci eşitliğindekine göre daha kötü oluyor!

Şu halde I'nın A_{n+1} *ve* B_{n+1} *alt ve üst sınırlarını Richardson ekstrapolasyonunda nasıl yazarsanız yazın,* $R_{n+1,k+1}(A,B)$ *ve* $R_{n+1,k+1}(B,A)$*'nın yakınsaklık hızlarının (33)'teki tek sınırlı* $R_{n+1,k+1}(A)$ *ve* $R_{n+1,k+1}(B)$*'dekinden daha kötü olduğu görülür ki bu da, başlıktaki sonucu gösterir.*

Bu durumda en fazla şunlar yapılabilinir:

1. *(33) ekstrapolasyonlarında (12) indirgeme bağıntısından yararlanarak çifte sınırlara ait algoritmalar türetmektir. Örneğin, (33)'teki ikinci Richardson ekstrapolasyonundan hareketle* ***Snell****'e ait olan (28) ile (31)'in nasıl bulunduğunu gösterdim. İsteyen bu algoritma türetmeye ([2]) devam edebilir ama bunların yakınsaklık hızları türetildikleri Richardson ekstrapolasyonunkiyle aynı olacaktır!*
2. *(33)'teki Richardson ekstrapolasyononik yaklaşıklıklarının ortalamaları alınıp (33)'tekinden daha iyi yaklaşımlar yapılabilinir. Bunun dışında yapabileceğiniz bir şey yoktur!*
3. *İlk iki maddedekinden farklı olarak, A_{n+1} ve B_{n+1} sınırlarını 2003'te yazdığım E-ATA 1 Algoritmaları'na sokmak. Belki orada Snell ve Huygens ekstrapolasyonlarındaki gibi bir çıkış olabilir!*

Burada şanslı olduğumuz bir nokta var:

*2.2. **Richardson Ekstrapolasyonunda Aritmetik Ortalama***

Eğer (33)'teki ilk Richardson ekstrapolasyonunda $k = 0$ için (12) indirgeme bağıntısını kullanırsak,

$$R_{n+1,1}(A) = \frac{4^{k+1}R_{n+1,0}(A) - R_{n,0}(A)}{4^{k+1}-1} = \frac{4^{k+1}A_{n+1} - A_n}{4^{k+1}-1} = \frac{4^{k+1}(2B_{n+2} - B_{n+1}) - (2B_{n+1} - B_n)}{4^{k+1}-1} = 2.\frac{4^{k+1}B_{n+2} - B_{n+1}}{4^{k+1}-1} - \frac{4^{k+1}B_{n+1} - B_n}{4^{k+1}-1}$$
$$= 2R_{n+2,1}(B) - R_{n+1,1}(B)$$

eşitliklerine göre

$$(40)\quad R_{n+2,1}(B) = \frac{R_{n+1,1}(A) + R_{n+1,1}(B)}{2}$$

ve işleme aynı şekilde devam edildiği takdirde de MEM gereğince ya da kısaca (33)'te taraf tarafa toplamayla

$$(41)\quad R_{n+2,k+1}(B) = \frac{R_{n+1,k+1}(A) + R_{n+1,k+1}(B)}{2}$$

şeklinde (12) indirgeme bağıntısının Richardson ekstrapolasyonunda yani R altında da geçerli olduğu sonucu çıkar!

Sözkonusu bu aritmetik ortalama (34)'teki istikrarlı sıralamaya göre,

$$2I - R_{n+1,k+1}(B) < 2R_{n+2,k+1}(B) - R_{n+1,k+1}(B) = R_{n+1,k+1}(A) < R_{n+1,k+1}(B)$$

ya da doğrudan

$$(42)\quad R_{n+1,k+1}(A) < I < R_{n+2,k+1}(B) < R_{n+1,k+1}(B)$$

eşitsizliklerinden görüldüğü üzere I'nın sağında kalacaktır!"

Richardson ekstrapolasyonunda bir diğer başat uygulama, (29)'daki Snell algoritmasının R altındaki ifadesidir:

*"2.3. **Tekrar Hoş Geldin Snell Amca!***

Fakat 2. maddede en iyi yaklaşıklık olan, yani (33)'tekilerden ve bunların (41)'deki aritmetik ortalamasından daha iyisi,

$$(43)\quad R_{n+1,k+1}(A) < I < \underbrace{\frac{2R_{n+1,k+1}(A) + R_{n+1,k+1}(B)}{3}}_{Snellius-1621} < R_{n+2,k+1}(B) < R_{n+1,k+1}(B)$$

*şeklindeki **Snell** algoritmasıdır!"*

Tarihi bilgilerimize göre ***Snellius (Snelyüz)***, 1621'de "*Cyclometricus*"da (29)'u verdi. Fakat 19 ve 20. yy.'da trapez yöntemi için ekstrapolasyonların önemi anlaşılınca bu formül 1911'de ***Becker*** tarafından tekrar verildi ya da keşfedildi (Bkz. "*Survey of Extrapolation Processes In Numerical Analysis/3. Numerical integration*", p. 442, (28)). Fakat ***Becker***, (29)'un, Snellius algoritması olduğundan habersiz olarak, yalnızca A_n ve B_n'nin Euler-Maclaurin formülüne göre elimine yoluyla çıkardı!

Burada biraz durmamız lazım. Çünkü 1458'de ***Kardinal Nikolas***, 1621'de ***Snellius*** ve 1654'te de ***Huygens*** tarafından π için verilen algoritmalar aynı zamanda ilk ekstrapolasyon formülleridir ve bunlar genelleştirilebilinir. Kaldı ki 2002'de Snellius Ekstrapolasyonu'nu ve 2003'te de Kardinal Nikolas Ekstrapolasyonu'nu ortaya çıkarttım ve ***Huygens***'in algoritmasının genelleştirilmiş şekli de Richardson ekstrapolasyonu olduğuna göre, bunların üçü de Nümerik Analiz'in kurucuları sayılır ya da Nümerik Analiz bunlarla başlar dersek yanlış olmaz. Yani ***Becker***'in yaptığı iş, ***Troçki***'nin, ona hapishane müdürünün bir pasaj okuduğunda, ***Dostoyevski***'yi tanımamasına benzer ki ben, sadece bu tarihi gerçeği hatırlatmak zorunda kaldım! (Bkz. "*Trotsky*")

([2]) Bu tür algoritma türetmeler özellikle 20. yy. başında revaçta idi ama günümüzde bile bu tür türetmelerin hala yapılmaktadır. Yani 20. yy. başındaki hararet hala devam ediyor ve hiç sönmemiş gibi. Ben ise, tüm bu gelişmelerden habersiz olarak, ***"Arşimet'in Metodu MV"*** adlı kitabımdaki çokgensel algoritmaların yakınsaklık hızlarının Snellius algoritmasıyla artırabileceğini görerek 2002'de Snellius algoritmasından hareketle Snellius Ekstrapolasyonu'nu çıkarttım ve 2003'te de işin teorisine girerek Richardson Ekstrapolasyonu'nun da elde edildiği çeşitli ekstrapolasyonlar buldum. Şimdi bu ekstrapolasyonları ***"Romberg İntegrali 2016-2019"*** kitabımın Bölüm 3'ünde genişçe değerlendirmiş durumdayım!

Yine tarihi bilgilerimize göre ***Snellius***, 1621'de (29)'u verirken yalnızca π için vermişti ve bu, f(x)'in Şekil 1'deki gibi konveks olmasına denk düşer (ki burada düzgün n-genlerin konveks olmasına dikkat ediniz). Yani ***Snellius***, bir çemberin içine ve dışına çizilen aynı çokgenlerden içtekinin çevresinin 2 katını alıp dıştakinin çevresiyle toplar ve 3'e bölerdi. Bu ise, (10)'a göre (29)'u gösterir!

Burada son olarak Snellius algoritmasının Huygens algoritmasından geldiğini şöyle görmüştüm:

*"2.4. **Snellius-Huygens Algoritmaları Arasındaki İlişki:** Öncelikle Snellius algoritması ile Huygens algoritması π'de birbirlerinden elde edilemezler ve bunlar yaklaşık halindedirler. Fakat ekstrapolasyona geçtiğimizde (27) tanımı altında (26)'da $k = 0$ için elde edilen Huygens algoritmasından,*

$$(44)\quad R_{n+1,1} := \frac{4R_{n+1,0} - R_{n,0}}{4-1} = \underbrace{\frac{4B_{n+1} - B_n}{3}}_{Huygens-1654} \overset{(12)}{\cong} \frac{4.\overbrace{\frac{A_n + B_n}{2}}^{Aritmetik\ Ortalama} - B_n}{3} = \underbrace{\frac{2A_n + B_n}{3}}_{Snellius-1621}$$

Snellius algoritmasını elde ederiz. Yani π'de birbirine yaklaşık halinde olan Snellius-Huygens algoritmaları ekstrapolasyonda birbirine eşittirler!

*Bu konuda her 2 kitabı da (**Snellius**'un "Cyclometricus"unu ve **Huygens**'in "De Circuli Magnitudine Inventa"sını) enine boyuna inceledim ve **Snellius** ile **Huygens**'in (44)'teki eşitliği, dolayısıyla bu algoritmaların birbirlerinden elde edildiklerine dair herhangi bir kanıt göremedim. Zaten **Huygens**, kendi algoritmasını **Kardinal Nikolas**'ın algoritmasından türetir. Bu arada, **Snellius**'un "Cyclometricus"unun **Huygens**'in eline geçtiğini ve (29)'u tekrar ispatladığına dikkat ediniz. Yani **Huygens**, algoritmasını (44)'teki gibi **Snellius**'un algoritmasından değil **Kardinal Nikolas**'ın algoritmasından türetir!*

*Bu ilişki ekstrapolasyonda da geçerlidir. Yani **Huygens**'in algoritmasından,*

$$(45)\quad \frac{4R_{n+2,k+1}(B) - R_{n+1,k+1}(B)}{3} = \frac{4.\frac{R_{n+1,k+1}(A) + R_{n+1,k+1}(B)}{2} - R_{n+1,k+1}(B)}{3} = \frac{2R_{n+1,k+1}(A) + R_{n+1,k+1}(B)}{3}$$

*şeklinde **Snellius**'un algoritması ya da **Snellius**'un algoritmasından*

$$(46)\quad \frac{2R_{n+1,k+1}(A) + R_{n+1,k+1}(B)}{3} = \frac{2\left(2R_{n+2,k+1}(B) - R_{n+1,k+1}(B)\right) + R_{n+1,k+1}(B)}{3} = \frac{4R_{n+2,k+1}(B) - R_{n+1,k+1}(B)}{3}$$

*şeklinde **Huygens**'in algoritması elde edilebilinmektedir!*

Son olarak, (43)'teki Snellius algoritmasının, (41)'deki aritmetik ortalamadan

$$(47)\quad \frac{2R_{n+1,k+1}(A) + R_{n+1,k+1}(B)}{3} < R_{n+2,k+1}(B) = \frac{R_{n+1,k+1}(A) + R_{n+1,k+1}(B)}{2} \Rightarrow R_{n+1,k+1}(A) < R_{n+1,k+1}(B)$$

ile I'ya daha yakın olduğuna dikkat etmek gerekiyor!"

Derya PAMUKTULUM