

# 4. Piobert-Parmentier Metodu'nun Q'daki Genelleştirilmesi

4.1. Metot 1 (Ole Amble'a Göre Piobert-Parmentier Metodu'nun Q Üzerinde Genişletilmesi):

4.1.1. Ole Amble Metodu-1952,

4.1.2. Ole Amble'in Yaklaşıklıklarının Yakınsaklıklarının Hızlandırılması-2021,

4.1.3. Ole Amble'in Yaklaşıklıklarının Tam Yakınsaması-2021,

4.2. Metot 2 (Ole Amble Metodu'nun Türevleri)-2021,

4.3. Metot 3 (Metot 4'ün Q'daki Karşılığı)-2021.



D. PAMUKTULUM

2022

GÖZDEN GEÇİRİLDİ  
DPT 21:01, 12.7.22

## Önsöz

Aşağıda bu makalenin konusu olan “*Ole Amble Metodu (1952)*” ve “*Romberg Metodu (1955)*”nu diğer kaynaklardan farklı olarak modern bir sunumla anlatırken tarihçesine de değineceğim.

### p-Trapezli Yaklaşıklıklar Metodu (Werner Romberg ve Ole Amble Metotları) ve Tarihçesi

Bu metot “*p-Trapezli Yaklaşıklıklar*” ve “*Ekstrapolasyonlar*” olmak üzere 2 kısımdan oluşur.

1. **p-Trapezli Yaklaşıklıklar: “p-Trapez Yaklaşıklıkları”** ve p-trapez yaklaşıklıklarına *Ole Amble*'a göre  $f(x)$  fonksiyonunun  $x = h$  noktasındaki Taylor açılımıyla eklenen  $f$ 'nin tek mertebeli türevli terimlerden oluşan yaklaşıklıklara da “*p-Trapezli Yaklaşıklıklar*” denir. Burada ikincisi için sadece bir benzetmede bulundum ve bu yaklaşıklıkları ilk terimlerinden dolayı “-I” ekiyle birlikte andım.

Burada söz konusu p-trapez yaklaşıklıklarına ilişkin 16.06.2017, 14:53'te verdiğim 11 maddelik prosedürünün ilk 3 maddesi şöyledir (Bkz. “*Romberg İntegrali Projesi 2016-2018*”, §2. *Romberg Metodu'ndaki Trapez Formüllerinin Genelleştirilmesi*, S. 18-19):

**2.1. p-Trapez Formülü.** Genel olarak  $I = \int_a^b f(x)dx$  integraline trapez metoduyla yaklaşımda  $p, r \in \mathbb{Z}^+$ ,  $q \in \mathbb{N}$  için  $q = 0, 1, \dots, p - 1$  olmak üzere,  $h = \frac{b-a}{r}$  farkı ve  $f_0 = \frac{f(a)+f(b)}{2}$  başlangıç değerine göre  $T_{p,q}(h) =: T_{q,r}(h) =: T_{q,r}$  için

$$(2.1) \quad T_{q,r} = h \sum_{k=0}^{r-1} f_{k+\frac{q}{p}} = h \sum_{k=0}^{r-1} f\left(a + \left(k + \frac{q}{p}\right)h\right)$$

yaklaşıklıkları mevcuttur. *Romberg*, öncekiler ve sonrakiler bu formülü yalnızca  $p = 2$  için kullanıyorlardı ve ben de bu trapez formüllerini (trapez ve orta nokta formülleri) genelleştirerek yeni bir prosedür tanımladım. Bu prosedürün diğer 2 maddesi aşağıdadır.

**2.2. p-Trapez'in Modifiye Formülü.** Eğer (2.1) formülündeki  $f$  içindeki  $p$  paydasından kurtulmak istersek,

$$T_{q,r} = h \sum_{k=0}^{r-1} f\left(a + \left(k + \frac{q}{p}\right)h\right) = h \sum_{k=1}^r f\left(a + (p(k-1) + q)\frac{h}{p}\right)$$

şeklinde göz önüne alır ve burada  $r = p^n$  yerine koyarsak (ki bu değişken dönüşümü *Romberg*'in metodunu deşifre ederken, (1.53) eşitlikleri nedeniyle (1.49)'dan (1.50)'ye ve (1.51)'den (1.52)'ye geçerken de yapmışım)  $h_n = \frac{b-a}{p^n}$  farkına göre  $T_{q,p^n}(h) := T_{q,n}(h) = T_{q,n}$  için

$$(2.2) \quad T_{q,n} = h_n \sum_{k=1}^{p^n} f\left(a + (p(k-1) + q)h_{n+1}\right)$$

şekline dönüşür. Buna (2.1)'deki “*p-Trapez'in Modifiye Formülü*” denir. Çünkü bu formülle  $\Gamma$ 'ya (2.1)'den daha hızlı yakınsanır. Yani (2.1)'de  $[a, b]$  aralığı  $n$  tane eş alt aralığa bölünürken (2.2) ile  $p^n$  tane çok daha küçük eş aralığa bölünür ki bu,  $\Gamma$ 'ya yakınsaklığın artmasına neden olur!

**2.3. Aritmetik Ortalama.** Söz konusu (2.2) yaklaşıklıkları arasında

$$(2.3) \quad T_{0,n+1} = \frac{T_{0,n} + T_{1,n} + \dots + T_{p-1,n}}{p}$$

aritmetik ortalama bağıntısı geçerli olur. Bu bağıntı yalnızca  $p = 2$  için ilk kez 19. yy.'da ortaya konulmuş ve 1955'te de *Romberg* tarafından esaslı bir analize tabi tutulmuştur! (Bkz. “*Werner Romberg: Vereinfachte numerische Integration*”. Eğer PDF yazan yerdeki linke tıklarsanız, *Owren*'in bildirdiğine göre *Romberg*'in (2.3)'teki  $p = 2$  için  $T_{2n} = \frac{T_n + U_n}{2}$  bağıntısını gözlemlediğini, dolayısıyla kullandığını görebilirsiniz. Çünkü bu, *Romberg*'in “*Vereinfachte numerische Integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 28, 1955, p. 30-36, MR 61, 517*” adlı tezinde notasyon nedeniyle günümüzde anlaşılmasa bir haldedir ve *Owren*'in işaret ettiği yer, bu tezin ilk sayfasının sonundaki  $T_2 = \overline{T_1 + U_1} \left( = \frac{T_1 + U_1}{2} \right)$ ,  $T_4 = \overline{T_2 + U_2} \left( = \frac{T_2 + U_2}{2} \right)$ ,  $T_8 = \overline{T_4 + U_4} \left( = \frac{T_4 + U_4}{2} \right)$  bağıntılarıdır)

**İspat.** İlk (2.1)'den

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^{p-1} T_{q,r} &= \sum_{q=0}^{p-1} \left( h \sum_{k=0}^{r-1} f_{k+\frac{q}{p}} \right) = h \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{r-1} f_{k+\frac{q}{p}} = h \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{r-1} f\left(a + \left(k + \frac{q}{p}\right)h\right) = h \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{r-1} f\left(a + (pk + q)\frac{h}{p}\right) = h \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{q=0}^{p-1} f\left(a + (pk + q)\frac{h}{p}\right) = h \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{s=pk}^{pk+p-1} f\left(a + s\frac{h}{p}\right) \\ &= h \sum_{k=0}^{pr-1} f\left(a + k\frac{h}{p}\right) = h \sum_{k=0}^{pr-1} \frac{f_k}{p} = pT_{0,pr} \end{aligned}$$

eşitliklerini göz önüne alırsak,

$$(2.4) \quad T_{0,pr} = \frac{\sum_{q=0}^{p-1} T_{q,r}}{p}$$

bağıntısını elde etmiş oluruz.

İkinci olarak, (2.4)'te  $r = p^n$  değişken dönüşümünü yaparsak,

$$(2.5) \quad T_{0,n+1} = \frac{\sum_{q=0}^{p-1} T_{q,n}}{p}$$

aritmetik ortalama bağıntısını yani (2.3)'ü elde etmiş oluruz!

**Not.** Yukarıdaki keşif tarihinden (16.06.2017, 14:53) anlaşılacağı üzere p-trapez yaklaşıklıklarına ilişkin 11 maddelik prosedürün tamamını **RİK 5**'te yayımlayacağım. Çünkü "**Romberg İntegrali Metodu**"nun tarihi seyri nedeniyle **Romberg** ve **Ole Amble**'in tezlerini, dolayısıyla "**Piobert-Parmentier Metodu**"na ait tezleri incelemem ve çıkardığım sonuçları makaleler halinde web sitemde yayımlamam gerekiyordu. Yani bu tarihi tezler nedeniyle kendi çıkarımlarıma geçemedim bile!

Burada ikinci olarak 2-trapezli yaklaşıklıklar ilk kez 1952'de **Ole Amble** tarafından "*A set of formulas for numerical integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 25, 1952, p. 38-41. MR 14, 907*" tezinde verilmiştir. Onun bu tezindeki yaklaşıklıkları (4.43)'te verdim. Ama inanın ki bu yaklaşıklıkları **Ole Amble**'in tezinden bulmadım (ki bu tezi 11.10.2021, 15:28'de **Sven Ström**'den almıştım. Bkz. "*Nihayet Ole Amble'in tezini bulduk!*"); modern bir metotla elde ettiğim (4.43)'teki yaklaşıklıkları **Ole Amble**'in (4.3)'teki örneğine göre uyguladıktan ve tezdeki sonuçları Tablo 4.1'de teker teker elde ettikten sonra doğru bulduğumu anladım. Çünkü **Ole Amble**, tezinde sadece (4.4)'teki yaklaşıklığı açık bir şekilde vermiş ve diğerlerini bir formülasyona bağlayarak kapalı olarak vermişti. Şimdi bunun için Tablo 4.1'e dönersek tablonun ilk sütunundaki trapezli yaklaşıklıkları 20.10.2021, 06:45:20'de ve 3. sütundaki orta noktalı yaklaşıkları 22.10.2021, 05:07:46'de bulduğum ama Not 4.1'deki **Ole Amble**'in formülasyonunu ise 27.11.2021, 23:11:35'te keşfettiğim geçer. Kaldı ki bu formülasyonu makalemi bitirdikten sonra bulmuştum. Yani beni **Ole Amble**'a bağlayan şey, o veriler idi. Çünkü ben yeni sürümdüm, o ise eski sürüm ve bizi birbirimize bağlayan tek şey, III. sayfada da mevcut olan Tablo 4.1'deki **Ole Amble**'in 2. ve 4. sütunlarındaki verileriydi. Fakat bu tablodaki son 2 sütundaki değerleri karşılaştırırsanız **Ole Amble**'inkilerin farklı olduklarını görürsünüz. Bu sonuç işimi bir kat daha zorlaştırdı ve araştırmalarıma göre **Ole Amble**'in orta noktalı yaklaşıklıkları hatalı bir şekilde bulmuş olduğunu anladım ve onları düzelttim. **Romberg** bunların hatalı olduğunu görmüş olmalı, çünkü bunları düzeltirken onun izinden gidiyor ve yeni çıkarımlarda bulunuyordum. Örneğin **Ole Amble**'in yaklaşıklıklarının yakınsaklıklarını hızlandırırken (4.44)'teki trapezli ve (4.45)'teki orta noktalı yaklaşıklıkları bu şekilde bulmuştum. Ama **Ole Amble**'in (4.43)'teki yaklaşıklıklarının tam yakınsamasına ilişkin (4.46)'daki yaklaşıklıklar şapka çıkarılacak cinsten bir çıkarımımıdır. Neden?

#### 4. Friedrich Wilhelm İle Tanıştığım Gün: Büyük Piramit'teki "Nadlerberg" Yazıtlarını Araştırırken

Burada söz konusu **Ole Amble**'in (4.43)'teki yaklaşıklıklarının nasıl bulunduğu dair detayları METOT 2'de verdim. Ama bu metoda geçmeden önce Prusya Kralı **4. Friedrich Wilhelm**'in Mısır Seferi'ndeki (1842-1845) son kafiide yer alan ve kafiide başkanı olduğu anlaşılan **Tcharikoff Nadlerberg**'in Büyük Piramit'te bıraktığı yazıtlara ilişkin yaklaşık 2.5 sayfalık bir makale döşendim. Ben bu yazıtları biliyordum ama söz konusu Prusya Kralı **4. Friedrich Wilhelm** olunca hemen Almanlara bir sürpriz yapmaya karar verdim, ancak 04.02.1998 tarihli ARD kanalındaki **Dieter Bohlen**'in moderatör **Alfred Biölek** ile yaptığı röportajı görünce tadım tuzum kaçtı (Bkz. "*Dieter Bohlen Interview ARD Boulevard Bio*" ve "*Mozart and the King of Prussia*"). Çünkü gençliğinde solcu olan **Bohlen**, Modern Talking grubuyla aldığı ödüller ve kayıt satışlarıyla klasik bestecileri (**Bach, Beethoven, Brahms, Mozart**) yerden yere vuruyordu. Örneğin kendisine **Mozart** sorulduğunda "o şimdi kayıt dışı!" diyerek küçümsüyordu. Ancak **2. Friedrich Wilhelm** (**4. Friedrich Wilhelm**'in büyükbabası) **Bohlen**'in küçümsediği bestecilerle bizzat ilgileniyor, **Mozart**'a eserler yazdırıyordu (bkz. "*Mozart'in Prusya Quartetleri*") ve kendisi de eserler yazıyordu (Bkz. "*Mozart and the King of Prussia*"). **4. Friedrich Wilhelm** ise besteci **Felix Mendelssohn** da dahil olmak üzere birçok büyük Alman ressamın koruyuculuğunu yapıyordu.

Anladığım kadarıyla **Bohlen**, eski bestecileri eleştirirken Yahuda İncili'ndeki 2. Sahnedeki "*Havariler Tapınağı Gördü ve Onu Tartıştı*"daki gibi her şeyi sayı olarak görüyor ve Mabettekiler gibi her şeyi belli bir sayıya tamamlamaya çalışıyordu.

Şimdi hep birlikte o parçaya bir bakalım!

#### Havariler Mabedi Gördü ve Onu Tartıştı!

Onlar şöyle dedi: "İçinde büyük bir sunağı olan kocaman bir ev gördük. İçinde iki adam -hepsi de Rahiplerdi- ve bir isim vardı. Rahipler sunuları alıncaya kadar kalabalık bir grup sunakta bekliyordu. Biz beklemeye devam ettik".

**İsa** onlara "Rahipler (din adamları) nasıl görünüyordu, ne gibi idi?" dedi.

Onlar da şöyle yanıt verdi: "Bazıları... 2 hafta; bazıları kendi çocuklarını kurban ediyor, bazıları boğazlama işiyle ilgileniyor; bazıları bir sürü günah işliyor ve kanunsuz iş yapıyordu. Sunağın önünde duranlar senin adını çağırıyordu. Onların noksanlığının ortaya çıkardığı tüm bu eylemler kurban sayısı ile tamamlanmaya çalışılıyordu. (...)"

Onlar bunu söyledikten sonra sessizliğe gömüldü. Çünkü üzülmüşlerdi.

Ama **Hz. İsa**, Mabetteki Rahiplerin bu işi yapmakla kendi Tanrılarını mutlu etmeye çalıştıklarını, dolayısıyla kendisini tanıyamadıklarını belirtir. Başlangıçta zaten "sizin aranızdaki hiçbir nesil beni tanıyamayacak!" demişti. Bu sırrı bir tek **Yahuda (Judas)**'ya anlatıyor. Özetle bu örnekte gördüğümüz üzere günümüzde de bir eserin kalitesinden çok sayısına önem verilmekte ve eser bu şekilde tanıtılmaktadır. Yani **Bohlen** bu şekilde düşünmekle hata yapıyor.

METOT 2'de **Ole Amble**'in metodunu tüm yönleriyle modern olarak ele aldım. Çünkü **Ole Amble** (4.43)'teki yaklaşıklıkların nasıl bulunduğunu belli formülasyonlara göre bir kalıp içinde ele alıyor, dolayısıyla bu formülasyonların arka planını anlatmıyordu. Bunun için 2-Trapez formülünü kullandım ve **Ole Amble**'in (4.43)'teki yaklaşıklıklarının bulunmasını (4.57)&(4.58)'e bıraktım. Bu arada Not 4.6'da **Ole Amble**'in (4.3)'teki örneğinden hareketle (4.60)'ta  $\pi$ 'ye bağlı yakınsak seriler verdim ve bunlar inanılmaz bir hızla 1'e yakınsalar. Fakat METOT 2'de **Ole Amble**'in (4.43)'teki yaklaşıklıklarına yakınsaklık bakımından eşdeğer yaklaşıklıkları (4.91)'de verdim. Bunun için merkezi fark formüllerindeki katsayılar yerine  $\delta$  operatörüne göre Binom katsayılarını kullandım. Bu operatörü ilkin 2. Yol'da anlattığım gibi buldum, sonra bunun matematiksel açıklamasını 2. Yol'un üzerinde verdim. Şunu gördüm:  $\delta$  operatörüne göre (4.76)'daki  $A_m(h)$  ve  $B_m(h)$  ile bunların  $h$  kuvvetlerine göre seriye açıp (4.78)'dekilerle toplayıp  $h^2, h^4, h^6, h^8, \dots$ 'e ait katsayıları teker teker sıfırladığım zaman (4.61)'e göre (4.91)'deki yaklaşıklıkları buldum ve **Ole Amble**'in (4.3)'teki örneğine (4.46) ve (4.91)'deki yaklaşıklıklarını uyguladığım zaman da bunların yeterince büyük  $q$  değerleri için hemen hemen aynı sonuçları ya da  $q \rightarrow \infty$  için aynı sonuçları ürettiklerini, dolayısıyla katsayıların (merkezi fark formüllerindeki katsayılar ve Binom katsayıları) bir anlamının olmadığını gördüm. O halde METOT 2'ye istediğimiz katsayıları yazabilir ve yine aynı sonuçları elde edebiliriz. Buna göre  $I$ 'ya simetrik katsayıları değiştirmek suretiyle METOT 2'den sonsuz tane yaklaşımda bulunabiliriz. Bunun bir örneğini burada Binom katsayılarına göre METOT 2'de gösterdim. Demek ki **Ole Amble** merkezi fark formüllerinin peşinde boşuna koşmuş. Çünkü (4.18)&(4.19)'daki Binom katsayılı merkezi fark formüllerini bu iş için ayarlamak bize bir 2. metodu veriyordu ve simetrik katsayıları değiştirmek suretiyle bu metodun sonsuza uzanacağını gösteriyordu.

Şimdi bu söylediğim şeylerin doğru olup olmadığını bu 2 yöntemden elde ettiğim yaklaşıklıkları **Ole Amble**'in (4.3)'teki örneğine uyguladıktan sonra elde ettiğim aşağıdaki tablolara bakıp açıkça görebilirsiniz:

## Önsöz

Tablo 4.1: Ole Amble'in Yaklaşıklıkları, 1952			
Orijinalde	Ole Amble	Orijinalde	Ole Amble
$T_1 = 0.99428188829215795204$	0,9943	$T_0 = 1.0028615075117907939$	1,0053
$T_3 = 0.99992844392204131719$	0,999928	$T_2 = 1.0000138677438771599$	1,000014
$T_5 = 0.99999899121842171511$	0,99999899	$T_4 = 1.0000002392888945830$	1,00000013
$T_7 = 0.99999998501409023271$	0,999999985	$T_6 = 1.0000000038477741619$	1,000000013
$T_9 = 0.9999999977069185695$	-	$T_8 = 1.000000000614363609$	-
Tablo 4.3: Yakınsaklıkları Hızlandırılmış Ole Amble Yaklaşıklıkları, 2021			
$T_1 = 0,99428188829215795204$		$T_0 = 1,0028615075117907939$	
$T_3 = 0,99992844392204131719$		$T_2 = 1,0000138677438771599$	
$T_5 = 0,99999990565075904155$		$T_4 = 1,00000018189499133$	
$T_7 = 1,0000000000863428856$		$T_6 = 1,0000000002111056391$	
$T_9 = 0,9999999999989653000$		$T_8 = 1,00000000000003375993$	
Tablo 4.4: Tam Ole Amble'in Metodundaki Yaklaşıklıklar, 2021			
$T_1 = 0.99428188829215795204$		$T_0 = 1.0028615075117907939$	
$T_3 = 0.99999340119831826228$		$T_2 = 1.0000057271656654506$	
$T_5 = 0.99999998930731148314$		$T_4 = 1.0000000103384504451$	
$T_7 = 0.9999999998171006968$		$T_6 = 1.0000000001813609791$	
$T_9 = 0.9999999999996836175$		$T_8 = 1.00000000000003157058$	
Tablo 4.5: Metot 2, 2021			
$T_1 = 0.99428188829215795204$		$T_0 = 1.0028615075117907939$	
$T_3 = 0.99999340119831826228$		$T_2 = 1.0000057271656654506$	
$T_5 = 0.99999998927975159289$		$T_4 = 1.0000000103444292205$	
$T_7 = 0.9999999998168780033$		$T_6 = 1.0000000001814149138$	
$T_9 = 0.9999999999996834745$		$T_8 = 1.00000000000003157413$	

Tablo 4.1, 4.3, 4.4 ve 4.5'teki çıktılar.

Burada özellikle son 2 tabloya bakarsanız yukarıda söylediklerimin doğru olduğunu görebilirsiniz. Çünkü bu son 2 tablodaki çıktılar için  $q = 5$  aldım ve eğer  $q \rightarrow \infty$  alırsanız tüm çıktılardaki basamaklar aynı olacaktır, dolayısıyla **Ole Amble**'in merkezi fark formüllerine göre 3. tablodaki yaklaşıklıklar ile Binom katsayılarına göre bulduğum 4. tablodaki yaklaşıklıklar aynı sonuçları üreteceklerdir!

METOT 3, C'deki "[Genelleştirilmiş Piobert-Parmentier Metodu](#)"nun Q'daki karşılığıdır. Yani her 2 metodu da eş zamanlı olarak kullanıyordum. Yine bu metodu burada tüm yönleriyle ele aldım ama q'lu uygulamalarını Not 4.8'deki Mathematica dosyalarında yaptım. Uygulamalara geçildiğinde ise METOT 3'ün diğer metotlardan üstün olduğu görüldü. Bu sonuçla **Ole Amble**'in 2. kez merkezi fark formüllerinin peşinde boşuna koştuğu sonucu çıkar. Yani **Ole Amble**, sırf METOT 3'ü verseymiş daha iyi olurmuş!

Şimdi tüm bu metotları birlikte değerlendirirsek şu sonuçlar çıkar:

1. Yakınsaklığı en iyi metot: METOT 4 (Bkz. "[Genelleştirilmiş Piobert-Parmentier Metodu](#)"),
2. En hızlı metot: METOT 3.

Bu sonuçlara göre METOT 1 (**Ole Amble**'in Metodu) ve METOT 2 yukarıdaki metotların dışında kalmaktadır.

2. **Ekstrapolasyonlar:** Batı tarihçesine göre 2-Trapezli yaklaşıklıklar için kullanılan ekstrapolasyon "**Richardson Ekstrapolasyonu**"dur (Bkz. "[The Birth of Numerical Analysis](#)"deki "[Some pioneers of extrapolation methods](#)", "[Extrapolation Methods: Theory and Practice](#)", "[Extrapolation and Rational Approximation: The Works of Main Contributors](#)", "[Numerical Analysis: Historical Developments in the 20'th Century](#)"deki "[2.1. Richardson's process](#)" vb. Bu kaynaklar **Brezinski**'ye aittir). Fakat gerçek tarihçeyi araştırdığınız zaman bu ekstrapolasyonu ilk kez 1927'de, ki 1910'daki teorikti, **Lewis Fry Richardson** değil 1710'da, muhtemelen 1695'ten önce, Japon matematikçi **Takebe Katahiro**'nun keşfetmiş olduğunu öğrenirseniz. O, bu ekstrapolasyonu ustası **Seki Kowa**'nın kuralından, ki Batılılar ve **Brezinski**'nin "[Aitken Kuralı \(Aitken's process\)](#)" dediği algoritma, üretti. Tabii ki bu bilgileri Japon Prensesi **Akiko Mikasa** adına **Takebe**'nin el yazmalarını inceleyen ve neşreden **Naoki Osada**'ya borçluyuz. Bu konuyla ilgili ve Romberg Metodu'na ilişkin tarihçeyi [RİK 3](#)'teki sayfa 21-23'teki "[2.1. Richardson Ekstrapolasyonu](#)" ve [RİK 4](#)'teki sayfa 25-26'daki "[2.1. Richardson Ekstrapolasyonu](#)"ndan alabilirsiniz. Bu parçalardaki Romberg Metodu'na ilişkin tarihçeyi **Brezinski** iyi toplamış ama Batı gözlüğüyle değerlendirmiştir. Çünkü bu son gelişme onun kitaplarında, dolayısıyla Batı'daki hiçbir kaynaktan yer almaz!

2-Trapezli yaklaşıklıklar için son bir gelişme [RİK 3](#)'teki 28. sayfanın sonunda ve [RİK 4](#)'teki 33. sayfanın başında verdiğim " **$h_{mn}^{2k}$ -ekstrapolasyonu**" ile oldu. Bunu 22/7.2002'deki "[Arşimet'in Metodu M.V.](#)" adlı albüm çalışmalarımdaki çokgenel algoritmaların yakınsaklıklarını hızlandırmak için 14.05.2003'te bulmuştum ama ilk kez 10.02.2020, 02:02:10'da [RİK 3](#)'te yayımladım. İşte bu son ekstrapolasyonda  $m = 1$  için Richardson ekstrapolasyonu elde edilmektedir. Bu, bir bardakta koparılan fırtınanın sonucu idi. Burada bir diğer dikkat çeken nokta şudur: Richardson ekstrapolasyonunu başlatan ilk algoritma [RİK 3](#) ve [RİK 4](#)'teki (2.23)'te **Huygens** tarafından 1654'de verilmişti ve ondan sonra bu ilk algoritmanın ekstrapolasyona giden süreçteki gelişmeler hep  $\pi$  sayısı üzerinde yapılan hesaplamaların sonucunda ortaya çıkmıştı. Yani ben de  $h_{mn}^{2k}$ -ekstrapolasyonunu çokgenel algoritmaların yani  $\pi$  sayısı üzerinde yaptığım hesaplamalar için keşfetmiş ve kullanıyordum!

### Büyük Piramit'teki Mirasımız: $\pi$

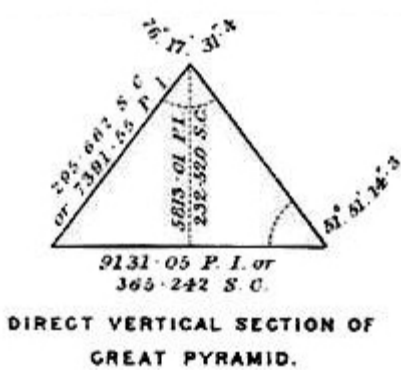
Ama hiç kimse Kraliyet astronomu **Charles Piazzi Smyth** kadar gözünü karartmamıştı. Çünkü o,  $\pi$ 'yi taştan yani Büyük Piramit'ten okumaya çalışıyordu ve [PLATE XVII](#)'daki ölçümlerine göre (PI: Piramit İnçi)

$$\pi \cong \frac{2 \times 9131.05 \text{ PI}}{5813.01 \text{ PI}} = 3.1415910173903020982244998718392 \dots$$

değerini buldu ama kaplama taşında (ki **Vyse** taşı olduğu açıktır)

$$\pi \cong 4 \times \text{Cot}51^\circ 51' 14.3'' = 3.1415928557030945801499104868365 \dots$$

değerinin olması gerektiğine inandı!



## Önsöz

Ama o bu sonuçlarla yetinmedi; piramitte

$$\pi = \begin{cases} 3.1415926535 + \dots \\ 10^{0.4971498726 + \dots} \end{cases}$$

değerinin olması gerektiğini ileri sürdü. Buna **“Tanrının Taştaki Parmak İzi (The Fingerprint of God in a Stone)”** diyordu!

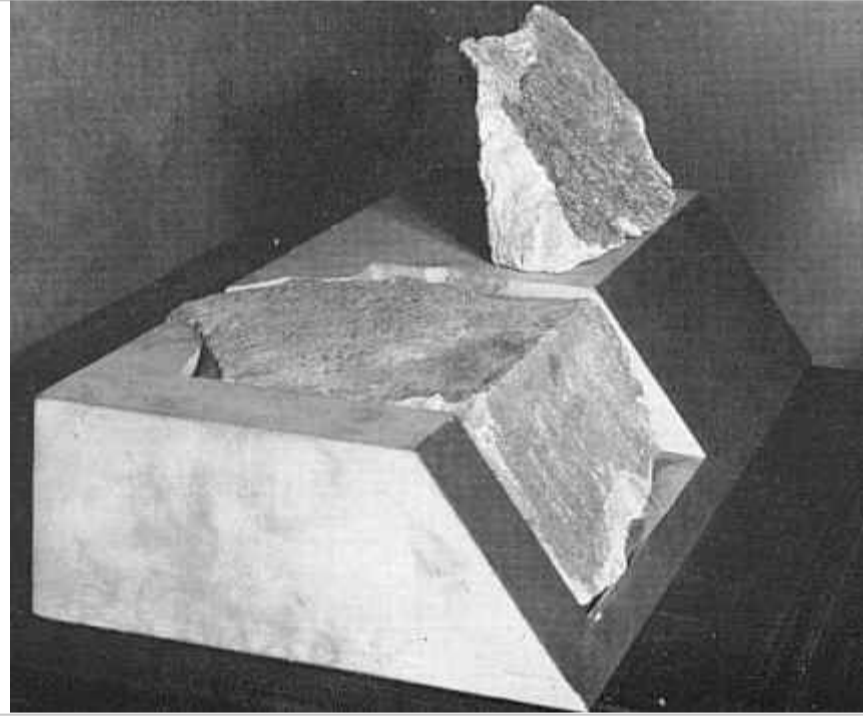
Konuyla yakından ilgileniyorum ve 2004'te Büyük Piramit'e gelişi amacım **Smyth**'inkiyle aynıydı (ki ben piramitteki aşağıdaki  $\pi$ 'yi **Erich von Däniken**'in **“Tanrıların Arabaları”** adlı kitabının 73. sayfasından öğrenmiştim, **Smyth**'tan değil. **Däniken** ise **Smyth**'ın **“Büyük Piramit'teki Mirasımız (Our Inheritance in the Great Pyramid)”** adlı kitabından öğrenmiş. Yani bu öğrenme işi silsile yoluyla gidiyor. Ama bu pek o kadar da öyle gözükmez, çünkü **Däniken**'in bu kitabı doğum yılında, 1968'de basılmış. Ancak kitap baskı üzerine baskı yapınca günümüze kadar ulaşabilmiş). 2004'ten bu yana yaptığım araştırmalar hep olumlu yönde ilerlemiştir, dolayısıyla piramitte böyle  $\pi$  değerinin olmadığını rahatlıkla söyleyebilirim. Çünkü Büyük Piramit'in kaplama taşlarında yapılan ölçümlere göre seked  $5\frac{1}{2}$ 'dir ve buradan  $\pi$  için ( $\theta$  piramitin eğim açısıdır)

$$7\text{Cot}\theta \cong \text{Seked}\theta = 5\frac{1}{2} \Rightarrow \pi = 4\text{Cot}\theta \cong 3\frac{1}{7}$$

sonucu elde edilir. **Petrie** bu sonuca inanmaz. Çünkü piramitteki başat teori, piramitin tabanının 440 RC ve yüksekliğinin 280 RC olduğu idi ve ölçümlerine göre 440 RC'yi hiçbir tabanda yakalayamadı (Bkz. **“Chap. 21. Theories Compared with Facts”**). Buna ek olarak piramitin eğim açısı için  $\theta = 51^\circ 52' \pm 2'$  sonucunu önerdi. Ama yukarıdaki gerçek  $\theta = 51^\circ 50'34''$  ile önerilen bu eğim açısı içindedir.

### Kaplama Taşlarından Seked Okumak!

Bu konuda size 2 başat örnek verebilirim. Birisi şu taştır:



Metal bir kutu içine konulmuş piramitten alınma bir kaplama taşı. Bu kaplama taşının eğimli yüzeyinde yapılan okuma  $51^\circ 51'$  dir, [Introduction and Overview of The Great Pyramid of Giza](#).

Dikkat ediniz bu taştaki eğim açısı  $51^\circ 51'$  olarak okunmuş ama saniye mertebesinde bir sonuç bildirilmemiştir. Öyle görünüyor ki ölçüyü maksimumda okumuşlar ve onu yuvarlatarak  $51^\circ 51'$  demişler. Yani bu taşın eğim açısı  $51^\circ 51'$  den küçüktür, dolayısıyla büyük bir olasılıkla  $\theta = 51^\circ 50'34''$  değeri ya da bunun biraz üzerinde bir değer var. Ama makinedeki ölçüm hassasiyeti dakika mertebesinde olduğundan bu değeri okuyamamışlar.

Diğeri **“Stone from Great Pyramid to go on display in Edinburg”** haberinde geçen taştır. Bu taş **Smyth** hasta olduğundan piramitte ek ölçümler yapmasını istediği demiryolu mühendisi **Wayman Dixon** tarafından 1872'de Edinburg'a getirilen taştır. Öyle yağma yok, bu taşın **eğim yüzeyi** iyi görünüyor ve **Smyth**'ın **torunları** bu taşı mükemmel bir şekilde analiz ettikten sonra sekedi  $5\frac{1}{2}$  buldular. Peki **Petrie**, neden  $\theta = 51^\circ 52' \pm 2'$  sonucunu vermişti? İşte o da sizin yanıtlanmanız gereken soru! Acaba diyorum, inancın bu çalışmada bir rolü var mıydı? Çünkü **Smyth** tam bir Hristiyan, daha doğrusu **“Tanrı Adamı (Theofilos)”** iken **Petrie** tam tersiydi!

Şimdi Khafre piramitinde çalışıyorum. Eğer Khafre piramitinden sonra Menkaure piramitindeki tasarım çalışmalarını da tamamlarsam Büyük Piramit'e geçeceğim. Şu anda Büyük Piramit'in ana ölçülerine ait veriler elimde var ama bunlar nereden geldi diye sorarsınız müşkül duruma düşerim (Y.N. Elimdeki verilere göre **J.H. Cole**'ün 1925'te mükemmel ölçümler yaptığını söyleyebilirim. Bkz. **“Determination of the Exact Size and Orientation of the Great Pyramid of Giza”**. Bu kitapçıkta en dikkat çekici yer, **J.H. Cole**'ün 1880'deki **Petrie**'nin ölçümlerini 1925'teki yeni ölçümleriyle (New Determination) karşılaştırıp sildiği 7. sayfadaki ilk tablodur. Günümüzde bu çalışmayı **Glen Dash** ve ekibi yapıyor. Bkz. **“New Angles on the Great Pyramid”**. Bu çalışmanın tanıtımını AERA'da [surada](#) bulabilirsiniz). En iyisi zamanı geldiğinde Büyük Piramit'in iç tasarımına ait planları web sitemde yayımlamam olacak. Aynı şekilde,  $h_{mn}^{2k}$ -ekstrapolasyonunun p-trapez yaklaşıklıklarına nasıl uygulandığını RİK 5 ve sonraki makalelerinde göstereceğim!

Özetle yukarıda **Romberg**'in Metodu ve **Ole Amble**'in Metodu'nun yani 2-Trapezli Yaklaşıklıklar Metodu'nun ne olduğunu anlattım ve tarihçesine ilişkin yeterince kaynak verdim. Ama bu metotların bilgisayarların ortaya çıkması ve gelişmesine paralel olarak verilmiş olduğuna dair kaynaklar bir şey söylemez. Eğer birkaç gün önce **Kemal Sunal**'ın **“Sevimli Hırsız”** filmi seyretmeseydim ben de unutacaktım!

Bunun için aşağıya **Mark J.P. Wolf**'ün **“Video Games Around the World”** adlı kitabının 451-452. sayfalarında geçen **Ole Amble** ile ilgili, dolayısıyla İskandinav ülkelerinde bilgisayarların ortaya çıkışıyla ilgili aydınlatıcı bir parça ele aldım. Bu parçaya göre **Ole Amble**'in sadece Nümerik Analiz'de çalışmadığını, bilişim alanında da çalıştığını göreceksiniz ve şaşıracaksınız!



## İskandinavya'daki Erken Bilgisayar Tarihi

Bilgisayarlar 1950'lerde yeni bir icattı. İlk İsveç bilgisayarı BARK (Binär Automatisk Relä-Kalkylator), 1950'dendi ve İsveçliler 1953'te ikinci bilgisayarlarına, BESK 2'ye (Binär Elektronisk Sekvens-Kalkylator) sahipti. Norveç'in 1954'te NUSSE (Norsk Universell Siffermaskin, Sekvensstyr, Elektronisk) adlı bilgisayarı vardı. Danimarka, DASK 4'e (Dansk Arismetisk Sekvens Kalkulator) sahip olmak için 1958'e kadar beklemek zorunda kaldı ve İzlanda'nın ilk bilgisayarı olan bir IBM 1620 model II oldu. 1964'te İzlanda Kalkınma Bankası tarafından İzlanda Üniversitesi'ne bankanın 10. yıldönümünü kutlamak için bağışlandı (Magnússon 2003). Söylemeye gerek yok, bu bilgisayarların hiçbirinin İskandinav video oyunu tasarımı üzerinde gerçekten bir etkisi olmadı. Ama öyle olsa bile, bilgisayar biliminin yeni alanı ve programcılarının eğitimi, daha sonra İskandinavya'da video oyunu tasarımı için faydalı olacağı ortaya çıktı.

İskandinav bilgisayar tarihinin ilk günlerinde, bilgisayarlı oyunların hiçbiri gerçek bir ticari başarıya dönüşmedi. İskandinavya'da bilgisayarlı bir oyunun ilk belgelenmiş halka açık gösterimi, 1954'te Norveç'in Blindern kentinde, yeni icat edilen Norveçli bilgisayar NUSSE'deydi; bu isim, Doçent **Ole Amble (1913-1996)** tarafından önerildi. 3 yıl önce, matematiksel strateji oyunu *Nim*, NIMROD bilgisayarında Britanya Yaz Festivali'nde sunuldu ve **Ole Amble**, *Nim*'i NUSSE için programlama görevini üstlendi. Bir bahar gününde, NUSSE bir Açık Üniversite etkinliği olarak sergilendi. NUSSE, *Nim* oyunu ne zaman oynansa, neredeyse her zaman kazanırdı ve bu durumda ekranda **"Yaşasın!"** yazardı; rakibin kazandığı nadir durumlarda da **"Bravo!"**. Makine ezici bir çoğunlukla olumlu karşılandı ve bilgisayarların halk tarafından kabulünü sağlama görevi başarılı oldu (Haraldsen 1999). 2 yıl sonra, 1956'da İsveçliler, *Nim*'i yeni geliştirilen bilgisayarları SMIL'de (Siffer-Maskinen I Lund) sundular (Sandquist 2010).



Göran Sundqvist, SAAB D2'de SANK video oyunu için navigasyon hesaplarını yaparken.

1960 yılında **Göran K. Sundqvist (1937)**, İsveç Hava Kuvvetleri (Flygvapnet) subaylarını etkilemek için bir füze oyunu geliştirdi. Oyun, SAAB D2 bilgisayarı, nam-ı diğer SANK (SAAB's Automatiska Navigerings-Kalkylator) için tasarlandı (bakınız yukarıdaki resme). Oyuncu, oyunda bir füze fırlatır ve rotayı bir osiloskopta takip ederdi. Füze hedefi vurduğunda, simüle edilmiş bir patlama meydana gelirdi. Bu hareketli grafiklere sahip ilk İskandinav video oyunuydu (Ernkvist 2007; Sandquist 2010).

1960'ların başında, Danimarkalı şair ve tasarımcı **Piet Hein (1905-1996)**, Kopenhag'da **Norbert Wiener (1894-1964)** ile bir araya geldi ve ona *Nim* oyununun yardımcı bir gelişimi olan *Nimbi* adlı bir oyun fikrini anlattı. Oyundan etkilenen **Norbert Wiener**, Danimarkalı bilişimcilerle iletişim kurmasına yardımcı oldu ve yeni işe alınan programcı **Søren Lauesen (1942 doğumlu)** ile birlikte **Piet Hein**, GIER (Geodætisk Instituts Elektroniske Regnemaskine) bilgisayarında *Nimbi*'nin bilgisayarlı bir versiyonunu yarattı. Ancak oyun 1963'te oynanmaya hazırды ancak hiçbir zaman ticari bir başarıya dönüşmedi (Jørgensen 2009).

Atari'den orijinal PONG'nin (1972) İskandinavya'ya gelip gelmediği belirsizdir, ancak *Winner (1973)*, *Hockey TV (1973)* ve *Paddle Battle (1973)* gibi benzer arcade oyunları İsveç'te bulundu. Daha sonra *Datsun 280 Zzzap (1976)*, *Sprint 2 (1976)*, *Boot Hill (1977)*, *Canyon Bomber (1977)* ve *Circus (1977)* gibi Atari oyunları Danimarka ve İsveç'te daha da yaygınlaştı (Bkz. ["Mark J.P. Wolf: Video Games Around the World"](#), S. 451-452).

Bu parçadan anlaşıldığı üzere *NIM* adlı oyunun dijital versiyonunu ilk yazan kişi **Ole Amble**'dir (bkz. [Resim 1](#)) ve sonra bu oyun geliştirilerek *NIMBI*'ye dönüştürülmüştür. Ne ilginçtir ki bu makalede verdiğim 3 metot da birer oyun gibidirler. Yani makalede verdiğim bu metotlar eğer size sıkıcı geliyorsa o zaman bunlara ait Mathematica dosyalarında istediğiniz fonksiyonu ve aralık değerleri ve ekstrapolasyon için istediğiniz m değerini girerek oyun gibi kullanabilirsiniz.

Son bir söz olarak bu son makalemle **Ole Amble**'a ve tabii ki Norveçlilere veda ediyoruz. Çünkü **Ole Amble**'in metoduna ilişkin tüm metotları tükettim ve bundan sonra kayda değer bir çalışmanın kalmadığını belirtmem gerekiyor. Şunu merak edenler çıkabilir: **Romberg** ve **Ole Amble**'in tezlerine ilişkin ne Almanya'dan ne Norveç'ten ne de başka bir ülkeden herhangi bir yardım almadım. Sadece bu tezleri NTNU'daki Prof. **Brynjulf Owren**'den aldım, o kadar. Yani bunun dışında hiçbir katkıları olmadı. Ama **Owren**'e, bu tezlerin elime geçmesini sağladığı için teşekkür etmeyi bir kez daha borç bilirim (ki **Ole Amble**'in tezi için bayağı uğraştık). Ayrıca başta Norveç Kraliyet ailesi (ki şu sıralarda Norveç Kralı **HARALD V**'in korona virüs testinin pozitif çıkması nedeniyle [hastalık izninin uzatıldığı](#)) biliyor ve kendisine acil şifalar diliyorum) olmak üzere kendisini modern **Knut Hamsun**'a benzettiğim şair kardeşim **Pål Waaktaar** ve çalışma arkadaşları **Morten Harket** ve aynı zamanda okul arkadaşı **Magne Furuhome**n ile birlikte tüm Norveçlilere sağlıklı ve uzun ömürlü bir hayat dilerim!

D. PAMUKTULUM, 04.02.2022, 04:00.

D. PAMUKTULUM

## Piobert-Parmentier Metodu'nun $\mathbb{Q}$ Üzerinde Genelleştirilmesi

Piobert-Parmentier metodunun  $\mathbb{R}$  üzerine genişletilmesi ya da genelleştirilmesinin birçok yolu vardır. Yani bu metodun genelleştirilmesi tek türlü belirli değildir. Fakat bu metodun tüm yaklaşım metotları içinde en mükemmel genelleştirilmiş şekli,  $\mathbb{C}$ 'deki "[Genelleştirilmiş Piobert-Parmentier Metodu](#)"dur. Çünkü terim sayısı ve yakınsaklık hızı bakımından bundan daha etkin bir metot bulmanız mümkün değildir. Bu nedenle bu çalışmam Piobert-Parmentier metodunun genelleştirilmesinde başat bir metottur, dolayısıyla bundan daha iyi bir metot bulmanız mümkün değildir!

Şimdi aşağıda Piobert-Parmentier metodunun  $\mathbb{Q}$ 'daki genelleştirilmesine ilişkin 3 farklı metot vereceğim. Bunlardan ilki **Ole Amble**'ın 05.05.1952 tarihli tezinden gelir!

**4.1. METOT 1 (Ole Amble'a Göre Piobert-Parmentier Metodu'nun  $\mathbb{Q}$  Üzerinde Genelleştirilmesi).** **Ole Amble**'ın, "[A set of formulas for numerical integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 25, 1952, p. 38-41. MR 14, 907](#)" tezinde anlattığına göre  $y = f(x)$  için

$$(4.1) \quad I = \int_0^n y dx$$

integraliyle trapezli ve orta noktalı alttan ve üstten (ya da üstten ve alttan) şu yaklaşıklıklar mevcuttur:

$$(4.2) \quad \begin{cases} T_3 = T_1 + \frac{h}{12} (\Delta \bar{y}_0 - \Delta \bar{y}_n), & T_2 = T_0 - \frac{h}{24} (\Delta y_0 - \Delta y_n), \\ T_5 = T_3 - \frac{11h}{720} (\Delta^3 \bar{y}_0 - \Delta^3 \bar{y}_n), & T_4 = T_2 + \frac{17h}{5760} (\Delta^3 y_0 - \Delta^3 y_n), \\ T_7 = T_5 + \frac{191h}{60480} (\Delta^5 \bar{y}_0 - \Delta^5 \bar{y}_n), & T_6 = T_4 - \frac{367h}{967680} (\Delta^5 y_0 - \Delta^5 y_n), \\ T_9 = T_7 - \frac{2497h}{3628800} (\Delta^7 \bar{y}_0 - \Delta^7 \bar{y}_n), & T_8 = T_6 + \frac{27859h}{464466400} (\Delta^7 y_0 - \Delta^7 y_n), \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Burada  $T_0$ , (2)'deki  $T_n$  orta nokta formülü ve  $T_1$ , (1)'deki  $K_n$  trapez formülüdür. Ancak **Ole Amble** bu formülleri modifiyesiz olarak kullanıyordu. Yani tezdaki

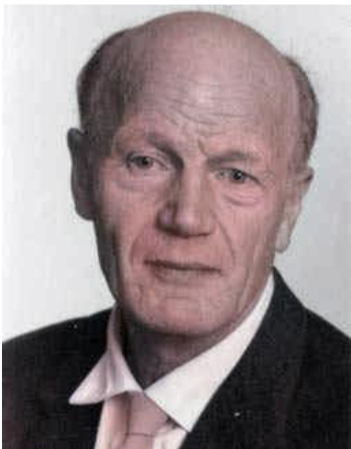
$$(4.3) \quad \int_0^6 \frac{\pi}{12} \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) dx = 1$$

örneğindeki çıktılar için  $n = 6$ , dolayısıyla (1) ve (2)'de  $2^n$  yerine  $n$ 'yi almanız gerekiyor!

Çok ilginçtir **Ole Amble**, yukarıdaki formüllerden sadece sol sütundaki ilk formülü merkezi fark formüllerine göre (4)'te şöyle verir:

$$(4.4) \quad A_1 := \frac{h}{12} (\Delta \bar{y}_0 - \Delta \bar{y}_n) = \frac{h}{12} \left( \frac{y_1 - y_{-1}}{2} - \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2} \right) = \frac{h}{24} (y_1 - y_{-1} + y_{n-1} - y_{n+1}).$$

Yani diğer merkezi fark formüllerini vermez (ki tezinde "merkez" adına hiçbir şey söylemez. Bunu (4.4)'e göre sizin anlamanız gerekiyor). O, bu konuda "*Onu bu metot için yüksek dereceli parabolere genişletmek zor değildir (It's not difficult to extend this method to parabolas of higher degrees)*" dedikten sonra sol sütundaki 5. ve 7. mertebeden merkezi fark formüllerini (7) ve (8) ya da daha açık bir ifadeyle (9) ve (10)'da verir ve bunlarla sağ sütundaki merkezi fark formülleri hakkında hiçbir açıklama yapmaz!



### Romberg geliyor!

**Romberg Matrix Reloaded**'taki **Morpheus** gibi bir sürgün olarak 1949'da Trondheim'a geldiğinde NTH'de (şimdi NTNU) hemen bir pozisyon alamadı ama bunun için inanılmaz bir çaba içindeydi (Bkz. Eski çevirilerdeki ajan **Jones** ve **Brown** arasında şu konuşmalara: "Onları bulduk. Sürgün 1 numaralı hedefimiz!" ve "Kız önemli değil. Sürgünü bul!"). Bu nedenle o, **Ole Amble**'ın 1952'deki tezini inceledikten sonra 1955'te kendi tezini yazdı (Bkz. "[Vereinfachte numerische Integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 28, 1955, p. 30-36, MR 61, 517](#)"). Buna göre **W. F. Sheppard**'ın 14.06.1900 tarihli "[Some quadrature formulas, Proc. London Math. Soc., 32, 1900, pp. 258-277](#)" tezini uzun bir inceleme ve araştırmadan sonra kendi metodunu inşaa etti ve tezinin ilk yarısını bu metoda ayırdı. Tezin 2. yarısını ise (4.2)'deki her 2 sütundaki ilk yaklaşım formüllerini ( $T_2$  ve  $T_3$ ) alarak **Ole Amble**'ın 1952'deki rüyasını gerçekleştirir. Çünkü **Ole Amble**'ın (4.3) örneğinde (4.2)'deki yaklaşıklıklarla yapmak istediği biricik şey bu idi!

**Resim 4.1.** Alman nümerik analizi **Werner Romberg**.

Şöyle ki, **Ole Amble**, tezinde (4.2)'deki yaklaşıklıklarla şu sonuçlara erişmişti ama işlem yükü ağırlaştığı için son satırdaki sonuçları bir türlü verememişti:

Ole Amble'ın Yaklaşıklıkları, 1952			
Orijinalde:	Ole Amble:	Orijinalde:	Ole Amble:
$T_1 = 0.99428188829215795204$	0,9943	$T_0 = 1.0028615075117907939$	1,0053
$T_3 = 0.99992844392204131719$	0,999928	$T_2 = 1.0000138677438771599$	1,000014
$T_5 = 0.99999899121842171511$	0,99999899	$T_4 = 1.0000002392888945830$	1,00000013
$T_7 = 0.99999998501409023271$	0,999999985	$T_6 = 1.0000000038477741619$	1,000000013
$T_9 = 0.9999999977069185695$	-	$T_8 = 1.000000000614363609$	-

**Tablo 4.1.** Son satırdakiler hariç **Ole Amble**'ın tezinde geçen yaklaşıklıklar. İnanır mısınız Mathematica'da sol ve sağ sütundaki sonuçlara erişebilmek için 2 gecedir heyecandan hiç uyumadım ve bunlara 20.10.2021, 06:45:20 ve 22.10.2021, 05:07:46'de ulaştım. Fakat **Ole Amble** sol sütundaki değerlerin tamamını doğru elde eder ve bunları yuvarlatırken sağ sütundaki değerlerden ikincisi hariç diğerlerini doğru verememiştir. Bu sonuçlardan anlaşılan o ki, **Ole Amble** bu hesapları NUSSE'de yapmadı; **Romberg** gibi 10 basamaklı bir hesap makinesi (büyük bir ihtimalle MADAS ATG-20) kullandı!

**Romberg**, işte (4.3) örneğinden elde edilen 10 basamaklı çıktılar için **Ole Amble**'ın bir türlü erişemediği "1" sonucuna [turuncu tablo](#)sunda birikimli olarak nasıl erişebileceğini göstererek **Ole Amble**'ın rüyasını gerçekleştirdi ve böylece **Ole Amble**'ın binbir eziyet çekerek hesapladığı bu çıktılara, dolayısıyla (4.2)'deki yaklaşıklıkların elde edildiği metodun gereksiz olduğunu göstermiş oldu. Bu arada eğer **Ole Amble**'ın 1952'deki tezi ile **Romberg**'in 1955'teki tezini karşılaştırırsanız, **Romberg**'in çok iyi bir öğretmen olduğunu anlarsınız. Çünkü **Romberg**, kullandığı metot her ne kadar günümüz için anlaşılmasa da tezindeki her bilgiyi açıklamıştır. Bu bakımdan **Romberg**'e çok şey borçlu olduğumuz açıktır!

**4.1.1. Ole Amble'in Metodu-1952**

*Ole Amble* bu yaklaşıkları nasıl bulduğu hakkında (15) no'lu formülün altında açıklamalar yapar ama bunlar yeterli değildir. O, orada (4.2)'deki sol sütundaki merkezi farklar için 3. ve 5. türevleri kullandığından ve toplam integral için de şimdilerde adı geçmeyen yani esamesi bile okunmayan "*Gregory'nin Formülleri (Gregory's formulas)*"nden söz eder. Günümüzde bu formüller serilerin Taylor açılımlarıyla elde edilen formüller olarak bilinir!

Aşağıya bu tezi yazdıktan sonra soluğu NUSSE'nin yanında alan *Ole Amble*'in bir resmini çıkarttım (Bkz. [Resim 1.4](#)):



**Resim 4.2.** Soldan sağa doğru herkesin [NUSSE](#)'nin çevresine akın etmesine neden olan kişi *Doç. Dr. Ole Amble, Thomas Hysing, Tor Evjen* ve sırtı dönük masadaki kişi ise muhtemelen daha sonra Elektrik Bürosu için CEO olan *Kjell Kveim*'dir, Oslo Üniversitesi'nin Fizik Bölümü'nün bodrum katı-1952. [Fotoğraf: Sverre A. Børretzen/Norske Museum.](#)

Şimdi ilkin *Ole Amble*'in tezinde vermediği (4.2)'nin sol sütunundaki merkezi farkları nasıl hesapladığını göstereceğim. Ama *Ole Amble*'inki gibi değil, modern metotla.

1. **Trapezli Yaklaşıklıkların Bulunması.** İlk (4.4)'teki  $A_1$  için  $h = \frac{b-a}{n}$  farkını göz önüne alırsak merkezi farklar

$$\Delta \bar{y}_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2} = \frac{f(a + (n+1)h) - f(a + (n-1)h)}{2} = \frac{f(a + nh + h) - f(a + nh - h)}{2} = \frac{f(a + b - a + h) - f(a + b - a - h)}{2} = \frac{f(b + h) - f(b - h)}{2}$$

ve

$$\Delta \bar{y}_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2} = \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2}$$

olduklarından şu sonuçları elde etmiş oluruz:

$$(4.5) \quad \Delta \bar{y}_n = \frac{f(b + h) - f(b - h)}{2}, \Delta \bar{y}_0 = \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2}.$$

Şu halde  $A_1$ 'i

$$A_1 = \frac{h}{12} (\Delta \bar{y}_0 - \Delta \bar{y}_n) = \frac{h}{12} \left( \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2} - \frac{f(b + h) - f(b - h)}{2} \right) = \frac{h}{24} (f(a + h) - f(a - h) + f(b - h) - f(b + h))$$

eşitliklerine göre şu şekilde bulmuş oluruz:



## Piobert-Parmentier Metodu'nun Q Üzerinde Genelleştirilmesi

$$(4.6) A_1 = \frac{h}{24} (f(a+h) - f(a-h) + f(b-h) - f(b+h)) + O(h^4).$$

Bu, "[Genelleştirilmiş Ole Amble Algoritması](#)"ndaki (2.2)'deki formülün ters işaretlisidir. Tabii o sırada *Ole Amble*'in tezi<sup>1</sup> elimde olmadığı için bu formülü *Romberg*'in tezinden çıkartmıştım!

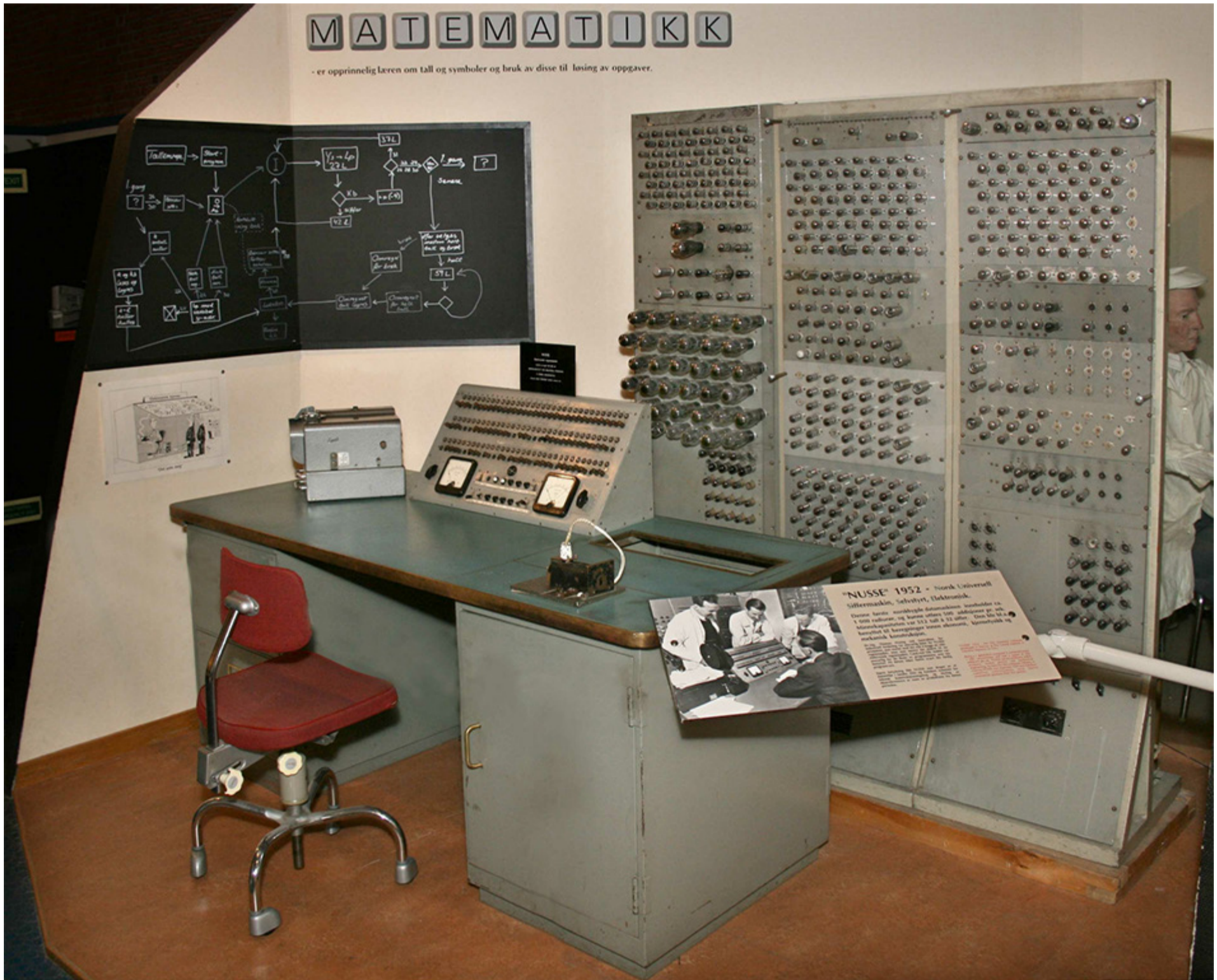
Peki diyelim ki bu formüldeki 24'ü (4.2)'de verildiği şekliyle değil de metotla bulmak istersek ne yapmamız gerekir? Çünkü *Ole Amble* da (4.2)'deki  $A_1$ 'in katsayısının bu şekilde bulmuştu. Gerçi  $A_1$ 'in katsayısındaki 24'ün doğru olduğunu (2.47) ve "[3. Ole Amble Kuralı \(1952\)](#)"de göstermişim ama bunlar birer sağlama idi. Fakat 24'ün nasıl bulunduğunu (2.51)'de hem trapezli hem de orta noktalı yaklaşıklıklarda gösterdim ki *Ole Amble*'in 1952'de yaptığı şey de bu idi zaten. Eğer bunun için (2.51)'in altında yaptığım açıklamalarıma bakarsanız, orada *Ole Amble*'in 24'ü 4!'den mi bulduğuna dair sorumu görebilirsiniz. Çünkü o sırada *Ole Amble*'in tezi elimde mevcut değildi!

Şimdi (4.6)'daki  $A_1$ 'in katsayısında 24 yerine p alır ve bu işlemi en sade halde yaparsam,

$$(4.7) \frac{B_2}{2!} (f'(b) - f'(a))h^2 + A_1 = \frac{1}{12} (f'(b) - f'(a))h^2 + \frac{h}{24} (f(a+h) - f(a-h) + f(b-h) - f(b+h)) = \frac{p-24}{12p} (f'(b) - f'(a))h^2 + \dots \Rightarrow p-24=0 \Rightarrow p=24$$

sonucunu elde ederiz. Bu ise bize (4.6)'yı verir!

Bundan sonraki merkezi farklar için "[Sonlu Merkezi Farklar](#)"daki tablodan yararlanarak vereceğim, çünkü (4.2)'nin sol sütündeki diğer merkezi farkların elde edilmesi ileri ya da geri farklardaki gibi basit değildir. Bunlar merkezi farklar metoduyla elde edilen ve mertebesi tek olan türevlerdir. Bu türevlerden 1, 2 ve 3. mertebeden türevlerin elde edilimleri *Ole Amble*'in tezinde bildirdiği gibi "[3.1.4. Yüksek Mertebeden Türevler](#)"de anlatılmaktadır. Fakat daha yüksek mertebeden türevler için "[Sonlu Merkezi Farklar](#)"daki tablonun altındaki bir [Van der Monde matrisi](#) tersinden elde edilmektedir. Ama *Ole Amble* onun da kolay bir yolunu bulmuş (Bkz. [Not 4.1](#)).



**Resim 4.3.** [NUSSE](#), 1950-1955'te Oslo Üniversitesi'nin Fizik Bölümü'nün bodrum katında kurulurken ilk kez 1952'de faaliyete geçti. Çalıştırılan ilk program, matematikçi *Ole Amble*'in [NİM](#) adlı oyunun dijital bir varyantıydı. Yukarıdaki Türkçe'deki gibi "MATEMATIKK" yazısı ve onun altındaki "(aslen sayılar, semboller ve bunların çözümde kullanımları üzerine yapılan çalışmalardır (-er opprinnelig læren om tall og symboler og bruk av disse til løsing av oppgaver))" açıklaması ve onun altında da çalıştırılan ilk programın şeması ve Resim 4.2'deki fotoğraf, NUSSE'nin ilk çalıştırıldığını anın hatırasına konulmuşlardır.

Burada kabul etmek gerekir ki *Ole Amble*'in,

<sup>1</sup> Eğer Prof. Dr. *Brynjulf Owren*'i ve onun yönlendirmesiyle NTNU'dakileri 2. kez rahatsız etmeseydim bu teze ulaşamayacaktım. Buradan *Owren*'e, *Romberg*'in tezinden sonra *Ole Amble*'in tezinin sağlanmasında yardımları için bir kez daha teşekkür ederim!

## Piobert-Parmentier Metodu'nun $\mathbb{Q}$ Üzerinde Genelleştirilmesi

$$(4.8) \quad \Delta^2 y_{i+\frac{1}{2}} = \Delta y_n - \Delta y_0, \Delta^4 y_{i+\frac{1}{2}} = \Delta^3 y_n - \Delta^3 y_0, \Delta^6 y_{i+\frac{1}{2}} = \Delta^5 y_n - \Delta^5 y_0, \Delta^8 y_{i+\frac{1}{2}} = \Delta^7 y_n - \Delta^7 y_0, \dots$$

şeklinde gösterdiği 1, 3, 5 ve 7. mertebeden türevlerin tablo yardımı olmadan elle hesaplanması, altından kalkılması güç bir iştir. **Ole Amble** tezinde bu konuda herhangi bir bilgi vermez. Yani merkezi farklar ve metodundan söz etmez. Bunları bırakın, tezinde “**central**” kelimesine rastlamak dahi mümkün değildir. Sadece anılan bu türevlerden ve bunları parabolden elde ettiğinden söz eder. Bu türevlerin parabolden elde edilmesinin ne kadar yorucu bir uğraş olduğunu “[3.1.4. Yüksek Mertebeden Türevler](#)”den açık bir şekilde görebilirsiniz. Aynı şekilde, “**Taylor Açılımı**” yerine [1670](#)'deki “**Gregory Formülleri**”nden ve karşılaştırdığı metot için [1743](#)'teki “**Simpson Formülü**”nden bahseder. Demek ki 1952'de bu kavramlar henüz mevcut değildi ya da yaygın olarak kullanılmıyordu, bilemiyorum artık!

Günümüze geldiğimizde ise şu sonuçlara ulaştım: Trapezli yaklaşıklıklar için verilen [\(4\)](#) ya da [\(6\)](#), [\(7\)](#) ve [\(8\)](#) ya da [\(9\)](#) ve [\(10\)](#) ve orta noktalı yaklaşıklıklar için verilen [\(16\)-\(19\)](#) ya da [\(21\)-\(23\)](#)'teki formüllerini bulurken çifte doğrulamayla yani hem bu formüllerdeki katsayıları hem de [\(4.3\)](#)'teki örneğe göre bu formüllerden elde edilen sonuçları doğrulamayla elde ettim (Bkz. [Tablo 4.1](#)). Fakat **Romberg**'in tezindeki uyarılara da dikkat ettim. Çünkü **Ole Amble Romberg**'e bu formülleri nasıl elde ettiğini bir şekilde anlatmıştı ve o da bunları biliyordu. Acaba gerçekten böyle miydi?



**Resim 4.4.** Bu şarkı, **Brian May**'in eşinden ayrılması ve **Freddie Mercury**'nin genelde röportaj yapmaktan hoşlanmamasından dolayı medya tarafından verilen kötü geri tepkiye karşı yazılmıştır (Bkz. [Türkçe çevirisi](#)). Bana göre **Freddie Mercury**'nin sesi **İlyas Salman**'nın belirttiğine göre “**eğitilmiş**” olmasından kaynaklanıyordu. Çünkü şarkı söylemediğinde sıradan bir insan gibiyken, ki bu sırada ses kontrolüne gerek yoktur, şarkı söylemeye başladığı zaman inanılmaz oluyordu (Bkz. “[Macar Rapsodisi](#)”).

yani genelleştirilmesinden bahsettiğini ve tezinde [\(4.43\)](#)'teki  $T_2$  ve  $T_3$  ile sadece birer örnek verdiği sonucu çıkar. Bu durumda olay şöyle gelişir: **Romberg** 1948'de Trondheim'a geldikten sonra orada akademik bir pozisyon almak ister ve bunun için kendisini kanıtlaması gerekir (Bkz. “[Romberg'in Kaçışı ve Yükselişi](#)”). Ayrıca **Romberg**'in [1933-2003](#)'teki çalışmalarına bakabilirsiniz). İlk 1952'de **Ole Amble**'in tezini yazarak ya da yazılmasında yardımcı rolünü üstlenerek dikkatleri üzerine çeker. Sonra 1955'de bir 2. tez daha yazarak bu sefer hedefi tam 12'den vurur. Çünkü **Ole Amble**'in tezinde hedeflediğine daha kısa yoldan ulaşır ve bu sayede dünyaca tanınır. Trondheim'da akademik pozisyon alması ise 1960'da gerçekleşir. Sonra **Ole Amble**'in tezindeki metodu **H. Rutishauser**'a anlatır ya da verir ve o da, 1963'te “[Ausdehnung des Rombergschen Prinzips](#)” adlı bir diğer tez yazar (Bkz. Daha geniş bilgi için **Heinz Rutishauser**'ın “[Lectures on Numerical Mathematics](#)” kitabına). [Bu son tezde Rutishauser](#)'ın **Ole Amble**'in [\(4.43\)](#)'teki  $A_0, A_1, A_2, \dots$  yaklaşıklıklarını nümerik türev almada kullanmış olduğunu açıkça görebilirsiniz!

Ama durum böyle değil, çünkü **Romberg**, “[Vereinfachte numerische Integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 28, 1955, p. 30-36, MR 61, 517](#)” tezinin sonundaki “[EK \(ANHAG\)](#)”te yöntemi geliştirerek kendi yöntemini vermiştir. Bu durumda Norveç ile Almanya arasında bir uluslararası skandal söz konusu olur ki, **Tore Håvie** ve çağdaşların ne yaptıklarını gerçekten merak ediyorum. Yani Norveçlilerin bu konuda bir açıklama yapması gerekiyor. **Ferdi** abimizin açıklaması ise, ki “**inter**” kelimesini ben ekledim, yukarıdadır (Bkz. “[Freddie Mercury'nin Ölümünün Gerçek Görüntüleri](#)”). **Brian May**, **Roger Taylor** ve **John Deacon**'un ne kadar üzüldüklerini biliyoruz). Her neyse, bu araştırma sırasında **Romberg**'in uyarılarına göre [Tablo 4.1](#)'deki sonuçları teker teker buldum!

Şimdi ikinci olarak “[Sonlu Merkezi Farklar](#)”daki tabloya göre,

$$(4.9) \quad \begin{cases} A_1 = -\frac{h}{24} [(f(b+h) - f(b-h)) - (f(a+h) - f(a-h))], \\ A_3 = \frac{h}{2p} [(f(b+2h) - 2f(b+h) + 2f(b-h) - f(b-2h)) - (f(a+2h) - 2f(a+h) + 2f(a-h) - f(a-2h))] \end{cases}$$

yaklaşıklıklarını göz önüne alırsak (ki burada dikkat ederseniz  $A_3$ 'ün katsayısında  $2p$ 'nin alınması tablodaki katsayılardan gelir. Aynı durum  $A_1$  için de geçerlidir. Yani orada da  $2p = 24$ 'tür),

$$(4.10) \quad \sum_{k=1}^2 \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) h^{2k} + A_1 + A_3 = -\frac{11p-720}{720p} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 \Rightarrow 11p-720=0 \Rightarrow p = \frac{720}{11}$$

katsayısını buluruz ki buradan şu yaklaşıklığı elde ederiz:

$$(4.11) \quad A_3 = \frac{11h}{2 \times 720} [(f(b+2h) - 2f(b+h) + 2f(b-h) - f(b-2h)) - (f(a+2h) - 2f(a+h) + 2f(a-h) - f(a-2h))] + O(h^6).$$

### Bir Uluslararası Skandal!

Şöyle ki, bir araştırma sırasında 31.10.2021, 11:18:00'de bilgisayarıma indirdiğim “[A generalized Romberg differentiation procedure for calculation of hyperpolarizabilities](#)” makalesini okurken 41. sayfanın sol sütunun son paragrafındaki açıklamaya göre [Not 4.1](#)'de çıkarttığım formüller **Ole Amble**'den değil **Romberg**'ten geliyormuş!

Bu konuda **Romberg**'in tezinde şu açıklamayı buldum: **Romberg**'in, “*Sayısal hesaplamamız çok fazla çalışma gerektiriyorsa, burada verildiği gibi yüksek bir yaklaşıklık yöntemi öneririz. (Erfordert ihre numerische Berechnung viel Arbeit, dann empfiehlt sich eine Methode höher Näherung, wie wir sie hier angeben haben.)*”

Eğer burada üstü kapalı olarak sözü edilen metot **Ole Amble**'in metodu ise, o zaman **Romberg**'in bu açıklama ile metodun genişletilmesinden

İşte bu formül, **Ole Amble**'in (4.18)'deki  $\Delta^3 \bar{y}_i$ 'ye göre (4.2)'deki  $T_5$  için merkezi farklara göre işaret ettiği kapalı formda (7)'deki ya da açık formda (9)'daki sonuçtur. Kaldı ki **Ole Amble** bunların dışında başka herhangi bir bilgi vermez. Ama şimdi bu formülü **Romberg** gibi açık hale getirdik. Eğer **Romberg**'in  $A_1$ 'i ifade etme şekline bakarsanız bu formülün bu şekilde ortaya konulmasının o kadar kolay olmadığına dikkat ediniz!

Üçüncü olarak yine aynı tabloya göre,

$$(4.12) \begin{cases} A_1 = -\frac{h}{24} [(f(b+h) - f(b-h)) - (f(a+h) - f(a-h))], \\ A_3 = \frac{11h}{2 \times 720} [(f(b+2h) - 2f(b+h) + 2f(b-h) - f(b-2h)) - (f(a+2h) - 2f(a+h) + 2f(a-h) - f(a-2h))], \\ A_5 = \frac{h}{2p} [(f(b+3h) - 4f(b+2h) + 5f(b+h) - 5f(b-h) + 4f(b-2h) - f(b-3h)) - (f(a+3h) - 4f(a+2h) + 5f(a+h) - 5f(a-h) + 4f(a-2h) - f(a-3h))] \end{cases}$$

yaklaşıklıkla göz önüne alırsak,

$$(4.13) \sum_{k=1}^3 \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) h^{2k} + A_1 + A_3 + A_5 = \underbrace{\frac{191p + 60480}{60480p}}_{=0} (f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)) h^6 \Rightarrow 191p + 60480 = 0 \Rightarrow p = -\frac{60480}{191}$$

katsayısını buluruz ki buradan da şu yaklaşıklıkla elde ederiz:

$$(4.14) A_5 = -\frac{191h}{2 \times 60480} [(f(b+3h) - 4f(b+2h) + 5f(b+h) - 5f(b-h) + 4f(b-2h) - f(b-3h)) - (f(a+3h) - 4f(a+2h) + 5f(a+h) - 5f(a-h) + 4f(a-2h) - f(a-3h))] + O(h^8).$$

Bu formül de, **Ole Amble**'in (4.18)'deki  $\Delta^5 \bar{y}_i$ 'ye göre (4.2)'deki  $T_7$  için merkezi farklara göre işaret ettiği kapalı formda (8)'deki ya da açık formda (10)'daki sonuçtur.

Dördüncü olarak yine aynı tabloya göre,

$$(4.15) \begin{cases} A_1 = -\frac{h}{24} [(f(b+h) - f(b-h)) - (f(a+h) - f(a-h))], \\ A_3 = \frac{11h}{2 \times 720} [(f(b+2h) - 2f(b+h) + 2f(b-h) - f(b-2h)) - (f(a+2h) - 2f(a+h) + 2f(a-h) - f(a-2h))], \\ A_5 = -\frac{191h}{2 \times 60480} [(f(b+3h) - 4f(b+2h) + 5f(b+h) - 5f(b-h) + 4f(b-2h) - f(b-3h)) - (f(a+3h) - 4f(a+2h) + 5f(a+h) - 5f(a-h) + 4f(a-2h) - f(a-3h))] \\ A_7 = \frac{h}{2p} [(f(b+4h) - 6f(b+3h) + 14f(b+2h) - 14f(b+h) + 14f(b-h) - 14f(b-2h) + 6f(b-3h) - f(b-4h)) - (f(a+4h) - 6f(a+3h) + 14f(a+2h) - 14f(a+h) + 14f(a-h) - 14f(a-2h) + 6f(a-3h) - f(a-4h))] \end{cases}$$

yaklaşıklıkla göz önüne alırsak,

$$(4.16) \sum_{k=1}^4 \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) h^{2k} + A_1 + A_3 + A_5 + A_7 = -\frac{2497p - 3628800}{3628800p} (f^{(7)}(b) - f^{(7)}(a)) h^8 \Rightarrow p = \frac{3628800}{2497}$$

katsayısını buluruz ki buradan şu yaklaşıklıkla elde ederiz ki bu, (4.18)'deki  $\Delta^7 \bar{y}_i$ 'ye göre (4.2)'deki  $T_9$  için merkezi farklara göre **Ole Amble**'in (14)'teki kalan terimde işaret ettiği sonuçtur:

$$(4.17) A_7 = \frac{2497h}{2 \times 3628800} [(f(b+4h) - 6f(b+3h) + 14f(b+2h) - 14f(b+h) + 14f(b-h) - 14f(b-2h) + 6f(b-3h) - f(b-4h)) - (f(a+4h) - 6f(a+3h) + 14f(a+2h) - 14f(a+h) + 14f(a-h) - 14f(a-2h) + 6f(a-3h) - f(a-4h))] + O(h^{10}).$$

**Not 4.1 (Merkezi Fark Formülleri İçin Ole Amble'in Formülasyonu).** **Ole Amble**,  $f'(x), f^{(3)}(x), f^{(5)}(x), f^{(7)}(x), \dots$  için

$$(4.18) \begin{cases} \Delta \bar{y}_i = \bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{y}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{y_{i+1} - y_i}{2} - \frac{y_i - y_{i-1}}{2} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2}, \\ \Delta^2 \bar{y}_i = \Delta \bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - \Delta \bar{y}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{y_{i+\frac{3}{2}} - y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}} + y_{i-\frac{3}{2}}}{2}, \\ \Delta^3 \bar{y}_i = \Delta^2 \bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - \Delta^2 \bar{y}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2}, \\ \Delta^4 \bar{y}_i = \Delta^3 \bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - \Delta^3 \bar{y}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{y_{i+\frac{5}{2}} - 3y_{i+\frac{3}{2}} + 2y_{i+\frac{1}{2}} + 2y_{i-\frac{1}{2}} - 3y_{i-\frac{3}{2}} + y_{i-\frac{5}{2}}}{2}, \\ \Delta^5 \bar{y}_i = \Delta^4 \bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - \Delta^4 \bar{y}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{y_{i+3} - 4y_{i+2} + 5y_{i+1} - 5y_{i-1} + 4y_{i-2} - y_{i-3}}{2}, \\ \Delta^6 \bar{y}_i = \Delta^5 \bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - \Delta^5 \bar{y}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{y_{i+\frac{7}{2}} - 5y_{i+\frac{5}{2}} + 9y_{i+\frac{3}{2}} - 5y_{i+\frac{1}{2}} - 5y_{i-\frac{1}{2}} + 9y_{i-\frac{3}{2}} - 5y_{i-\frac{5}{2}} + y_{i-\frac{7}{2}}}{2}, \\ \Delta^7 \bar{y}_i = \Delta^6 \bar{y}_{i+\frac{1}{2}} - \Delta^6 \bar{y}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{y_{i+4} - 6y_{i+3} + 14y_{i+2} - 14y_{i+1} + 14y_{i-1} - 14y_{i-2} + 6y_{i-3} - y_{i-4}}{2}, \\ \vdots \end{cases}$$

ve  $f''(x), f^{(4)}(x), f^{(6)}(x), f^{(8)}(x), \dots$  için merkezi fark formüllerini şu şekilde elde eder (27.11.2021, 23:11:35. Bkz. "[Central finite difference](#)"):

$$(4.19) \quad \begin{cases} \Delta y_i = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}, \\ \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+\frac{1}{2}} - \Delta y_{i-\frac{1}{2}} = (y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1}) = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}, \\ \Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+\frac{1}{2}} - \Delta^2 y_{i-\frac{1}{2}} = (y_{i+\frac{3}{2}} - 2y_{i+\frac{1}{2}} + y_{i-\frac{1}{2}}) - (y_{i+\frac{1}{2}} - 2y_{i-\frac{1}{2}} + y_{i-\frac{3}{2}}) = y_{i+\frac{3}{2}} - 3y_{i+\frac{1}{2}} + 3y_{i-\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{3}{2}}, \\ \Delta^4 y_i = \Delta^3 y_{i+\frac{1}{2}} - \Delta^3 y_{i-\frac{1}{2}} = y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}, \\ \Delta^5 y_i = \Delta^4 y_{i+\frac{1}{2}} - \Delta^4 y_{i-\frac{1}{2}} = y_{i+\frac{5}{2}} - 5y_{i+\frac{3}{2}} + 10y_{i+\frac{1}{2}} - 10y_{i-\frac{1}{2}} + 5y_{i-\frac{3}{2}} - y_{i-\frac{5}{2}}, \\ \Delta^6 y_i = \Delta^5 y_{i+\frac{1}{2}} - \Delta^5 y_{i-\frac{1}{2}} = y_{i+3} - 6y_{i+2} + 15y_{i+1} - 20y_i + 15y_{i-1} - 6y_{i-2} + y_{i-3}, \\ \Delta^7 y_i = \Delta^6 y_{i+\frac{1}{2}} - \Delta^6 y_{i-\frac{1}{2}} = y_{i+\frac{7}{2}} - 7y_{i+\frac{5}{2}} + 21y_{i+\frac{3}{2}} - 35y_{i+\frac{1}{2}} + 35y_{i-\frac{1}{2}} - 21y_{i-\frac{3}{2}} + 7y_{i-\frac{5}{2}} - y_{i-\frac{7}{2}}, \\ \Delta^8 y_i = \Delta^7 y_{i+\frac{1}{2}} - \Delta^7 y_{i-\frac{1}{2}} = y_{i+4} - 8y_{i+3} + 28y_{i+2} - 56y_{i+1} + 70y_i - 56y_{i-1} + 28y_{i-2} - 8y_{i-3} + y_{i-4} \\ \vdots \end{cases}$$

Burada şu tahminlerim dikkat çeker: Benim bu tarihten önceki (19.10.2021, 17:03:02-27.11.2021, 23:11:35) yukarıda kullandığım (4.18)'deki merkezi fark formülleri ise sadece birer tahmindir ama doğrudur (Bkz. "[Piobert-Parmentier Metodu'nun R Üzerinde Genelleştirilmesi, Oluşturma: 29.11.2021, 14:46:20, Değiştirme: 29.11.2021, 14:47:06](#)"). Yani bu formülleri çoktan doğru tahmin etmiş ve 3. metodu vermiş, dolayısıyla çalışmamı bitirmiştim bile. Ama yine de kimsenin içinde bir şüphe kalmasın diye bu merkezi fark formüllerini **Ole Amble**'in kendi formülasyonundan çıkarttım. Buna göre Not 4.2'deki **Ole Amble**'in dalgınlığını da doğru bir şekilde tahmin etmiş olduğum sonucu çıkar!

2. **Orta Noktalı Yaklaşıklıkların Bulunması.** Bu bölümde yine  $A_1, A_3, A_5, A_7, \dots$  yaklaşıklıklarını basit dönüşümlerle birlikte kullanacağız. Çünkü (4.2)'nin sağ sütunundaki merkezi farklar soldakilere göre ağırlıksızdır, yani üzerlerindeki çizgiler kaldırılarak aritmetik ortalamaları alınmamıştır.

Buna göre  $B_1$  yaklaşıklığını şu şekilde ele almalıyız. Çünkü **Ole Amble**'in algoritmasını genelleştirdiğim zaman orta noktalı yaklaşıklık için bu sonuç çıkmıştı:

$$(4.20) \quad B_1 = \frac{h}{p} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2}\right) - f\left(b - \frac{h}{2}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{h}{2}\right) \right) \right].$$

**Romberg'in uyarısına dikkat etmek gerekiyor!**

Yani sizin  $B_1$ 'in neden böyle alınması gerektiğine ilişkin (2.2)'ye göre (2.4)'teki 2. yaklaşıklığa bakmanız gerekiyor. Çünkü (2.4)'teki  $A_{n+1}$ , (2.2)'deki  $h_m$ 'nin 2'ye bölünmesi gerektiğini söyler. Hatırlanacağı üzere **Romberg**'in (4.2)'deki yaklaşıklıklarını (4.3)-(4.7)'de silsile yoluyla analiz ettiğimde (4.8)'deki 2. yaklaşıklıktaki  $A_{2n+1}$ , dolayısıyla  $A_{n+1}$ 'e ulaşmıştım. Bu durumu (2.7)'deki 2. yaklaşıklıktaki  $h_{n+1}$ 'den daha açık bir şekilde görebilirsiniz. Çünkü  $h_{n+1} = \frac{h_n}{2}$  demektir. Tıpkı (2.37)'nin üzerinde gösterdiğim gibi. Orada  $\frac{h_n}{2^p} = h_{n+p}$  eşitliği kullanılmıştır.

Şimdi burada her 2 tezi de incelemiş ve çalışmak biri olarak şu gözlemimi iletmeme izin veriniz: **Ole Amble**, (4.2)'nin sağ sütunundaki ilk yaklaşıklığı

$$(4.21) \quad T_2 = T_0 - \frac{h}{24} (\Delta y_0 - \Delta y_n) = T_0 + \frac{h}{24} (\Delta y_n - \Delta y_0) = T_0 + \frac{h}{24} \left[ \left( f(b+h) - f(b-h) \right) - \left( f(a+h) - f(a-h) \right) \right]$$

şeklinde verir ve bu,  $y_0$  ve  $y_n$ 'nin üzerlerinde çizgiler olmadığı için sol sütundaki aynı satırdakine göre aritmetik ortalamasız (ağırlıksız) yaklaşıklıktır. Bu ise kapalı şekilde (4.4)'teki ve en açık şekliyle (4.6)'daki  $A_1$ 'in ters işaretlisine karşılık gelir. Ama kazın ayağı hiç de öyle değil. Çünkü  $B_1$ 'i böyle kabul ederseniz eğer,  $B_3, B_5, B_7$ 'nin katsayılarını **Ole Amble**'inkilerinden farklı olarak bulursunuz. O halde  $B_1$ 'i (4.20)'deki gibi almak zorundayız. Bunu söyleyen ya da bizim  $B_1$ 'i bu şekilde almamız söyleyen kişi, **Romberg**'tir. Diğer taraftan **Ole Amble**'a göre yani daha yeni çözdüğüm formülasyonuna göre, (4.18)'deki ilk eşitlik  $B_1$ 'in (4.20)'deki gibi alınması gerektiğini söyler bize!

Şu halde  $B_1$ 'i (4.20)'deki gibi alırsak,

$$(4.22) \quad \frac{B_2 \left(\frac{1}{2}\right)}{2!} (f'(b) - f'(a))h^2 + B_1 = -\frac{1}{24} (f'(b) - f'(a))h^2 + \frac{h}{p} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2}\right) - f\left(b - \frac{h}{2}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{h}{2}\right) \right) \right] = -\frac{p-24}{24p} (f'(b) - f'(a))h^2 + \dots$$

$$\Rightarrow p - 24 = 0 \Rightarrow p = 24$$

katsayısına göre

$$(4.23) \quad B_1 = \frac{h}{24} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2}\right) - f\left(b - \frac{h}{2}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{h}{2}\right) \right) \right] + O(h^4)$$

yaklaşıklığını elde etmiş oluruz.

Şimdi ikinci olarak  $B_1$ 'i (4.20)'deki gibi ve  $B_3$ 'ü (4.9)'daki 2. yaklaşıklıktaki gibi ele alırsak,

$$(4.24) \quad \begin{cases} B_1 = \frac{h}{24} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2}\right) - f\left(b - \frac{h}{2}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{h}{2}\right) \right) \right], \\ B_3 = \frac{h}{2^p} \left[ (f(b+2h) - 2f(b+h) + 2f(b-h) - f(b-2h)) - (f(a+2h) - 2f(a+h) + 2f(a-h) - f(a-2h)) \right] \end{cases}$$

yaklaşıklıklarına göre

$$(4.25) \quad \sum_{k=1}^2 \frac{B_{2k} \left(\frac{1}{2}\right)}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a))h^{2k} + B_1 + B_3 = \frac{17p + 5760}{5760p} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 + \dots \Rightarrow 17p + 5760 = 0 \Rightarrow p = -\frac{5760}{17}$$

katsayısını buluruz ki buradan şu yaklaşıklıklağı bulmuş oluruz:

$$(4.26) \quad B_3 = -\frac{17h}{2 \times 5760} \left[ (f(b+2h) - 2f(b+h) + 2f(b-h) - f(b-2h)) - (f(a+2h) - 2f(a+h) + 2f(a-h) - f(a-2h)) \right] + O(h^6).$$

İşte bu formül, **Ole Amble**'in (4.18)'deki  $\Delta^3 y_i$ 'ye göre (4.2)'deki  $T_4$  için merkezi farklar metoduna göre işaret ettiği kapalı formda (18)'deki, açık formda (22)'deki ya da kalan terimde (25)'teki sonuçtur.

**Not 4.2 (Bir anlık dalgınlık mı?)**. Fakat (4.25)'teki p katsayısı

$$(4.27) \quad B'_3(h) = \frac{h}{p} \left[ \left( f\left(b + \frac{3h}{2}\right) - 3f\left(b + \frac{h}{2}\right) + 3f\left(b - \frac{h}{2}\right) - f\left(b - \frac{3h}{2}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{3h}{2}\right) - 3f\left(a + \frac{h}{2}\right) + 3f\left(a - \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{3h}{2}\right) \right) \right]$$

(ya da

$$(4.28) \quad B'_3 = \frac{B'_3(2h)}{2^4} = \frac{h}{8p} \left[ (f(b+3h) - 3f(b+h) + 3f(b-h) - f(b-3h)) - (f(a+3h) - 3f(a+h) + 3f(a-h) - f(a-3h)) \right]$$

yaklaşıklıklağı için

$$(4.29) \quad \sum_{k=1}^2 \frac{B_{2k} \left(\frac{1}{2}\right)}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) h^{2k} + B_1 + B'_3 = \frac{17p + 5760}{5760p} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 + \dots \Rightarrow 17p + 5760 = 0 \Rightarrow p = -\frac{5760}{17}$$

kombinasyonundan da aynen elde edilir.

Ben bu noktada **Ole Amble**'in bir anlık dalgınlık yaptığını düşünüyorum. Yani **Ole Amble**,  $B_3$  ile (4.25)'teki p katsayısını doğru bir şekilde bulduktan sonra bir anlık dalgınlığı sonucunda  $B'_3$  ya da (4.19)'daki  $\Delta^3 y_i$  ile karıştırdı ve bundan sonraki işlemlere bununla devam etti. Çünkü burada kullandığım metot, **Ole Amble**'in kullandığı metodun modern şeklidir ve bu nedenle hata yapmam mümkün değildir. İşte bu sonuçla Tablo 4.1'in 3. sütunundaki gerçek çıktılar ile 4. sütundaki **Ole Amble**'in çıktılarını karşılaştırdığımızda, **Ole Amble**'in orta noktalı  $T_6$  ve  $T_8$  yaklaşıklıkları için bulduğu katsayıların doğru olmadığını sonucu çıkar.

Şimdi eğer  $T_6$  ve  $T_8$ 'deki katsayıları **Ole Amble**'in (4.2)'de verdiği şekilde bulabilmek için işleme  $B'_3$  ile devam edersek üçüncü olarak,

$$(4.30) \quad \begin{cases} B_1 = \frac{h}{24} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2}\right) - f\left(b - \frac{h}{2}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{h}{2}\right) \right) \right], \\ B'_3 = -\frac{17h}{5760} \left[ \left( f\left(b + \frac{3h}{2}\right) - 3f\left(b + \frac{h}{2}\right) + 3f\left(b - \frac{h}{2}\right) - f\left(b - \frac{3h}{2}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{3h}{2}\right) - 3f\left(a + \frac{h}{2}\right) + 3f\left(a - \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{3h}{2}\right) \right) \right], \\ B_5 = \frac{h}{2p} \left[ (f(b+3h) - 4f(b+2h) + 5f(b+h) - 5f(b-h) + 4f(b-2h) - f(b-3h)) - (f(a+3h) - 4f(a+2h) + 5f(a+h) - 5f(a-h) + 4f(a-2h) - f(a-3h)) \right] \end{cases}$$

için

$$(4.31) \quad \sum_{k=1}^3 \frac{B_{2k} \left(\frac{1}{2}\right)}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) h^{2k} + B_1 + B'_3 + B_5 = -\frac{367p - 967680}{967680p} (f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)) h^6 + \dots \Rightarrow 367p - 967680 = 0 \Rightarrow p = \frac{967680}{367}$$

katsayısını buluruz ki buradan

$$(4.32) \quad B_5 = \frac{367h}{967680} \left[ (f(b+3h) - 4f(b+2h) + 5f(b+h) - 5f(b-h) + 4f(b-2h) - f(b-3h)) - (f(a+3h) - 4f(a+2h) + 5f(a+h) - 5f(a-h) + 4f(a-2h) - f(a-3h)) \right] + O(h^8)$$

yaklaşıklıklağını elde etmiş oluruz. Bu formül, **Ole Amble**'in (4.18)'deki  $\Delta^5 y_i$ 'ye göre (4.2)'deki  $T_6$  için merkezi farklara göre işaret ettiği kapalı formda (19)'daki, açık formda (23)'teki ya da kalan terimde (26)'daki sonuçtur!

Dördüncü olarak,

$$(4.33) \quad \begin{cases} B_1 = \frac{h}{24} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2}\right) - f\left(b - \frac{h}{2}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{h}{2}\right) \right) \right], \\ B'_3 = -\frac{17h}{5760} \left[ \left( f\left(b + \frac{3h}{2}\right) - 3f\left(b + \frac{h}{2}\right) + 3f\left(b - \frac{h}{2}\right) - f\left(b - \frac{3h}{2}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{3h}{2}\right) - 3f\left(a + \frac{h}{2}\right) + 3f\left(a - \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{3h}{2}\right) \right) \right], \\ B_5 = \frac{367h}{2 \times 967680} \left[ (f(b+3h) - 4f(b+2h) + 5f(b+h) - 5f(b-h) + 4f(b-2h) - f(b-3h)) - (f(a+3h) - 4f(a+2h) + 5f(a+h) - 5f(a-h) + 4f(a-2h) - f(a-3h)) \right], \\ B_7 = \frac{h}{2p} \left[ (f(b+4h) - 6f(b+3h) + 14f(b+2h) - 14f(b+h) + 14f(b-h) - 14f(b-2h) + 6f(b-3h) - f(b-4h)) - (f(a+4h) - 6f(a+3h) + 14f(a+2h) - 14f(a+h) + 14f(a-h) - 14f(a-2h) + 6f(a-3h) - f(a-4h)) \right] \end{cases}$$

yaklaşıklıklarını göz önüne alırsak,

$$(4.34) \sum_{k=1}^4 \frac{B_{2k} \left(\frac{1}{2}\right)}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) h^{2k} + B_1 + B_3' + B_5 + B_7 = \underbrace{\frac{49879p + 464486400}{464486400p}}_{=0} (f^{(7)}(b) - f^{(7)}(a)) h^8 + \dots \Rightarrow p = -\frac{464486400}{49879}$$

katsayısını buluruz ki buradan da şu yaklaşıklıkta elde ederiz:

$$(4.35) B_7 = -\frac{49879h}{2 \times 464486400} [(f(b+4h) - 6f(b+3h) + 14f(b+2h) - 14f(b+h) + 14f(b-h) - 14f(b-2h) + 6f(b-3h) - f(b-4h)) - (f(a+4h) - 6f(a+3h) + 14f(a+2h) - 14f(a+h) + 14f(a-h) - 14f(a-2h) + 6f(a-3h) - f(a-4h))] + O(h^{10}).$$

Bu son formül de, (4.18)'deki  $\Delta^7 y_i$ 'ye göre (4.2)'deki  $T_8$  ve **Ole Amble**'in (27)'deki kalan terimde işaret ettiği sonuçtur. Fakat orada bu sonuç

$$(4.36) p = -\frac{464466400}{27859}$$

katsayısında kırmızıyla işaret ettiğim rakamlarda hatalı olarak verilmiştir!

Şu halde **Ole Amble**'in  $T_6$  ve  $T_8$ 'in katsayılarındaki hataları bir kenara bırakır ve işleme (4.26)'daki  $B_3$  ile devam edersek üçüncü olarak,

$$(4.37) \begin{cases} B_1 = \frac{h}{24} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2}\right) - f\left(b - \frac{h}{2}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{h}{2}\right) \right) \right], \\ B_3 = -\frac{17h}{2 \times 5760} [(f(b+2h) - 2f(b+h) + 2f(b-h) - f(b-2h)) - (f(a+2h) - 2f(a+h) + 2f(a-h) - f(a-2h))], \\ B_5 = \frac{h}{2p} [(f(b+3h) - 4f(b+2h) + 5f(b+h) - 5f(b-h) + 4f(b-2h) - f(b-3h)) - (f(a+3h) - 4f(a+2h) + 5f(a+h) - 5f(a-h) + 4f(a-2h) - f(a-3h))] \end{cases}$$

için

$$(4.38) \sum_{k=1}^3 \frac{B_{2k} \left(\frac{1}{2}\right)}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) h^{2k} + B_1 + B_3 + B_5 = -\frac{181p - 241920}{241920p} (f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)) h^6 + \dots \Rightarrow 181p - 241920 = 0 \Rightarrow p = \frac{241920}{181}$$

katsayısını buluruz ki buradan

$$(4.39) B_5 = \frac{181h}{2 \times 241920} [(f(b+3h) - 4f(b+2h) + 5f(b+h) - 5f(b-h) + 4f(b-2h) - f(b-3h)) - (f(a+3h) - 4f(a+2h) + 5f(a+h) - 5f(a-h) + 4f(a-2h) - f(a-3h))] + O(h^8)$$

yaklaşıklıkta elde etmiş oluruz.

Dördüncü olarak,

$$(4.40) \begin{cases} B_1 = \frac{h}{24} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2}\right) - f\left(b - \frac{h}{2}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{h}{2}\right) \right) \right], \\ B_3 = -\frac{17h}{2 \times 5760} [(f(b+2h) - 2f(b+h) + 2f(b-h) - f(b-2h)) - (f(a+2h) - 2f(a+h) + 2f(a-h) - f(a-2h))], \\ B_5 = \frac{181h}{2 \times 241920} [(f(b+3h) - 4f(b+2h) + 5f(b+h) - 5f(b-h) + 4f(b-2h) - f(b-3h)) - (f(a+3h) - 4f(a+2h) + 5f(a+h) - 5f(a-h) + 4f(a-2h) - f(a-3h))], \\ B_7 = \frac{h}{2p} [(f(b+4h) - 6f(b+3h) + 14f(b+2h) - 14f(b+h) + 14f(b-h) - 14f(b-2h) + 6f(b-3h) - f(b-4h)) - (f(a+4h) - 6f(a+3h) + 14f(a+2h) - 14f(a+h) + 14f(a-h) - 14f(a-2h) + 6f(a-3h) - f(a-4h))] \end{cases}$$

yaklaşıklıklarını göz önüne alırsak,

$$(4.41) \sum_{k=1}^4 \frac{B_{2k} \left(\frac{1}{2}\right)}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) h^{2k} + B_1 + B_3 + B_5 + B_7 = \underbrace{\frac{82009p + 464486400}{464486400p}}_{=0} (f^{(7)}(b) - f^{(7)}(a)) h^8 + \dots \Rightarrow p = -\frac{464486400}{82009}$$

katsayısını buluruz ki buradan şu sonucu elde ederiz (ki **Ole Amble**, tezinde bu sonuç hakkında bir şey söylemez):

$$(4.42) B_7 = -\frac{82009h}{2 \times 464486400} [(f(b+4h) - 6f(b+3h) + 14f(b+2h) - 14f(b+h) + 14f(b-h) - 14f(b-2h) + 6f(b-3h) - f(b-4h)) - (f(a+4h) - 6f(a+3h) + 14f(a+2h) - 14f(a+h) + 14f(a-h) - 14f(a-2h) + 6f(a-3h) - f(a-4h))] + O(h^{10}).$$

Şu halde bu sonuçlara göre (4.2)'deki trapezli  $T_3, T_5, T_7, T_9, \dots$  ve orta noktalı  $T_2, T_4, T_6, T_8, \dots$  yaklaşıklıkları şu şekilde verebiliriz: Eğer  $h = \frac{b-a}{n}$  farkı için  $T_0$ 'ı (2)'deki  $T_n$  orta nokta formülü ve  $T_1$ 'i (1)'deki  $K_n$  trapez formülünü olarak alırsak **Ole Amble** tarafından (4.2)'de kapalı bir şekilde verilen yaklaşıklıkları (ki  $T_3$  hariç) şu şekilde açmış olurum:

**Piobert-Parmentier Metodu'nun Q Üzerinde Genelleştirilmesi**

$$\begin{aligned}
 T_3 &= T_1 + A_1 = K_n = h \frac{f(a) + f(b)}{2} + h \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) - \frac{h}{24} [(f(b+h) - f(b-h)) - (f(a+h) - f(a-h))] + O(h^4), \\
 T_5 &= T_3 + A_3 = T_3 + \frac{11h}{1440} [(f(b+2h) - 2f(b+h) + 2f(b-h) - f(b-2h)) - (f(a+2h) - 2f(a+h) + 2f(a-h) - f(a-2h))] + O(h^6), \\
 T_7 &= T_5 + A_5 = T_5 - \frac{191h}{120960} [(f(b+3h) - 4f(b+2h) + 5f(b+h) - 5f(b-h) + 4f(b-2h) - f(b-3h)) - (f(a+3h) - 4f(a+2h) + 5f(a+h) - 5f(a-h) + 4f(a-2h) - f(a-3h))] + O(h^8), \\
 T_9 &= T_7 + A_7 = T_7 + \frac{2497h}{7257600} [(f(b+4h) - 6f(b+3h) + 14f(b+2h) - 14f(b+h) + 14f(b-h) - 14f(b-2h) + 6f(b-3h) - f(b-4h)) - (f(b+4h) - 6f(b+3h) + 14f(b+2h) - 14f(b+h) + 14f(b-h) - 14f(b-2h) + 6f(b-3h) - f(b-4h))] + O(h^{10}), \\
 &\vdots \\
 T_2 &= T_0 + A_0 = h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h\right) + \frac{h}{24} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2}\right) - f\left(b - \frac{h}{2}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{h}{2}\right) \right) \right] + O(h^4) \\
 T_4 &= T_2 + A_2 = T_2 - \frac{17h}{11520} [(f(b+2h) - 2f(b+h) + 2f(b-h) - f(b-2h)) - (f(a+2h) - 2f(a+h) + 2f(a-h) - f(a-2h))] + O(h^6), \\
 T_6 &= T_4 + A_4 = T_4 + \frac{181h}{483840} [(f(b+3h) - 4f(b+2h) + 5f(b+h) - 5f(b-h) + 4f(b-2h) - f(b-3h)) - (f(a+3h) - 4f(a+2h) + 5f(a+h) - 5f(a-h) + 4f(a-2h) - f(a-3h))] + O(h^8), \\
 T_8 &= T_6 + A_6 = T_6 - \frac{82009h}{928972800} [(f(b+4h) - 6f(b+3h) + 14f(b+2h) - 14f(b+h) + 14f(b-h) - 14f(b-2h) + 6f(b-3h) - f(b-4h)) - (f(b+4h) - 6f(b+3h) + 14f(b+2h) - 14f(b+h) + 14f(b-h) - 14f(b-2h) + 6f(b-3h) - f(b-4h))] + O(h^{10}), \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{4.43}$$

İşte bu yaklaşıklıkları (4.3)'teki örneğe uyguladığımda Tablo 4.1'deki çıktıları bulmuş ve bunları tablonun altındaki anılan tarihlerde **Ole Amble**'in sonuçlarıyla karşılaştırmıştım. Buna göre **Ole Amble**'in (4.2)'deki sol sütundaki trapezli yaklaşıklıklarla elde ettiği sonuçların tamamı doğruyken sağ sütundaki orta noktalı yaklaşıklıklarla elde ettiği sonuçlarda inanılmaz hatalar yapmıştı. Bu sonuca göre ilk hata  $T_0$ 'dadır. Fakat bu hata affedilir gibi değildir, çünkü bu sonuç orta nokta formülünden geliyordu. Kaldı ki o,  $T_0$ 'ı (20)'de buradaki gibi doğru olarak vermişti. O zaman bu hata makineden yanlış bir hesabın sonucunda alınmış olmalıydı. O ikinci olarak  $T_4$ 'de hata yapar. Çünkü ona göre  $T_4 = 1,00000013$  iken orijinalden yuvarlatmayla  $T_4 = 1,00000024$  elde edilmektedir. O üçüncü ve son olarak  $T_6$ 'da hata yapar. Çünkü yine ona göre, 1 tane sıfırı eksik yazarak  $T_6 = 1,000000013$  iken orijinalden yuvarlatmayla  $T_6 = 1,000000004$  elde edilmektedir. Ayrıca Tablo 4.1'in son satırındaki  $T_8$  ve  $T_9$ 'a ait sonuçları o vermez ya da bildirmez; ne olduklarını görmemiz için ben verdim!

**Morpheus:** “Dün gece bir rüya gördüm ama şimdi unuttum!”, [Matrix Reloaded](#), [Daniel 2:3](#).

Aslında **Ole Amble** bir düş görüyordu (Y.N. (4.2)'deki ya da (4.43)'teki yaklaşıklıkları elle teker teker bulmak çok zaman alıyordu). Sonra bu yaklaşıklıklarla (4.3)'teki örnekten MADAS ATG-20'de “1” sonucuna ulaşana kadar hesaplarını yaptı. Fakat  $T_8$  ve  $T_9$ 'dan çıktıları alamadığı için bir türlü “1”i görmesi mümkün olmadı. Eğer bu hataları bir kenara bırakır ve  $T_8$  ve  $T_9$ 'u hesaplayabilmiş olsaydı, o zaman Tablo 4.1'deki sonuçları elde edecek ve böylece “1”i görebilecekti. 3 yıl sonra **Romberg**, **Ole Amble**'in gördüğü rüyayı yorumlamaya başladı ve kendi metoduyla tezinde şöyle açıkladı:

Artan Mertebelere Göre Yaklaşık Değerler Tablosu				
Aralık Uzunluğu	Kalan Değerler			
	$h^4$	$h^6$	$h^8$	$h^{10}$
8h	$\hat{T}_1 = 0,916297857$			
	$\hat{U}_1 = 1,018160673$			
4h	$\hat{T}_2 = 0,994339480$	$\hat{S}_2 = 0,999542255$		
	$\hat{U}_2 = 1,001125581$	$\hat{V}_2 = 0,999989908$		
2h	$\hat{T}_4 = 0,999639087$	$\hat{S}_4 = 0,99992394$	$\hat{R}_4 = 0,99999539$	
	$\hat{U}_4 = 1,000070227$	$\hat{V}_4 = 0,99999870$	$\hat{W}_4 = 1,000000028$	
h	$\hat{T}_8 = 0,999977330$	$\hat{S}_8 = 0,99999879$	$\hat{R}_8 = 0,99999998$	$\hat{Q}_8 = 1,0$

Tablo 4.2. Romberg'in **Ole Amble**'nin metoduna göre hazırladığı tablo, [Ole Amble Algoritması, 01.02.2019, 20:21](#), Tablo 4.1.

İşte bu tablodan görüldüğü gibi **Romberg**, **Ole Amble**'in bir türlü ulaşamadığı “1”e yalnızca  $T_2$  ve  $T_3$  ile birikimli olarak ( $T_2$  ve  $T_3$ 'e ekstrapolasyon uygulayarak) daha kısa yoldan ulaşmış ve böylece **Ole Amble**'in gördüğü düşün ne anlama geldiğini doğru bir şekilde yorumlamış oldu. Tıpkı **Daniel**'in kitabında olduğu gibi. Çünkü **Daniel** peygamber bir Babil sürgünüydü ve Kral **II. Nabukadnezar**'ın rüyasını yorumlarken, Nazi sürgünü **Romberg** de **Ole Amble**'in rüyasını yorumlamıştı (Bkz. [“Rasyonel Üçgenler”](#), İthaf. **Saddam Hüseyin**, kendisini **II. Nabukadnezar**'ın reenkarnasyonu, hatta oğlu olduğunu iddia ediyordu). Bana da bir sürgün olarak (ki gerçekten öyleyimdir. Ama isterseniz bunu başka bir makalede anlatayım) bu 2 sıkı dostun ortak hikâyesini orijinal tezlerinden anlatmak düştü (Bkz. [“ \$K\_n\$  ve  \$T\_n\$  İçin İndirgeme Bağlantıları](#)” ve [“Genelleştirilmiş Ole Amble Algoritması”](#)). Dikkat ediniz şimdiye kadar bu ortak hikâyeyi anlatmaya çalışmayı bırakın, bu tezleri inceleyip modernize eden kimse çıkmadı bile. Hepsi yeni bir çıkarım peşinde koştu. Çünkü NTH'den nümerik analizci **Tore Håvié**'nin (ki dönem farkı olmasına rağmen **Owren** tanır) [“Remarks On Some Modified Romberg Algorithms For Numerical Integration, 1986”](#) adlı tezi, **Romberg**'in tezinin ZAMM'daki ilk yayını için kendisini aldattığını söylediği **E. Stiefel**'in [“Altes und Neues über numerische Quadratur”](#) adlı tezi ve diğerlerinin yayınları hep bu yönde olmuştur. Bu arada bir hatayı da düzeltiyim: **Romberg**, 14.10.1996'da kendisiyle bir röportaj yapan **Seiji Fujino**'ya tezini DKNVS'den önce GAMM'da yayımlatmak istediğini ama **E. Stiefel**'in kendisini atlattığını söylemişti (Bkz. [“Romberg Integralinin Mucidi Werner Romberg İle Bir Röportaj Gerçekleştirdim”](#), Orada GAMM kelimesi 63. sayfanın sol sütununun sonunda geçer). Oysa bazı makalelerimde geçen bu yer GAMM değil **E. Stiefel**'in makalesinden görüldüğü gibi ZAMM olacaktır. Demek ki insan 87 yaşındayken (ki **Knut Hamsun** da 84 yaşındayken **Hitler** ile görüşmeye gitmişti. Bkz. [Resim 4](#)) geçmişe dönüp şöyle bir baktığı zaman, hafıza zayıflığı ortaya çıkıyormuş. Yani bu da **Romberg**'in hatası idi!

**Genelleştirilmiş Romberg Metodu Hakkında**

Şimdi (4.43)'te vermiş olduğum yaklaşıklıklar **Genelleştirilmiş Romberg Metodu**'na ilişkin ilk 4 açılımı verir. Bu konuda **Romberg**, "[Vereinfachte numerische Integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 28, 1955, p. 30-36, MR 61, 517](#)" adlı tezinin sonunda yukarıdaki Tablo 4.2'nin altında şu notu düşer: "*Q<sub>8</sub>'in I ile 8 ondalıkta, hatta Q<sub>8</sub>'in 10 ondalıkta çakıştığını görüyoruz. Hangi yöntemin kullanılacağı tamamen F<sub>k</sub>'nin nasıl hesaplanabileceğine bağlıdır. Eğer bulması kolaysa, onları daha kesin olarak sınıflandırmak daha iyidir. Sayısal hesaplamamız çok fazla çalışma gerektiriyorsa, burada verildiği gibi yüksek bir yaklaşıklık yöntemi öneririz. (Wir sehen, dass Q<sub>8</sub> mit I in 8, Q<sub>8</sub> sogar in 10 Dezimalen übereinstimmt. Welche Methode man verwendet, hängt ganz davon ab, wie sich die F<sub>k</sub> berechnen lassen. Sind sie leicht zu finden, teilt man besser feiner ein. Erfordert ihre numerische Berechnung viel Arbeit, dann empfiehlt sich eine Methode hoher Näherung, wie wir sie hier angeben haben.)*"

İtiraf etmeliyim ki **Romberg**'in, "*Sayısal hesaplamamız çok fazla çalışma gerektiriyorsa, burada verildiği gibi yüksek bir yaklaşıklık yöntemi öneririz. (Erfordert ihre numerische Berechnung viel Arbeit, dann empfiehlt sich eine Methode hoher Näherung, wie wir sie hier angeben haben.)*" açıklamasından pek bir şey anlamamıştım (Bkz. "[Genelleştirilmiş Ole Amble Algoritması](#)", S. 27. (2.102)'nin altındaki ve üstündeki paragraflar). Ama 31.10.2021, 11:18:00'de bilgisayarıma indirdiğim "[A generalized Romberg differentiation procedure for calculation of hyperpolarizabilities](#)" makalesini okurken 41. sayfadaki sol sütunun son paragrafındaki açıklamaya göre bu fikrin **Romberg**'ten geldiğini gördüm. Yani **Romberg** bu açıklamayla metodun genişletilmesinden yani genelleştirilmesinden bahsediyormuş ve tezindeki (4.43)'teki T<sub>2</sub> ve T<sub>3</sub> ile sadece bir örnek vermiş. Bu durumda olayı tekrar ele alırsak şunları söyleyebiliriz: **Ole Amble** 1952'de tezini yazdıktan sonra **Romberg** devreye giriyor ve o da 1955'te bir tez yazıyor. Fakat **Romberg** (4.43)'teki yaklaşıklıkların elde edilmesindeki metodu **Ole Amble**'dan öğrendikten sonra **H. Rutishauser**'a veriyor ve o da 1963'te "[Ausdehnung des Rombergschen Prinzips](#)" adlı bir diğer tezi yazıyor (Bkz. Daha geniş bilgi için **Heinz Rutishauser**'ın "[Lectures on Numerical Mathematics](#)" kitabına). **Bu son tezde Rutishauser Ole Amble**'ın (4.43)'teki A<sub>0</sub>, A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, ... yaklaşıklıklarını nümerik türev almada kullanır. Ama bu tespiti benden önce **Tore Håvie** ve çağdaşlarının yapması gerekiyordu. Tabii ki en doğrusunu NTNU'dakiler bilir. Çünkü **Romberg**'in ve **Ole Amble**'ın NTNU'daki tüm çalışmalarına sahip değilim. Örneğin **Romberg**'in "[Numerische Methoden: Kap. 2: Interpolation und Integration](#)", "[Romberg Seminar on Quadrature/Interpolation/Extrapolation and Rational Approximations](#)" ve **Ole Amble**'ın "[Numeriske metoder II: forelesninger holdt høsten 1966-våren 1967](#)", "[An autoadaptive method for numerical integration](#)" ve benzeri çalışmaları konuya doğrudan ışık tutacak çalışmalardır ve bunlar bir tek NTNU'da vardır.

**Not 4.3.** Burada söz konusu olan **Ole Amble**'ın (4.43)'teki yaklaşıklıklarına ilişkin programları Mathematica'da şöyle çıkarttım:

1. [Ole Amble Metodu, 1952](#) (Oluşturma: 29.10.2021, 22:58:11, Değiştirme: 30.10.2021, 00:55:15):
  - 1.1. [T2 ve T3 Yaklaşıklıklarının Tam Yakınsamasına İlişkin Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), 29.10.2021, 22:15:42,
  - 1.2. [T4 ve T5 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), 29.10.2021, 22:16:46,
  - 1.3. [T6 ve T7 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), 29.10.2021, 22:19:29,
  - 1.4. [T8 ve T9 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), 29.10.2021, 22:34:22.

Bu programların ilki doğrudan **Ole Amble**'in tezine yönelik iken (ki bu programdan elde edilen Tablo 4.1'den görüldüğü üzere eksiksiz ve hatasızdır) sonrakiler **Romberg**'in tezinde geçen 1.1'deki gibidirler. Buna göre son 4 programı herhangi belirli bir I integrali için kullanabilirsiniz. Bu programları nasıl kullanacağınızı her bir programda yönergelerle anlattım.

**4.1.2. Ole Amble'in Yaklaşıklıklarının Yakınsaklıklarının Hızlandırılması**

Şimdi eğer **Ole Amble**'in (4.43)'teki yaklaşıklıklarının yakınsaklıklarını hızlandırırken **Romberg**'in T<sub>2</sub> ve T<sub>3</sub>'te yaptığı gibi yazarsam trapezli yaklaşıklıkları;

$$\begin{aligned}
 T_3 &= T_1 + A_1 = K_n = h \frac{f(a) + f(b)}{2} + h \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) - \frac{h}{24} [(f(b+h) - f(b-h)) - (f(a+h) - f(a-h))] + O(h^4), \\
 T_5 &= T_3 + A_3 = T_3 + \frac{11h}{180} \left[ \left( f\left(b + 2 \cdot \frac{h}{2}\right) - 2f\left(b + \frac{h}{2}\right) + 2f\left(b - \frac{h}{2}\right) - f\left(b - 2 \cdot \frac{h}{2}\right) \right) - \left( f\left(a + 2 \cdot \frac{h}{2}\right) - 2f\left(a + \frac{h}{2}\right) + 2f\left(a - \frac{h}{2}\right) - f\left(a - 2 \cdot \frac{h}{2}\right) \right) \right] = T_3 + \frac{11h}{1440} \left[ \left( f(b+h) - 2f\left(b + \frac{h}{2}\right) + 2f\left(b - \frac{h}{2}\right) - f(b-h) \right) - \left( f(a+h) - 2f\left(a + \frac{h}{2}\right) + 2f\left(a - \frac{h}{2}\right) - f(a-h) \right) \right] + O(h^6), \\
 T_7 &= T_5 + A_5 = T_5 - \frac{142h}{945} \left[ \left( f\left(b + 3 \cdot \frac{h}{4}\right) - 4f\left(b + 2 \cdot \frac{h}{4}\right) + 5f\left(b + \frac{h}{4}\right) - 5f\left(b - \frac{h}{4}\right) + 4f\left(b - 2 \cdot \frac{h}{4}\right) - f\left(b - 3 \cdot \frac{h}{4}\right) \right) - \left( f\left(a + 3 \cdot \frac{h}{4}\right) - 4f\left(a + 2 \cdot \frac{h}{4}\right) + 5f\left(a + \frac{h}{4}\right) - 5f\left(a - \frac{h}{4}\right) + 4f\left(a - 2 \cdot \frac{h}{4}\right) - f\left(a - 3 \cdot \frac{h}{4}\right) \right) \right] \\
 (4.44) \quad &= T_5 - \frac{142h}{945} \left[ \left( f\left(b + \frac{3h}{4}\right) - 4f\left(b + \frac{h}{2}\right) + 5f\left(b + \frac{h}{4}\right) - 5f\left(b - \frac{h}{4}\right) + 4f\left(b - \frac{h}{2}\right) - f\left(b - \frac{3h}{4}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{3h}{4}\right) - 4f\left(a + \frac{h}{2}\right) + 5f\left(a + \frac{h}{4}\right) - 5f\left(a - \frac{h}{4}\right) + 4f\left(a - \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{3h}{4}\right) \right) \right] + O(h^8), \\
 T_9 &= T_7 + A_7 = T_7 - \frac{5888h}{14175} \left[ \left( f\left(b + 4 \cdot \frac{h}{8}\right) - 6f\left(b + 3 \cdot \frac{h}{8}\right) + 14f\left(b + 2 \cdot \frac{h}{8}\right) - 14f\left(b + \frac{h}{8}\right) + 14f\left(b - \frac{h}{8}\right) - 14f\left(b - 2 \cdot \frac{h}{8}\right) + 6f\left(b - 3 \cdot \frac{h}{8}\right) - f\left(b - 4 \cdot \frac{h}{8}\right) \right) - \left( f\left(a + 4 \cdot \frac{h}{8}\right) - 6f\left(a + 3 \cdot \frac{h}{8}\right) + 14f\left(a + 2 \cdot \frac{h}{8}\right) - 14f\left(a + \frac{h}{8}\right) + 14f\left(a - \frac{h}{8}\right) - 14f\left(a - 2 \cdot \frac{h}{8}\right) + 6f\left(a - 3 \cdot \frac{h}{8}\right) - f\left(a - 4 \cdot \frac{h}{8}\right) \right) \right] \\
 &= T_7 - \frac{5888h}{14175} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2}\right) - 6f\left(b + \frac{3h}{8}\right) + 14f\left(b + \frac{h}{4}\right) - 14f\left(b + \frac{h}{8}\right) + 14f\left(b - \frac{h}{8}\right) - 14f\left(b - \frac{h}{4}\right) + 6f\left(b - \frac{3h}{8}\right) - f\left(b - \frac{h}{2}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2}\right) - 6f\left(a + \frac{3h}{8}\right) + 14f\left(a + \frac{h}{4}\right) - 14f\left(a + \frac{h}{8}\right) + 14f\left(a - \frac{h}{8}\right) - 14f\left(a - \frac{h}{4}\right) + 6f\left(a - \frac{3h}{8}\right) - f\left(a - \frac{h}{2}\right) \right) \right] + O(h^{10}), \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

ve orta noktalı yaklaşıklıkları;



## Piobert-Parmentier Metodu'nun $\mathbb{Q}$ Üzerinde Genelleştirilmesi

$$\begin{aligned}
 T_2 &= T_0 + A_0 = h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h\right) + \frac{h}{24} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2}\right) - f\left(b - \frac{h}{2}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2}\right) - f\left(a - \frac{h}{2}\right) \right) \right] + O(h^4), \\
 T_4 &= T_2 + A_2 = T_2 - \frac{17h}{180} \left[ \left( f\left(b + 2 \cdot \frac{h}{4}\right) - 2f\left(b + \frac{h}{4}\right) + 2f\left(b - \frac{h}{4}\right) - f\left(b - 2 \cdot \frac{h}{4}\right) \right) - \left( f\left(a + 2 \cdot \frac{h}{4}\right) - 2f\left(a + \frac{h}{4}\right) + 2f\left(a - \frac{h}{4}\right) - f\left(a - 2 \cdot \frac{h}{4}\right) \right) \right] = T_2 - \frac{17h}{180} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2}\right) - 2f\left(b + \frac{h}{4}\right) + 2f\left(b - \frac{h}{4}\right) - f\left(b - \frac{h}{2}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2}\right) - 2f\left(a + \frac{h}{4}\right) + 2f\left(a - \frac{h}{4}\right) - f\left(a - \frac{h}{2}\right) \right) \right] + O(h^6), \\
 T_6 &= T_4 + A_4 = T_4 + \frac{874h}{945} \left[ \left( f\left(b + 3 \cdot \frac{h}{8}\right) - 4f\left(b + 2 \cdot \frac{h}{8}\right) + 5f\left(b + \frac{h}{8}\right) - 5f\left(b - \frac{h}{8}\right) + 4f\left(b - 2 \cdot \frac{h}{8}\right) - f\left(b - 3 \cdot \frac{h}{8}\right) \right) - \left( f\left(a + 3 \cdot \frac{h}{8}\right) - 4f\left(a + 2 \cdot \frac{h}{8}\right) + 5f\left(a + \frac{h}{8}\right) - 5f\left(a - \frac{h}{8}\right) + 4f\left(a - 2 \cdot \frac{h}{8}\right) - f\left(a - 3 \cdot \frac{h}{8}\right) \right) \right] \\
 (4.45) \quad &= T_4 + \frac{874h}{945} \left[ \left( f\left(b + \frac{3h}{8}\right) - 4f\left(b + \frac{h}{4}\right) + 5f\left(b + \frac{h}{8}\right) - 5f\left(b - \frac{h}{8}\right) + 4f\left(b - \frac{h}{4}\right) - f\left(b - \frac{3h}{8}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{3h}{8}\right) - 4f\left(a + \frac{h}{4}\right) + 5f\left(a + \frac{h}{8}\right) - 5f\left(a - \frac{h}{8}\right) + 4f\left(a - \frac{h}{4}\right) - f\left(a - \frac{3h}{8}\right) \right) \right] + O(h^8), \\
 T_8 &= T_6 + A_6 = T_6 - \frac{1817344h}{14175} \left[ \left( f\left(b + 4 \cdot \frac{h}{16}\right) - 6f\left(b + 3 \cdot \frac{h}{16}\right) + 14f\left(b + 2 \cdot \frac{h}{16}\right) - 14f\left(b + \frac{h}{16}\right) + 14f\left(b - \frac{h}{16}\right) - 14f\left(b - 2 \cdot \frac{h}{16}\right) + 6f\left(b - 3 \cdot \frac{h}{16}\right) - f\left(b - 4 \cdot \frac{h}{16}\right) \right) - \left( f\left(a + 4 \cdot \frac{h}{16}\right) - 6f\left(a + 3 \cdot \frac{h}{16}\right) + 14f\left(a + 2 \cdot \frac{h}{16}\right) - 14f\left(a + \frac{h}{16}\right) + 14f\left(a - \frac{h}{16}\right) - 14f\left(a - 2 \cdot \frac{h}{16}\right) + 6f\left(a - 3 \cdot \frac{h}{16}\right) - f\left(a - 4 \cdot \frac{h}{16}\right) \right) \right] \\
 &= T_6 - \frac{1817344h}{14175} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{4}\right) - 6f\left(b + \frac{3h}{16}\right) + 14f\left(b + \frac{h}{8}\right) - 14f\left(b + \frac{h}{16}\right) + 14f\left(b - \frac{h}{16}\right) - 14f\left(b - \frac{h}{8}\right) + 6f\left(b - \frac{3h}{16}\right) - f\left(b - \frac{h}{4}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{4}\right) - 6f\left(a + \frac{3h}{16}\right) + 14f\left(a + \frac{h}{8}\right) - 14f\left(a + \frac{h}{16}\right) + 14f\left(a - \frac{h}{16}\right) - 14f\left(a - \frac{h}{8}\right) + 6f\left(a - \frac{3h}{16}\right) - f\left(a - \frac{h}{4}\right) \right) \right] + O(h^{10}), \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

şeklinde verebilirim. Burada şuna dikkat ediniz: (4.43)'te  $A_0\left(\frac{h}{2}\right), A_1(h), A_2(h), A_3(h), A_4(h), A_5(h), A_6(h), A_7(h)$  iken ve bunlardan ilk ikisi **Romberg**'in tezinde geçtiğinden ve “eğer bu düşünceyi diğerlerine de uygularsam sonuç ne olur?” dedikten sonra (4.44)&(4.45)'teki  $A_0\left(\frac{h}{2}\right), A_1(h), A_2\left(\frac{h}{4}\right), A_3\left(\frac{h}{2}\right), A_4\left(\frac{h}{8}\right), A_5\left(\frac{h}{4}\right), A_6\left(\frac{h}{16}\right), A_7\left(\frac{h}{8}\right)$  yaklaşıklıkları söz konusu oldu ve bunların katsayılarını (4.43)'tekiler gibi teker teker hesapladığım zaman, aynı mertebeden yakınsama yapanların katsayılarındaki paydaların aynı olduklarını (ki açıklaması kolay değil ama payları farklı olmasına rağmen bunların trapez ve orta nokta formülleriyle absorbe edilmeleri bir diğer şaşırtıcı noktadır), dolayısıyla hemen hemen eş yakınsama yaptıklarını fark ettim!

İşte bu yeni yaklaşıklıklarla (4.3)'teki örnekten şu sonuçları elde ettim:

Yakınsaklıkları Hızlandırılmış Ole Amble Yaklaşıklıkları, 2021	
$T_1 = 0,99428188829215795204$	$T_0 = 1,0028615075117907939$
$T_3 = 0,99992844392204131719$	$T_2 = 1,0000138677438771599$
$T_5 = 0,99999990565075904155$	$T_4 = 1,000000018189499133$
$T_7 = 1,00000000000863428856$	$T_6 = 1,00000000002111056391$
$T_9 = 0,9999999999989653000$	$T_8 = 1,00000000000003375993$

**Tablo 4.3.** (4.44)&(4.45)'teki yaklaşıklıklarla (4.3)'teki örnekten elde edilen çıktılar.

**Not 4.4.** Burada **Ole Amble**'in (4.44)&(4.45)'teki yakınsaklıkları iyileştirilmiş yaklaşıklıklarına ilişkin programları Mathematica'da şöyle çıkarttım:

2. [Yakınsaklığı Hızlandırılmış Ole Amble Metodu, 2021](#) (Oluşturma: 30.10.2021, 04:36:36, Değiştirme: 30.10.2021, 04:38:44):
  - 2.1. [Yakınsaklığı Hızlandırılmış T4 ve T5 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), 30.10.2021, 05:03:33,
  - 2.2. [Yakınsaklığı Hızlandırılmış T6 ve T7 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), 30.10.2021, 05:12:17,
  - 2.3. [Yakınsaklığı Hızlandırılmış T8 ve T9 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), 30.10.2021, 05:18:10.

Yine bu programların ilkinde **Ole Amble**'in tezini hedefledim. Ama bu seferkinde, eğer Tablo 4.2'deki çıktıları Tablo 4.1'dekilerle karşılaştırırsanız, yakınsaklık hızı daha iyidir, dolayısıyla çıktılar stabildir. Fakat buna rağmen  $T_7$ 'de 1'i aşan anomali oluştu. Bunun düzeltilmiş şeklini bir sonraki yöntemden elde edilen Tablo 4.4'te görebilirsiniz. Burada yine son 3 programı herhangi belirli bir I integrali için kullanabilirsiniz ve bunları nasıl kullanacağınızı her bir programda yönergelerle anlattım.

Son olarak **Rutishauser**'in f fonksiyonunun türevleri için merkezi fark formüllerindeki h farkını sıfıra yakınsattığı gibi (4.44)&(4.45)'teki yaklaşıklıkların limitsel yakınsamalarını tam istikrarlı (stabil) hale getirelim.

### 4.1.3. Ole Amble'in Yaklaşıklıklarının Tam Yakınsamasına İlişkin Genel Metot

**Rutishauser**'in 1963'teki “[Ausdehnung des Rombergschen Prinzips](#)” adlı tezindeki “[§ 3. Nümerik Diferansiyel \(Numerische Differentiation\)](#)” konusuna ilişkin verdiği örneklerdeki gibi h'yi sıfıra yakınsatmak için (bkz.  $f(x) = \cot x$ 'in  $x = 0,04$ 'teki 1. türevinin değerinin hesabındaki  $h_0 = 0,0128$  farkına. S. [51-52](#)). Fakat bu Romberg metodunda h'yi  $2^n$ 'ye bölmek demektir. Bu şekildeki trapez ve orta nokta formüllerinin “**modifiye formülleri**” olduklarını zaten biliyoruz. Burada ise  $h_n$ 'nin  $2^q$ 'ya bölümü söz konusudur. Amaç  $A_n$ 'lerin yakınsaklıklarını tam istikrarlı hale getirmektir (4.44)&(4.45)'teki  $A_0\left(\frac{h}{2}\right), A_1(h), A_2\left(\frac{h}{4}\right), A_3\left(\frac{h}{2}\right), A_4\left(\frac{h}{8}\right), A_5\left(\frac{h}{4}\right), A_6\left(\frac{h}{16}\right), A_7\left(\frac{h}{8}\right)$  yaklaşıklıklarında  $h \rightarrow \frac{h}{2^q}$  dönüşümünü yapar ve p katsayılarını hesaplırsak şu sonuçları elde ederiz:

**Piobert-Parmentier Metodu'nun  $\mathbb{Q}$  Üzerinde Genelleştirilmesi**

$$\begin{aligned}
 T_3 &= T_1 + A_1 = K_n = h \frac{f(a) + f(b)}{2} + h \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) - \frac{2^q h}{24} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2^q}\right) - f\left(b - \frac{h}{2^q}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2^q}\right) - f\left(a - \frac{h}{2^q}\right) \right) \right] + O(h^4), \\
 T_5 &= T_3 + A_3 = T_3 + \frac{2^{q-2}(2^{2q} + 10)h}{45} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2^q}\right) - 2f\left(b + \frac{h}{2^{q+1}}\right) + 2f\left(b - \frac{h}{2^{q+1}}\right) - f\left(b - \frac{h}{2^q}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2^q}\right) - 2f\left(a + \frac{h}{2^{q+1}}\right) + 2f\left(a - \frac{h}{2^{q+1}}\right) - f\left(a - \frac{h}{2^q}\right) \right) \right] + O(h^6), \\
 T_7 &= T_5 + A_5 = T_5 - \frac{2^{q+1}(21 \cdot 2^{2q} + 2^{4q+3} + 42)h}{945} \left[ \left( f\left(b + \frac{3h}{2^{q+2}}\right) - 4f\left(b + \frac{h}{2^{q+1}}\right) + 5f\left(b + \frac{h}{2^{q+2}}\right) - 5f\left(b - \frac{h}{2^{q+2}}\right) + 4f\left(b - \frac{h}{2^{q+1}}\right) - f\left(b - \frac{3h}{2^{q+2}}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{3h}{2^{q+2}}\right) - 4f\left(a + \frac{h}{2^{q+1}}\right) + 5f\left(a + \frac{h}{2^{q+2}}\right) - 5f\left(a - \frac{h}{2^{q+2}}\right) + 4f\left(a - \frac{h}{2^{q+1}}\right) - f\left(a - \frac{3h}{2^{q+2}}\right) \right) \right] + O(h^8), \\
 T_9 &= T_7 + A_7 = T_7 + \frac{2^{q+8}(3 \cdot 2^{6q+4} + 5 \cdot 2^{4q+3} - 21 \cdot 2^{2q} - 90)h}{14175} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2^{q+1}}\right) - 6f\left(b + \frac{3h}{2^{q+3}}\right) + 14f\left(b + \frac{h}{2^{q+2}}\right) - 14f\left(b + \frac{h}{2^{q+3}}\right) + 14f\left(b - \frac{h}{2^{q+3}}\right) - 14f\left(b - \frac{h}{2^{q+2}}\right) + 6f\left(b - \frac{3h}{2^{q+3}}\right) - f\left(b - \frac{h}{2^{q+1}}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2^{q+1}}\right) - 6f\left(a + \frac{3h}{2^{q+3}}\right) + 14f\left(a + \frac{h}{2^{q+2}}\right) - 14f\left(a + \frac{h}{2^{q+3}}\right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 14f\left(a - \frac{h}{2^{q+3}}\right) - 14f\left(a - \frac{h}{2^{q+2}}\right) + 6f\left(a - \frac{3h}{2^{q+3}}\right) - f\left(a - \frac{h}{2^{q+1}}\right) \right) \right] + O(h^{10}), \\
 &\vdots \\
 T_2 &= T_0 + A_0 = h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h\right) + \frac{2^q h}{24} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2^{q+1}}\right) - f\left(b - \frac{h}{2^{q+1}}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2^{q+1}}\right) - f\left(a - \frac{h}{2^{q+1}}\right) \right) \right] + O(h^4), \\
 T_4 &= T_2 + A_2 = T_2 - \frac{2^{q-2}(7 \cdot 2^{2q} + 10)h}{45} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2^{q+1}}\right) - 2f\left(b + \frac{h}{2^{q+2}}\right) + 2f\left(b - \frac{h}{2^{q+2}}\right) - f\left(b - \frac{h}{2^{q+1}}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2^{q+1}}\right) - 2f\left(a + \frac{h}{2^{q+2}}\right) + 2f\left(a - \frac{h}{2^{q+2}}\right) - f\left(a - \frac{h}{2^{q+1}}\right) \right) \right] + O(h^6), \\
 T_6 &= T_4 + A_4 = T_4 + \frac{2^{q+1}(147 \cdot 2^{2q} + 31 \cdot 2^{4q+3} + 42)h}{945} \left[ \left( f\left(b + \frac{3h}{2^{q+3}}\right) - 4f\left(b + \frac{h}{2^{q+2}}\right) + 5f\left(b + \frac{h}{2^{q+3}}\right) - 5f\left(b - \frac{h}{2^{q+3}}\right) + 4f\left(b - \frac{h}{2^{q+2}}\right) - f\left(b - \frac{3h}{2^{q+3}}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{3h}{2^{q+3}}\right) - 4f\left(a + \frac{h}{2^{q+2}}\right) + 5f\left(a + \frac{h}{2^{q+3}}\right) - 5f\left(a - \frac{h}{2^{q+3}}\right) + 4f\left(a - \frac{h}{2^{q+2}}\right) - f\left(a - \frac{3h}{2^{q+3}}\right) \right) \right] + O(h^8), \\
 T_8 &= T_6 + A_6 = T_6 - \frac{2^{q+8}(381 \cdot 2^{6q+4} + 155 \cdot 2^{4q+3} - 147 \cdot 2^{2q} - 90)h}{14175} \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2^{q+2}}\right) - 6f\left(b + \frac{3h}{2^{q+4}}\right) + 14f\left(b + \frac{h}{2^{q+3}}\right) - 14f\left(b + \frac{h}{2^{q+4}}\right) + 14f\left(b - \frac{h}{2^{q+4}}\right) - 14f\left(b - \frac{h}{2^{q+3}}\right) + 6f\left(b - \frac{3h}{2^{q+4}}\right) - f\left(b - \frac{h}{2^{q+2}}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2^{q+2}}\right) - 6f\left(a + \frac{3h}{2^{q+4}}\right) + 14f\left(a + \frac{h}{2^{q+3}}\right) - 14f\left(a + \frac{h}{2^{q+4}}\right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 14f\left(a - \frac{h}{2^{q+4}}\right) - 14f\left(a - \frac{h}{2^{q+3}}\right) + 6f\left(a - \frac{3h}{2^{q+4}}\right) - f\left(a - \frac{h}{2^{q+2}}\right) \right) \right] + O(h^{10}), \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{4.46}$$

Bu yaklaşıklıklara göre (4.3) örneğinden  $q = 5$  için aşağıdaki sonuçları buluruz ki, bu son tablodaki sonuçlar Tablo 4.3'tekilerine göre daha istikrarlıdır. Örneğin  $T_7$ 'deki gibi bir anomali yok burada!

Tam Ole Amble'in Metodundaki Yaklaşıklıklar, 2021	
$T_1 = 0.99428188829215795204$	$T_0 = 1.0028615075117907939$
$T_3 = 0.99999340119831826228$	$T_2 = 1.0000057271656654506$
$T_5 = 0.9999998930731148314$	$T_4 = 1.0000000103384504451$
$T_7 = 0.9999999998171006968$	$T_6 = 1.00000000001813609791$
$T_9 = 0.9999999999996836175$	$T_8 = 1.00000000000003157058$

**Tablo 4.4.**  $q = 5$  için (4.46)'daki yaklaşıklıklarla (4.3)'teki örnekten elde edilen çıktılar.

**Not 4.5.** Burada *Ole Amble*'in (4.46)'daki yaklaşıklıklarının tam yakınsamasına ilişkin Mathematica programları şunlardır:

1. [Tam Ole Amble Metodu, 2021](#) (Oluşturma: 14.10.2021, 17:08:07, Değiştirme: 08.11.2021, 14:52:07):
  - 1.1. [T2 ve T3 Yaklaşıklıklarının Tam Yakınsamasına İlişkin Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), 08.11.2021, 14:52:07,
  - 1.2. [T4 ve T5 Yaklaşıklıklarının Tam Yakınsamasına İlişkin Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), 08.11.2021, 14:52:07,
  - 1.3. [T6 ve T7 Yaklaşıklıklarının Tam Yakınsamasına İlişkin Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), 08.11.2021, 14:52:07,
  - 1.4. [T8 ve T9 Yaklaşıklıklarının Tam Yakınsamasına İlişkin Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), 08.11.2021, 14:52:07.

Yine bu programların ilkinde *Ole Amble*'in tezini hedefleyerek çıktılarını tam istikrarlı hale getirdim. Çünkü Tablo 4.1 ve Tablo 4.3 ile Tablo 4.4'ü karşılaştırırsanız ilk satırlardaki çıktılarının aynı olduklarını görürsünüz. Fark bundan sonra başlıyor: Tablo 4.1 ve Tablo 4.3'teki ilk 2 satırdaki çıktılar aynıyken Tablo 4.3 bundan sonra farklılaşmaya başlıyor ve Tablo 4.1'e göre daha istikrarlı oluyor. Aynı şekilde, Tablo 4.3 ve Tablo 4.4'teki ilk satırdakiler aynıyken Tablo 4.4 2. satırdan itibaren farklılaşarak Tablo 4.3'e göre daha da istikrarlı hale geliyor. Özetle  $q \rightarrow \infty$  iken (4.46)'daki yaklaşıklıklardan elde edilen Tablo 4.4 "**en istikrarlı tablo**" olur.

Bu sonuçla birlikte yukarıdaki her bir programın kayıt tarihlerine dikkat ediniz. Bunlar Not 4.7'deki Mathematica dosyalarıyla aynı kayda sahiptirler. Çünkü buradaki tüm metotları "**1952.nb**" (Oluşturma: 14.10.2021, 17:08:07-08.11.2021, 14:52:07) adlı 1.03 MB'lık dosyamda saklı tutuyordum (ki meraklısına verebilirim), dolayısıyla buradaki metodu METOT 2'den sonra vermek aklıma geldi ve bu yüzden yukarıdaki ve Not 4.7'deki Mathematica dosyalarının kayıt tarihleri aynı oldu. Burada yine yukarıdaki ilk programda *Ole Amble*'in tezindeki (4.3) örneğini hedefledim ve Tablo 4.4'te gördüğümüz gibi en mükemmel tabloyu elde ettim. Bu sefer bu tabloda hiçbir anomali yok ve üstelik en istikrarlı çıktılar elde edilmiştir. Yine son 4 programı herhangi belirli bir I integrali için kullanabilirsiniz ve bunları nasıl kullanacağınızı her bir programda tüm yönergeleriyle birlikte anlattım.

## Piobert-Parmentier Metodu'nun Q Üzerinde Genelleştirilmesi

### Büyük Piramit'te Prusya Kralı 4. Friedrich Wilhelm'in Mısır Seferi'nden (1842-1845) Kalma Yazıtlar

Her zamanki gibi 19.12.2021'de Google'a "Great Pyramid News" yazdım ve orada kayda değer bir bulgu görmediğimden Youtube'a girdim. Orada 2. sekmede 11 saat önce yayınlanan "[WHAT IS GOING ON?... The Pyramids Something Unbelievable Is Happening \(2021\)](#)" videosunu gördüm ve hemen izlemeye başladım. Videonun girişinde Büyük Piramit'teki elektriksel magnetik ve radyoaktif özelliklerden ve özellikle tepesindeki 1977 ve 1987'deki elektronik mühendisi ve mucit **Joe Paar**'ın deneylerinden söz ediliyordu. Videoyu izlerken bir yerde aklıma Siemens'in kurucusu **Werner von Siemens** geldi. Çünkü o da 14.04.1859'da aynı deneyi yapmıştı.

Sonra Google'dan bu deneyin geçtiği kitabı aradım ve "[Werner von Siemens: A Brimming Spirit](#)" başlıklı bir kitaba ulaştım. Deney kitabın 175-177. sayfalarında yer alan "[The Godless Experiment](#)"de geçer (ki bu deneyin ilk ve orijinaldeki yeri "[Werner von Siemens Recollections](#)" kitabının 219. sayfasından itibaren başlar).

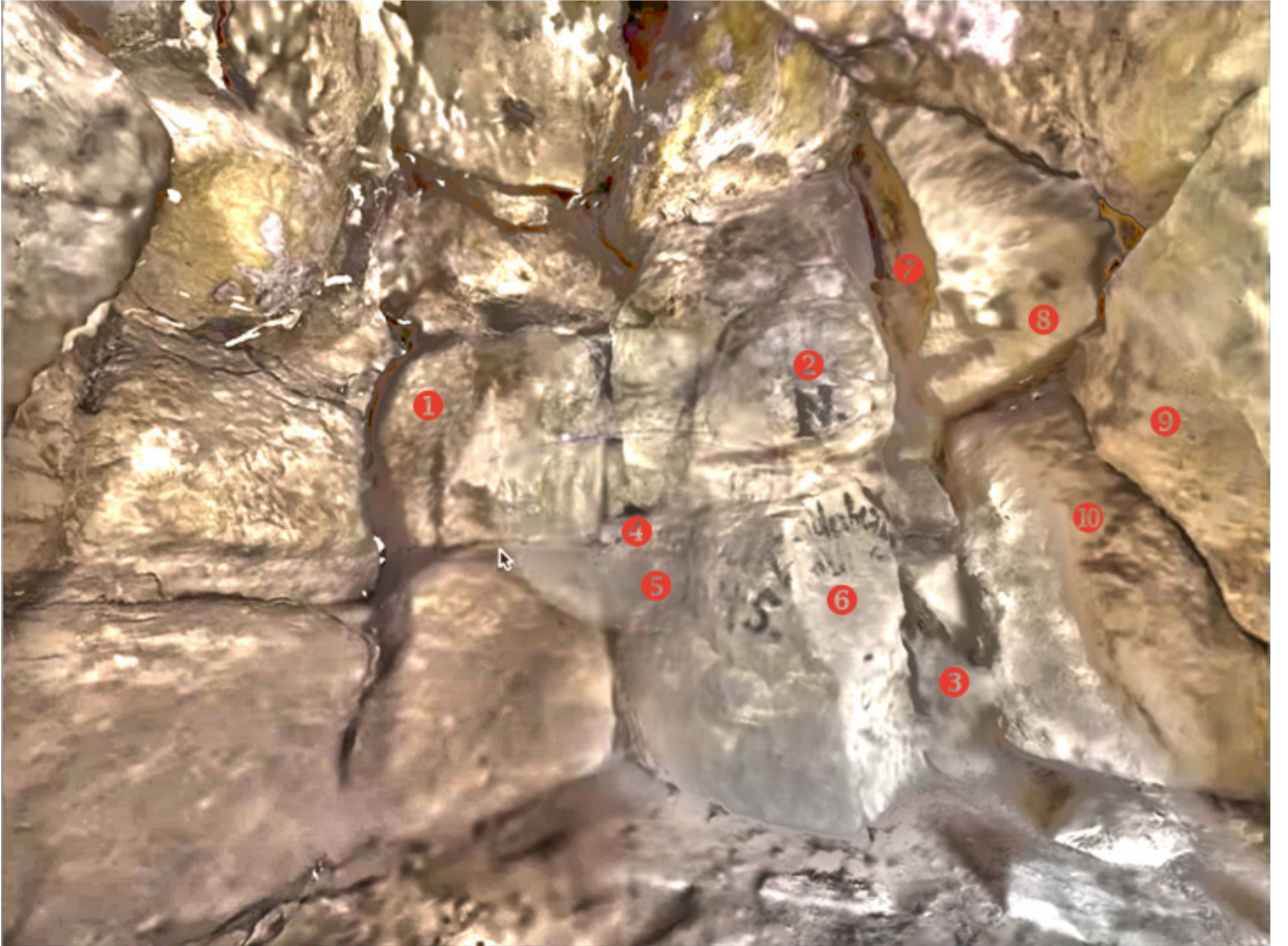
Her 2 kitapta anlatılan deney özetle şöyledir: Belki de piramit gücü olaylarının en heyecanlısı **Werner von Siemens** ile **Halske**'nin başından geçti. **Halske**, telgraf kablosu döşemek için Kızıldeniz'e gidiyordu. 14 Nisan 1859'da Giza'yı yeterince dolaşmak için gezisini bir süre Kahire'de kesti. Yanına mühendislerinden 10'unu aldı. 30 kadar Arap rehberin yardımıyla Büyük Piramit'e tırmanmaya başladılar. Bu sırada serin bir rüzgâr çıktı. Çölün kumları beyaz bir girdap halinde havaya kalktı. Zirveye çıktıklarında **Siemens** Araplardan birini taklit etti. Bir parmağını havaya kaldırdı. Bu olay, ışığa benzeyen keskin bir sesin oluşmasına ve parmağının karıncalanmasına yol açtı. **Siemens**, elektrik akımlarının neden olduğu olayları tanıyabilecek bir kişiydi.

Sonuçta... **Siemens**, şarap dolu şişenin çevresine ıslak bir kâğıt sardı. Şişenin madeni ve uzun bir boynu vardı. Bu ıslak kâğıtla onu bir Leyden kabına (bir tür elektrik akümülatörü) dönüştürdü. Kabı başının üzerine kaldırdığında elektrikle yüklenecekti. Yaklaşık 1.2 cm büyüklüğünde çatırdayan elektrik kıvılcımlarının oluştuğunu gördü. O anda Araplar, mühendislerin büyücü olduklarını düşündüler. Onları piramitin zirvesinden indirmeye çalıştılar. **Siemens**'in olayla ilgili olarak yazdıkları şöyledir (Bkz. "[Siemens'in Piramitlerde Var Olan Elektrik Akımının Farkına Varması](#)"). Daha geniş bilgi için "[Tesla ve Piramit](#)"): "İyice sardığım şişeyi sağ elimde tuttum. Başımın üzerine kaldırdım. Bir an bekledim. Sonra şişenin boynunu yavaşça Arap rehberlerin başkanının burnuyla aynı seviyeye getirdim.

Şişeye dokunduğumda, kendim de güçlü bir sarsıntı hissettim. Bundan, karşımdaki kişinin güçlü bir şokun etkisinde olduğunu çıkardım. Dili tutulmuş bir halde yere düştü. Birkaç saniye endişelendim. Sonra yerden kalktı. Piramitin basamaklarından ok gibi inerek kaçtı."

### Prusya Kralı'nın İzinde!

Fakat beni şaşırtan şey, bu parçanın sonundaki (S. 177) Prusya Kralı **4. Friedrich Wilhelm**'in 1845'teki Büyük Mısır Seferi'nden bahsedilmesiydi. O, **Napolyon**'un 1798'deki Mısır Seferi'ndeki gibi bir grup bilim adamını Mısır'a gönderip araştırma yapmasını ve sonuçların kendisine bildirilmesini istemişti. Ama Büyük Piramit'teki 1845 tarihi benim için yabancı değildi; piramitte çalışırken 1845'e ilişkin birkaç yazıt görmüştüm. Özellikle Fransız mimar **Jean Pierre Houdin**'in piramitin kuzeydoğu köşesindeki küçük bir mağaranın ([notch](#)) içindeki



**Resim 4.5.** Bu küçük mağara Büyük Piramit'in kuzeydoğu köşesinde ve 104. taş seviyesinde yani 154 RC yüksekliğinde bulunur (ki Kral Odası'nın şaftlarının piramitten çıkış seviyesi budur). **Jean Pierre Houdin** ile birlikte çalışan **Bob Brier** [piramite tırmanarak buraya geldiğinde](#) içeride çeşitli dönemlerden kalma birkaç yazıt gördü, [Update: Return to the Great Pyramid](#). Resimde 1'den 10'a kadar numaraladığım yazıtlar aynı gruba aittir. Bunlardan "N." yazıtı **Houdin** tarafından **Napolyon**'un N'si ve hemen altındaki 1845 tarihi nedeniyle **3. Napolyon** olarak algılandı, [Analyzing Egyptian Pyramids in the Digital Age](#).

“N.” yazıtının *Napolyon*'un N'si ve 1845 nedeniyle bunun **3. Napolyon** olduğuna hükmetmesi o sırada bana hiç doğru gelmemiş ve bu bende bir takıntı olmuştu. Acaba yeni bir *Prusya-Fransa Savaşı*'na mı tanık oluyoruz? *Houdin*'e göre arkeolojide “**Notch**” olarak tabir edilen bu küçük boşluk ya da mağara piramitin doğu ve kuzey yüzlerindeki bir iç rampanın kesim yeri idi ve yukarıdaki resimden gördüğümüz gibi taşların arasından her 2 yöndeki iç rampa boşluklarını gözlemlemeye çalıştılar. İnanılır gibi değil, o küçük Japon bile o boşluklardan geçemedi!

Her neyse, *Houdin*'in 2008'deki bu çıkarımı üzerine araştırma yaparken *Smyth*'in bir kitabındaki bir bulguya rastladım. *Smyth* Kral Odası'nın doğu duvarını incelerken siyah boyayla yazılmış Rusça-Almanca yani Prusça “*Tcharikoff Nadlerberg, 10-22 Mayıs 1845*” yazıtını görmüş ve bunu kitabına not etmişti. O, 18 Mart 1865'te gördüğü bu yazıt hakkında şöyle der: “(Doğu duvarındaki) granit yüzler düzgün ve birleşimler iyi; ne yazık ki talihsiz Rusça-Almanca yazıt hariç.

**TCHARIKOFF NADLERBERG**

1845  $\frac{10}{22}$  Mai

yazısındaki harfler 6 İnç genişliğinde ve 12 İnç yüksekliğinde siyah boyaya bulanmıştı.”

Fakat *Smyth*'in okuduğu bu Prusça yazıt eğer *şuradakiler* (Kral Odası'ndaki sarkofajın arkasındaki batı duvarındakiler) gibi Latince yazılmışsa sorun yok, doğru okumuş, deriz. Ama yıllar önce (16 Mart 2010, 00:57:56) piramitin kuzeydoğu köşesindeki iç rampa dönemecindeki (ki bu dönemeci boşluğa “*Bob'un Odası (Bob's Chamber)*” denilmektedir) bir diğer yazıt *Smyth*'in sorunlu bir şekilde okumuş olduğunu gösterir. Çünkü yukarıdaki resimde “N.” harfinin devamında “*aderberg*” ya da buna benzer bir şey geçer...

12 yıl önce orada “N.” ve “1845” tarihini görünce aklıma derhal *Smyth*'in yukarıdaki bulgusu gelmiş ve bu yazıtları bırakanın aynı kişi olduğunu tespit etmişim. Ama bu hikâye biraz daha geriye gider. Her şey *Jan Pierre Houdin*'in 1 Nisan 2007'de Büyük Piramit'teki 8 yıllık çalışmasının sonucunda elde ettiği bulguları açıklamasıyla başlamıştı. O piramitteki diğer bulgularla bu küçük oda gibi görünen boşluğun aslında bir iç rampa dönemeci olduğunu da açıklamıştı. Fakat arkeoloji ve mimarlıkta “**Notch**” adı verilen bu boşlukla ilgili ilk ciddi araştırmasını 2008'de *Bob Brier* ile birlikte çıkardıkları “*The Secret GREAT PYRAMID*” kitabında yaptılar ve **1 Ocak 2010**'da da kitapta belirtilen araştırmaların sonuçlarını “*The Khufu Pyramid Revealed*” adlı belgeselle tüm dünyaya duyurdular. İşte *Bob Brier* bu boşluğun içine ilk kez bu sırada girdi ve orada bazı incelemelerde bulundu. Odanın içine girer girmez karşısına yukarıdaki resimdeki görüntü geldi ve ilk olmadığını anladı (Bkz. Kronolojik olarak “*KHUFU Reborn*” ve teoriler için “*34 Clues In Support of The Theory*”). Şimdi söyleyeceklerimi internetten ararsanız da bulamazsınız, ama o sırada konuyla yakından ilgilendiğim için çeşitli sitelerde okumuştum: Yukarıdaki resimdeki 2 no'lu yerde “N.” harfi ve 5 no'lu yerde 1845 tarihi vardı ve onlar bunu **3. Napolyon** dönemine bağladılar. Başta benim de aklıma yatmıştı, çünkü ilk *Napolyon*'dan beri birçok şeyin “N” ile anıldığını biliyordum. Fakat 16 Mart 2010'da bu yazıtların **3. Napolyon** dönemine değil, *Smyth*'in Kral Odası'nın doğu duvarında gördüğü üzere *TCHARIKOFF NADLERBERG*'e ait olduğunu fark ettim ve ondan sonra fırsat buldukça bu gizemli kişinin peşinde koşmaya başladım.

2013'te bir grup Japon araştırmacı “*mağara*” adını verdikleri bu boşluğu incelediler. Nagoya Üniversitesi'nden arkeolog *Yukinori Kawae* boşluğun 3 boyutlu haritasını çıkarttı ve bir sürü dijital resim çekti (Bkz. “*3D Reconstruction of the 'Cave' of the Great Pyramid from Video Footage*”). Bu araştırma sırasında iç rampa dönemecinin zemininin 104. Taş sırasında olduğu ortaya çıktı (Bkz. *Figure 7*). Bu, *Petrie*'nin taş seviyeleri ölçümlerine göre Kral Odası'nın şaftlarının piramitten çıkış seviyesini gösteriyordu ve bu seviye *Rudolf Gantenbrink*'e göre 154 RC idi (Bkz. “*Corrected Great Pyramid Courses Elevations*”). Çünkü *Petrie*'nin ölçümlerine göre 104. Taş seviyesi piramitin güneybatı köşesinde  $3176 \text{ BI} = 3176 \times 0.0254 \text{ M} = 80.6704 \times \frac{21}{11} = 154.007127 \cong 154 \text{ RC}$ 'dir. Bu sonucu 27.07.2006, 18:43'te bilgisayarıma indirdiğim “*Publications*” sayfasındaki *Şekil 7-12*'de görebilirsiniz. Bu arada *Gantenbrink*'in sitesinin giriş sayfası şöyleydi: “*The Upuaut Project*”. Oradaki ve *web sayfam*'daki sponsorlara dikkat ediniz). Ama Japonlar da oradan 24.74 GB'lık veri almasına rağmen ne yazık ki görüntüleri araştırmacılara sunmadılar. *Kawae* bu görüntüleri çok sonra verdi (Bkz. İlki 2018'deki “*Analyzing Egyptian Pyramids in the Digital Age*” ve sonuncusu 2020'deki “*Egypt Giza Pyramid 360 VR-8K*” videolarıdır).

Şimdi tüm bu çalışmaları toplarsam şu sonuçları verebilirim: 2 no'lu yerde *Nadlerberg*'in “N”si vardır. Linkteki videoyu tam durdurduğum yerde (ki bu görüntü videonun ilerleyen bölümlerinde tekrar tekrar gösterilir) *Bob Brier* yere çömelmiş mağaranın içine bakarken “*Ancient Architects (Eski Mimarlar)*” adına sunum yapan bir İngiliz (ki kendisini Youtube'daki piramit çalışmalarıyla daima takdir etmişimdir), oradaki N'yi kırmızı okla gösteriyor. Fakat o, bu grafitinin antik zamandan kaldığını sanır. Bu grafitilerle ilgili *Kawae*'nin 2. videosundan 8K'de aldığım resimler şunlardır: Yazıt **1**, **2**, **3** ve **4**.

Peki *Tcharikoff Nadlerberg* kimdi?

Araştırmalarıma göre bu kişi, Prusya Kralı **4. Friedrich Wilhelm**'in 1842-1845'te Mısır Seferi'ndeki son kafiiledeki kişi ve muhtemelen kafiye başkanı idi. Çünkü ilk kafiye başkanı *Karl Richard Lepsius* ve ekibinin 1845'te araştırmaları devam ediyordu (Bkz. “*Denkmäler aus Aegyten und Aethiopien*”).



**Lepsius, Prusya Kralı'nın 47. Doğum Gününü Kutluyor!**

Prusya kralı **4. Friedrich Wilhelm**'in Büyük Mısır Seferi için gönderdiği ilk kafiileden Mısır bilimci *Karl Richard Lepsius* vardı. Mısır'da kazıları başlatan ilk kişi oydu. O, Kral'ın 15 Ekim 1842'deki 47. doğum günü anısına Büyük Piramit'in orijinal girişinin üzerindeki çatının **2. parçasının (chevron) batı tarafına** hiyerogliflerle bir yazıt kazıdı ve orada ne yazdığını **17 Ocak 1843 tarihli mektupta** şöyle açıkladı:

“Adı Prusya'nın Güneşi ve Kayası olan Kral'ın hizmetkarları; yazıcı *Lepsius*, mimar *Erbkam*, ressam *Weidenbach* kardeşler, ressam *Frey*, kalıpcı *Franke*, heykeltıraş *Bonomi*, mimar *Wild*<sup>2</sup>, böyle söyleyin: Herkese selamlar. Haç'ın Koruyucusu Kartal'a, Prusya'nın Kralı, Güneşi ve Kayası'na, anavatanını özgürleştiren Güneş'in Güneş'ine, Sevgi dolu Baba, Ülkesinin Babası **4. Friedrich Wilhelm**'e, Merhametli, Hikmet ve Tarihin Gözdesi, Almanya'nın seçtiği Ren Nehri'nin Koruyucusu (bkz. “*Die Wacht am Rhein*”). Ayrıca “*Şeytan'ın Aşkı*” filminin **12:17**'sinde “*Ren nehrini bu kadar güzel yapan şey ne?*” şarkısını dinleyebilirsiniz), Hayat Dağıttıcısı. Yüce Tanrı, Kral ve eşi *Kraliçe Elizabeth*'i, Yaşamı Zengin olan, Sevgi dolu Anneyi, Vatanın Anasını, lütufkârı, yeryüzünde sürekli canlı ve uzun bir yaşam ve cennette sonsuza kadar mübarek bir yer bahşetsin. Kurtarıcımızın 1842 yılında, 10. ayda, 15. günde, Majestelerinin 47. doğum gününde, *Kral Cheops* Piramiti'nde; 3. yılda, 5. ayda, Majestelerinin saltanatının 9. gününde; 3164 yılında *Kral Menepthes* yönetimindeki Sothis döneminin başlangıcından itibaren.”

<sup>2</sup> İsimleri sayılı bu kişiler aynı gün yani Kral'ın 47. doğum gününde piramitin tepesine çıktılar ve göndere *Prusya bayrağı*'nı çektiler. Onlar hatıra olarak piramitin tepesinin kuzey tarafına *isimlerini kazıdılar*. Bu isimler günümüzde silinmiş olabilir ya da *bu isimlerden hiçbirisini bulamadım!* Ama bence ressamlar resim boş kalmayın diye o isimleri yazdılar!

**Nadlerberg** ve ekibi 10-22 Mayıs 1845'te Büyük Piramit'te araştırma yaptılar. İlk piramitin içine girdiler ve orada araştırmalarını tamamladıktan sonra (ki bu arada **Nadlerberg** Kral Odası'nın doğu duvarına adını ve orada ne kadar süre geçirdiklerini kaydetti) piramitin kuzeydoğu köşesindeki mağaraya geçtiler. Orada yiyip içtiler ve sonra ellerindeki **Smyth**'in bahsettiği siyah boyayla isimlerini yazarak hatıra bıraktılar. Başlı çeken yine **Nadlerberg** idi. Ama oradaki yazıtlardan tam kuzeye bakanların bir anlamı vardı: "Biz kuzeyden ([Doğu Prusya](#)) geliyoruz!" (ki bu bulgum 16 Mart 2010'a aittir)

Sonuç olarak 12 yıl önce gizemli kişi olarak bahsettiğim **Tcharikoff Nadlerberg**'in peşinde koşarken Prusya Kralı [4. Wilhelm Friedrich](#)'e ulaşmış, dolayısıyla kendisiyle tanışma şerefine nail olmuş oldum ve bunları size bu makale vesilesiyle sundum!

Şimdi Alman ataların Büyük Piramit'te bıraktığı izleri özetle verdiğime göre, **Ole Amble**'in metodu hakkında yaptığım çalışmaları da şöyle özetleyebilirim: Yukarıda **Ole Amble**'in yaklaşımları için bulduğumuz  $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$  yani  $f$ 'nin türevleri için kullandığımız "[Sonlu Merkezi Farklar](#)" yerine "[Sonlu İleri Farklar](#)" ya da "[Sonlu Geri Farklar](#)" da kullanılabilir. Fakat bunlara ait tablolarda görüldüğü üzere  $f$ 'nin türevlerindeki yakınsaklık hızı tek tek ilerler (1,2,3,4,5,6, ...), dolayısıyla yakınsaklıkları zayıfken merkezi farklarda yakınsaklık hızı çift çift gider (2,4,6,8, ...), dolayısıyla en iyi yakınsaklık hızı merkezi fark formüllerindedir. İşte **Ole Amble**'in 1952'de farkına vardığı biricik bilgi bu idi!

Aşağıda  $f$ 'nin türevlerine  $\delta$  operatörüyle ileri ve geri farkların toplamı olarak melez bir yaklaşımda bulunacağım (bkz. (4.19)) ama bunlar (4.46)'dakilerine eş değer olacaktır. Böylece **Ole Amble**'in 1952'de yaptığı gibi  $f$ 'nin türevleri için merkezi farklar metodundan tek tek formül aramaya (ki bu hesap gerçekten de çok eziyetlidir) ya da bunun daha az eziyetlisi olan büyükçe bir tablo oluşturmaya ve bu tablodan katsayıları okuma derdine son vererek bir ikinci metot tanımlayacağım!

**4.2. Piobert-Parmentier Metodu'nun  $\mathbb{Q}$  Üzerinde Genişletilmesine İlişkin 2. Metot.** Bu metodu **Ole Amble**'in yaptığı gibi anlatmayacağım, sıfırdan anlatacağım. Çünkü bu sayede **Ole Amble**'in metotta kullandığı yaklaşım formüllerinin nereden, nasıl kaynaklandığını açık bir şekilde göstermiş olacağım!

Öncelikle  $f(x)$  fonksiyonunun  $[a, b]$  aralığındaki

$$(4.47) \quad I = \int_a^b f(x) dx$$

integralinde bir taraftan **Ole Amble**'a göre  $y = f(x)$  için

$$(4.48) \quad I = \int_0^n y dx = T + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( f_n^{(2k+1)} - f_0^{(2k+1)} \right) h^{2k+2} = T + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( f^{(2k+1)}(x_n) - f^{(2k+1)}(x_0) \right) h^{2k+2} = T + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a) \right) h^{2k+2}$$

ya da  $f(x)$ 'in 1. türevi merkezi fark formülüne (yani  $f(x+h)$  ve  $f(x-h)$ 'nin  $h=0$  noktasındaki Taylor açılımına) göre

$$(4.49) \quad f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(x)}{(2k+1)!} h^{2k}$$

olduğundan

$$(4.50) \quad \begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{2k}}{(2k+1)!} \int f^{(2k+1)}(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k+1)!} h^{2k} + C \Rightarrow I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{2k}}{(2k+1)!} \int_a^b f^{(2k)}(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{2k}}{(2k+1)!} \cdot f^{(2k-1)}(x) \Big|_a^b + C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{2k}}{(2k+1)!} \left( f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right) + C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{2k+2}}{(2k+2)!} \left( f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a) \right) + C \end{aligned}$$

eşitliği gerçekleşirken (ki burada  $C$ , **Ole Amble**'in (4.49)'da işaret ettiği  $T$  trapez ya da orta nokta formülüne denk gelir), diğer taraftan genel olarak  $v, w \in \mathbb{Z}^+$ ,  $u \in \mathbb{N}$  için  $u = 0, 1, \dots, v-1$  olmak üzere  $h = \frac{b-a}{w}$  farkı ve  $f_0 = \frac{f(a)+f(b)}{2}$  başlangıç değerine göre

$$(4.51) \quad T_{u,v} = h \sum_{k=0}^{w-1} f_{k+\frac{u}{v}} = h \sum_{k=0}^{w-1} f\left(a + \left(k + \frac{u}{v}\right)h\right)$$

$v$ -trapez formülü ya da yaklaşımları mevcuttur (Bkz. "Romberg İntegrali Projesi 2016-2018", [S2. Genelleştirilmiş Romberg Metodu/2.1. p-Trapez Formülü](#), (2.1)).

Burada  $T_{u,v} = T_{u,v}(h)$ 'nin  $h$ 'ye göre kuvvet serisine açılımı,  $m = 0, 1, 2, \dots$  için

$$(4.52) \quad T_{u,v}(h) = I + \sum_{k=1}^{2m+2} a_k h^k = I + a_1 h + a_2 h^2 + \dots + a_{2m+2} h^{2m+2} + O(h^{2m+4})$$

şeklinde olup katsayılar,

$$(4.53) \quad a_k \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{B_k \left(\frac{u}{v}\right)}{k!} \left( f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a) \right)$$

dir.

Şimdi  $I$ 'ya bileşik trapez metoduyla yaklaşımlar için  $v = 2$  alırsak  $u = 0, 1$  için

$$(4.54) \quad T_{0,2} = h \sum_{k=0}^{w-1} f_{k+\frac{0}{2}} = h \sum_{k=0}^{w-1} f\left(a + \left(k + \frac{0}{2}\right)h\right) = h \sum_{k=0}^{w-1} f(a + kh), \quad T_{1,2} = h \sum_{k=0}^{w-1} f_{k+\frac{1}{2}} = h \sum_{k=0}^{w-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h\right)$$

formüllerinden ilki trapez formülü ve ikincisi orta nokta formülü olarak çıkar karşımıza.

Burada Bernoulli sayıları

$$(4.55) \quad \begin{cases} B_0(0) = 1, B_1(0) = -\frac{1}{2}, B_2(0) = \frac{1}{6}, B_3(0) = 0, B_4(0) = -\frac{1}{30}, B_5(0) = 0, \dots, B_{2m+1}(0) = 0, \\ B_0\left(\frac{1}{2}\right) = 1, B_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0, B_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}, B_3\left(\frac{1}{2}\right) = 0, B_4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{240}, B_5\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \dots, B_{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

olup ilk katsayı çifti (4.50)'deki  $I$ 'da ve ikinci katsayı çifti de 2. terimdeki  $T_{0,2}$  ve  $T_{1,2}$  yaklaşıklarında mevcut olduğundan ya da bu yaklaşıklıklar  $h$ 'de yakınsama yaptıklarından dolayı,

$$(4.56) \quad \begin{cases} T_{0,2}(h) - I = \sum_{k=1}^{2m+2} a_k h^k = a_1(0)h + a_2(0)h^2 + 0 \cdot h^3 + a_4(0)h^4 + 0 \cdot h^5 + a_6(0)h^6 + \dots + 0 \cdot h^{2m+1} + a_{2m+2}(0)h^{2m+2} = \sum_{k=0}^m a_{2k+2}(0)h^{2k+2} + O(h^{2m+4}), \\ T_{1,2}(h) - I = \sum_{k=1}^{2m+2} a_k h^k = a_1\left(\frac{1}{2}\right)h + a_2\left(\frac{1}{2}\right)h^2 + 0 \cdot h^3 + a_4\left(\frac{1}{2}\right)h^4 + 0 \cdot h^5 + a_6\left(\frac{1}{2}\right)h^6 + \dots + 0 \cdot h^{2m+1} + a_{2m+2}\left(\frac{1}{2}\right)h^{2m+2} = \sum_{k=0}^m a_{2k+2}\left(\frac{1}{2}\right)h^{2k+2} + O(h^{2m+4}) \end{cases}$$

sonuçları geçerli olur.

İşte bu sonuçla (4.54)'e göre (4.56)'dan

$$(4.57) \quad \begin{cases} T_{0,2}(h) = I + \sum_{k=0}^m \frac{B_{2k+2}(0)}{(2k+2)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} + O(h^{2m+4}), \\ T_{1,2}(h) = I + \sum_{k=0}^m \frac{B_{2k+2}\left(\frac{1}{2}\right)}{(2k+2)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} + O(h^{2m+4}) \end{cases}$$

eşitlikleri geçerli olurken (4.48)'den

$$(4.58) \quad I = T + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} = T + \sum_{k=0}^m a_k (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} + O(h^{2m+4})$$

eşitlikleri geçerli olur. Burada bütün mesele, (4.58)'deki  $T - I$ 'yı (4.57)'de yerine koyup  $a_k$  katsayılarını belirlemekten başka bir şey değildir. Yani METOT'un ana fikri budur. İşte **Ole Amble**, 1952'de bu katsayıları teker teker buldu ve (4.43)'teki yaklaşıklıkları elde etti. **Romberg** bunları gördü ve yeni bir metot için 3 yıl süren bir araştırma yaptı. 1955'teki tezinde bu yeni metottan söz ederken ikinci metot olarak **Ole Amble**'in sadece ilk yaklaşıklıklarını ele aldı!

**Not 4.6 (Ole Amble ve Romberg'in Örneklerindeki Yakınsaklık Hızının Artırılmasına İlişkin Bir Bulgu, 21.11.2021, 07:44:09).** Eğer  $f(x)$ 'in  $x = x_0 = a$  ve  $x = x_n = b$  noktalarındaki

$$I = \int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \int_a^b (x-a)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} \Big|_a^b = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot \frac{(b-a)^{k+1} - (a-a)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{(k+1)!} \cdot h^{k+1}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} \int_a^b (x-b)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} \cdot \frac{(x-b)^{k+1}}{k+1} \Big|_a^b = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} \cdot \frac{(b-b)^{k+1} - (a-b)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!} \cdot h^{k+1} \end{cases}$$

Taylor açılımlarında (4.3)'teki örneği ele alırsak,

$$(4.59) \quad \int_0^6 \frac{\pi}{12} \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) dx = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{(k+1)!} \cdot h^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(a)}{(2k+1)!} \cdot h^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(a)}{(2k+2)!} \cdot h^{2k+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\pi}{12}\right)^{2k+1} \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot 0\right)}{(2k+1)!} \cdot (6-0)^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{\pi}{12}\right)^{2k+2} \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 0\right)}{(2k+2)!} \cdot (6-0)^{2k+2} \\ = 0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2}}{(2k+2)!} + 1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot i = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!} \cdot h^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1} f^{(2k)}(b)}{(2k+1)!} \cdot h^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+2} f^{(2k+1)}(b)}{(2k+2)!} \cdot h^{2k+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\pi}{12}\right)^{2k+1} \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot 6\right)}{(2k+1)!} \cdot (6-0)^{2k+1} + \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{\pi}{12}\right)^{2k+2} \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 6\right)}{(2k+2)!} \cdot (6-0)^{2k+2} = 1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2}}{(2k+2)!} + 0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot i = -1 = i e^{i\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

sonuçlarında norm (mutlak değer) almayla her ikisinin doğru olduklarını görürüz (ki bu sonuçlar **Romberg**'in (1.55)'teki örneği için de geçerlidir). O halde  $e^{i\frac{\pi}{2}}$  serisini periyodik olarak açarsak  $m$  pozitif tam sayısı için

$$(4.60) \quad -1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^k}{k!} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3k}}{(3k)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3k+1}}{(3k+1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3k+2}}{(3k+2)!}, \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{mk+m-r}}{(mk+m-r)!} \end{cases}$$

serilerinin  $-1 + i$ 'nin reel ve sanal kısımlarına yani, eğer reel kısmın mutlak değerini alırsak, 1'e hızla yakınsadıklarını görürüz. Fakat bunun için  $\pi$ 'nin basamaklarının bilinmesine ihtiyaç vardır! (Y.N. Smyth, John Taylor'un "[Piramitlerin Gizemi Açıklandı \(The Mystery of the Pyramids Explained\)](#)" adlı elyazmasında  $\pi$ 'yi bulabilmek için ağır hesaplar yapmıştır. Ben gördüm, Smyth amca [o sayfada](#) piramitten elde ettiği ölçümlerle  $\pi$ 'yi [hesaplamaya çalışıyordu](#). Ama aradığı şey,  $\pi$  değil Tanrı idi. Bunu York Merkezi Kütüphanesi'nde (ki şimdi [Explorer Library and Archive](#)) bulunan Smyth'ın "Life and Work at the Great Pyramid" adlı kitabının bir kopyasına yapıştırılmış ve onun tarafından çizilmiş kartuşta görebilirsiniz (Bkz. "[Charles Piazzzi Smyth's 1865 Conquest of the Great Pyramid](#)", S. 352, Figure 23). Orada Smyth'ın Tanrı'nın mesajını görmeleri için Hakikat Kuzusu verildikten sonra, modern bilimsel araçları kullanarak Büyük Piramit'in sırrını çözdüğü söylenmektedir. Fakat bu mesajın gerçek anlamı şuydu: "*Piramitteki KHUFU'nun sırrını bilimsel araçları yapıp ve onlarla gözlemler-ölçümler yaptıktan sonra çözdüm ve bunu belgeledim*").

Şimdi METOT 2'yi bu şekilde inşa ettiğime göre, sonuçlarına geçebiliriz. Öncelikle metoda göre genel olarak  $\forall m, n, r \in \mathbb{N}$  için

$$(4.61) \quad K_{n,r} = K_n + \sum_{m=0}^r A_m + O(h^{2m+4}), T_{n,r} = T_n + \sum_{m=0}^r B_m + O(h^{2m+4})$$

yaklaşıklıklarının mevcuttur.

Burada Euler-Maclaurin toplam formülüne göre I integrali için  $T_{0,2}(h) =: K_n$  trapez formülü ve  $T_{1,2}(h) =: T_n$  orta nokta formülü için

$$(4.62) \quad K_n = I + \sum_{k=1}^{2m+1} a_k h^k = I + a_1 h + a_2 h^2 + \dots, T_n = I + \sum_{k=1}^{2m+1} b_k h^k = I + b_1 h + b_2 h^2 + \dots$$

eşitlikleri geçerlidir (Bkz. "[Konvergenzbeschleunigung durch Extrapolation am Beispiel der Romberg-Integration](#)" adlı tezinde trapez formülü için S. 35 ve orta nokta formülü için S. 43).

Bu eşitliklerdeki katsayılar,

$$(4.63) \quad a_k = \frac{B_k}{k!} (f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)), b_k = \frac{B_k(\frac{1}{2})}{k!} (f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a))$$

dir (Bkz. "[Euler-Maclaurin Formula](#)").

Bu katsayılarda Bernoulli polinomlarına göre ilkinde  $B_{2k} = B_{2k}(1)$  iken ikincisinde

$$(4.64) \quad B_{2k}(\frac{1}{2}) = -\left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right) B_{2k}$$

dir.

Diğer taraftan *Ole Amble*'a göre (4.48)'den

$$(4.65) \quad \begin{cases} A_m\left(\frac{h}{2^{q+m}}\right) = 2^{(2q+1)m+2q} p \cdot \frac{h}{2^{q+m}} \left( \delta^{2m+1} f_0\left(\frac{h}{2^{q+m}}\right) - \delta^{2m+1} f_n\left(\frac{h}{2^{q+m}}\right) \right) = 2^{(2m+1)q} p h \left( \delta^{2m+1} f_0\left(\frac{h}{2^{q+m}}\right) - \delta^{2m+1} f_n\left(\frac{h}{2^{q+m}}\right) \right), \\ B_m\left(\frac{h}{2^{q+m}}\right) = 2 A_m\left(\frac{h}{2^{q+m+1}}\right) = 2^{(2m+1)q+1} p h \left( \delta^{2m+1} f_0\left(\frac{h}{2^{q+m+1}}\right) - \delta^{2m+1} f_n\left(\frac{h}{2^{q+m+1}}\right) \right). \end{cases}$$

yaklaşıklıkları mevcuttur. Buradaki teleskopik fark *Ole Amble*'ın (4.18)'de verdiği gibidir ama operatör farklıdır. Bu operatörün matematiksel açıklaması aşağıdadır!

**$\delta$  Operatörü:** Bu operatörün işleyiş şekli şöyledir: Öncelikle 1. mertebedeki  $\delta$  merkezi farklar metodundan elde edilen 1. türevle aynıdır:

$$\delta f_n = \Delta f_n + \nabla f_n = (f_{n+1} - f_n) + (f_n - f_{n-1}) = f_{n+1} - f_{n-1} = \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} f_{n+2k-1}.$$

2. mertebedeki  $\delta$  ise artık merkezi farklar metodundan elde edilen 2. türevden ayrılır ve şöyle sonuçlanır:

$$\begin{aligned} \delta^2 f_n &= \delta(\delta f_n) = \delta(\Delta f_n + \nabla f_n) = \Delta(\Delta f_n + \nabla f_n) + \nabla(\Delta f_n + \nabla f_n) = \Delta^2 f_n + \Delta \nabla f_n + \nabla \Delta f_n + \Delta^2 f_n \\ &= f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n + \Delta(f_n - f_{n-1}) + \nabla(f_{n+1} - f_n) + f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2} \\ &= f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n + f_{n+1} - f_n - f_n + f_{n-1} + f_{n+1} - f_n - f_n + f_{n-1} + f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2} \\ &= f_{n+2} - 2f_n + f_{n-2} = \sum_{k=0}^2 (-1)^k \binom{2}{k} f_{n+2k-2}. \end{aligned}$$

Aynı şekilde 3. mertebedeki  $\delta$ 'daki durum da böyledir:

$$\begin{aligned} \delta^3 f_n &= \delta(\delta^2 f_n) = \delta(f_{n+2} - 2f_n + f_{n-2}) = \Delta f_n + \nabla f_n = \Delta(f_{n+2} - 2f_n + f_{n-2}) + \nabla(f_{n+2} - 2f_n + f_{n-2}) \\ &= f_{n+3} - 2f_{n+1} + f_{n-1} - f_{n+2} + 2f_n - f_{n-2} + f_{n+2} - 2f_n + f_{n-2} - f_{n+1} + 2f_{n-1} - f_{n-3} \\ &= f_{n+3} - 3f_{n+1} + 3f_{n-1} - f_{n-3} = \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{k} f_{n+2k-3}. \end{aligned}$$

Bu işlemleri Mathematica'da da yapabilirsiniz ve yine yukarıdaki sonuçları elde edersiniz. Bunun için Mathematica'daki h adımla çoklu farkı veren "[Difference-Delta\[f,{i,n,h}\]](#)" operatörünü şu şekilde kullanmanız gerekiyor:

$$(4.66) \quad \delta^m f_n = \text{DifferenceDelta}[f_{n-m}, \{n, m, 2\}].$$

Buna göre  $f$  nin  $m$ -inci türevi  $\delta$  farkına göre şöyledir:

$$(4.67) \quad f^{(m)}(x) = \frac{\delta^m f_0}{(-2h)^m} = \frac{1}{(2h)^m} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f_{2k-m}.$$

Fakat genel olarak  $f$  nin  $m$ -inci türevi,

$$(4.68) \quad \delta^m f_n = \text{DifferenceDelta}[f_{n-m}, \{n, m, r\}]$$

$r$  farkına göre  $f$  nin  $m$ -inci türevi  $\delta$  farkına göre şöyledir:

$$(4.69) \quad f^{(m)}(x) = \frac{\delta^m f_0}{(-rh)^m} = \frac{1}{(rh)^m} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f_{rk-m}.$$

Şu halde MEM gereğince  $\delta$ 'nın  $2m + 1$ -inci mertebedeki farkını şu şekilde verebiliriz:

$$(4.70) \quad \delta^{2m+1} f_n = \sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k \binom{2m+1}{k} f_{n+2k-(2m+1)}.$$

Ancak bu formül "[Higher-order differences \(Yüksek Mertebeden Farklar\)](#)"daki Central (Merkezi)'de verilen şu formülden farklıdır:

$$(4.71) \quad \delta_n^n f(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f\left(x + \left(\frac{n}{2} - i\right)h\right).$$

Burada ayrıca,

$$(4.72) \quad \delta^{2m+1} f_n \neq \Delta^{2m+1} f_n + \nabla^{2m+1} f_n$$

olduğuna dikkat ediniz!

**2. Yol (Orijinal).** Diğer taraftan  $\delta^{2m+1} f_0 - \delta^{2m+1} f_n$ 'nin açılımını şu şekilde de yapabiliriz ki ilk hesabım bu idi. Yani yukarıda yaptığım hesaplar  $\delta$  operatörünün nasıl bir işlem yaptığını açık bir şekilde göstermemden başka bir şey değildi!

Yine bunun için ilkin  $m = 1$  için

$$\delta f_0 - \delta f_n = (f_1 - f_{-1}) - (f_{n+1} - f_{n-1}) = \sum_{k=0}^1 (-1)^{k+1} \binom{1}{k} f_{2k-1} + \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} f_{n+(2k-1)} = \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} (f_{n+2k-1} - f_{2k-1})$$

eşitliklerine göre

$$(4.73) \quad \delta f_0 - \delta f_n = \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} (f_{n+2k-1} - f_{2k-1})$$

sonucunu bulmuş oluruz. Bu, (4.4) ya da (4.6)'daki formüldür.

İkinci olarak  $m = 3$  için

$$\begin{aligned} \delta^3 f_0 - \delta^3 f_n &= \delta^2(\delta f_0) - \delta^2(\delta f_n) = \delta^2(f_1 - f_{-1}) - \delta^2(f_{n+1} - f_{n-1}) = \delta(\delta(f_1 - f_{-1})) - \delta(\delta(f_{n+1} - f_{n-1})) \\ &= \delta((f_2 - f_0) - (f_0 - f_{-2})) - \delta((f_{n+2} - f_n) - (f_n - f_{n-2})) = \delta(f_2 - 2f_0 + f_{-2}) - \delta(f_{n+2} - 2f_n + f_{n-2}) \\ &= [(f_3 - 2f_1 + f_{-1}) - (f_1 - 2f_{-1} + f_{-3})] - [(f_{n+3} - 2f_{n+1} + f_{n-1}) - (f_{n+1} - 2f_{n-1} + f_{n-3})] \\ &= [f_3 - 3f_1 + 3f_{-1} - f_{-3}] - [f_{n+3} - 3f_{n+1} + 3f_{n-1} - f_{n-3}] = \sum_{k=0}^3 (-1)^{k+1} \binom{3}{k} f_{2k-3} + \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{k} f_{n+(2k-3)} \\ &= \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{k} (f_{n+2k-3} - f_{2k-3}) \end{aligned}$$

eşitliklerine göre

$$(4.74) \quad \delta^3 f_0 - \delta^3 f_n = \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{k} (f_{n+2k-3} - f_{2k-3})$$

eşitliği gerçekleşir.

Şu halde MEM gereğince (4.73)&(4.74)'ten şu genel formülü verebiliriz:

$$(4.75) \quad \delta^{2m+1} f_0 - \delta^{2m+1} f_n = \sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k \binom{2m+1}{k} (f_{n+2k-(2m+1)} - f_{2k-(2m+1)}).$$

Burada  $h = \frac{b-a}{n}$  için



$$f_{2k-(2m+1)} = f(a + (2k - (2m + 1))h)$$

ve

$$f_{n+2k-(2m+1)} = f(a + (n + 2k - (2m + 1))h) = f(a + nh + (2k - (2m + 1))h) = f(a + b - a + (2k - (2m + 1))h) = f(b + (2k - (2m + 1))h)$$

eşitlikleri geçerli olduğundan bunları (4.75)'te ve onları da (4.65)'te yerlerine koyarsak şu genel formülleri elde etmiş oluruz (14.10.2021, 17:08:07):

$$(4.76) \quad \begin{cases} A_m(h) = 2^{(2m+1)q} p h \sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k \binom{2m+1}{k} \left( f\left(b + (2k - (2m + 1)) \frac{h}{2^{q+m}}\right) - f\left(a + (2k - (2m + 1)) \frac{h}{2^{q+m}}\right) \right), \\ B_m(h) = 2A_m\left(\frac{h}{2}\right) = 2^{(2m+1)q} p h \sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k \binom{2m+1}{k} \left( f\left(b + (2k - (2m + 1)) \frac{h}{2^{q+m+1}}\right) - f\left(a + (2k - (2m + 1)) \frac{h}{2^{q+m+1}}\right) \right). \end{cases}$$

Bunların  $h$  kuvvetlerine göre seriye açılımı,

$$(4.77) \quad a_{k,m} = \sum_{j=0}^{2m+1} (-1)^{(2m+1)k+j} (2m+1-2j)^k \binom{2m+1}{j}$$

katsayısına göre

$$A_m = 2^{(2m+1)q} p h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k,m}}{k!} (f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+m}}\right)^k = 2^{(2m+1)q} p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{q+m} a_{k,m}}{k!} (f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+m}}\right)^{k+1} = p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2(m+1)q+m} a_{k,m}}{k!} (f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+m}}\right)^{k+1}$$

eşitliklerinden şu şekildedir (19.10.2021, 05:04:51):

$$(4.78) \quad A_m = p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2(m+1)q+m} a_{k,m}}{k!} (f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+m}}\right)^{k+1}, \quad B_m = p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2(m+1)q+m+1} a_{k,m}}{k!} (f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+m+1}}\right)^{k+1}.$$

Şimdi uygulamamıza geçebiliriz.

1.  $m = 0$  ise: Eğer (4.77)'de  $m = 0$  alırsak,

$$a_{k,0} = \sum_{j=0}^1 (-1)^{k+j} (1-2j)^k \binom{1}{j} = (-1)^k - 1$$

katsayısını (4.78)'de ilkinde yerine koyar ve gerekli hesapları yaparsak,

$$A_0 = p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2q} a_{k,0}}{k!} (f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)) \left(\frac{h}{2^q}\right)^{k+1} = p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(-1)^k - 1] 2^{2q}}{k!} (f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)) \left(\frac{h}{2^q}\right)^{k+1} = -p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2q+1}}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^q}\right)^{2k+2}$$

yaklaşıklıkla göre (4.78)'dekileri şu şekilde elde etmiş oluruz:

$$(4.79) \quad A_0 = -p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2q+1}}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^q}\right)^{2k+2}, \quad B_0 = -p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2q+2}}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+1}}\right)^{2k+2}.$$

Bu yaklaşıklıklardaki  $p$  katsayısı taraf tarafa toplamayla oluşan  $h^2$ 'ye ait katsayıların sıfırlanmasıyla şu şekilde elde edilirler (ki (4.56)'da  $h$ 'nin tek kuvvetlerine ait katsayıları ilk terimlerin haricinde sıfırlamıştık):

$$(4.80) \quad \begin{cases} \frac{B_2}{2!} (f'(b) - f'(a))h^2 + A_0 = \frac{1}{12} (f'(b) - f'(a))h^2 - 2^{2q+1} p (f'(b) - f'(a)) \left(\frac{h}{2^q}\right)^2 - \dots = -\frac{24p-1}{12} (f'(b) - f'(a))h^2 - \dots \Rightarrow p = \frac{1}{24}, \\ \frac{B_2}{2!} \left(\frac{1}{2}\right) (f'(b) - f'(a))h^2 + B_0 = -\frac{1}{24} (f'(b) - f'(a))h^2 - 2^{2q+2} p (f'(b) - f'(a)) \left(\frac{h}{2^{q+1}}\right)^2 - \dots = -\frac{24p+1}{24} (f'(b) - f'(a))h^2 - \dots \Rightarrow p = -\frac{1}{24}. \end{cases}$$

Şu halde (4.76)'dan

$$(4.81) \quad A_0(h) = \frac{2^q h}{24} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} \left( f\left(b + (2k-1) \frac{h}{2^q}\right) - f\left(a + (2k-1) \frac{h}{2^q}\right) \right), \quad B_0(h) = 2A_0\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{2^q h}{24} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} \left( f\left(b + (2k-1) \frac{h}{2^{q+1}}\right) - f\left(a + (2k-1) \frac{h}{2^{q+1}}\right) \right)$$

şeklinde ilk yaklaşıklıklarımızı bulmuş oluruz.

2.  $m = 1$  ise: Bu sefer (4.77)'de  $m = 1$  alırsak,

$$a_{k,1} = \sum_{j=0}^3 (-1)^{3k+j} (3-2j)^k \binom{3}{j} = ((-1)^k - 1)(3^k - 3)$$

katsayısını yine (4.78)'de ilkinde yerine koyar ve gerekli hesapları yaparsak,

$$\begin{aligned} A_1 &= p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4q+1} a_{k,1}}{k!} (f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+1}}\right)^{k+1} = p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((-1)^k - 1)(3^k - 3)2^{4q+1}}{k!} (f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+1}}\right)^{k+1} \\ &= -p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4q+2}(3^{2k+1} - 3)}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+1}}\right)^{2k+2} \end{aligned}$$

yaklaşıklığına göre (4.78)'dekileri şu şekilde elde etmiş oluruz:

$$(4.82) \quad A_1 = -p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4q+2}(3^{2k+1} - 3)}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+1}}\right)^{2k+2}, \quad B_1 = -p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4q+3}(3^{2k+1} - 3)}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+2}}\right)^{2k+2}.$$

Yine bu yaklaşıklıklardaki p katsayısı taraf tarafa toplamayla oluşan  $h^{4^*}$  e ait katsayıların sıfırlanmasıyla şu şekilde elde edilirler:

$$(4.83) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=0}^1 \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} + A_0 + A_1 = \sum_{k=0}^1 \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2q+1}}{24(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^q}\right)^{2k+2} \\ &-p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4q+2}(3^{2k+1} - 3)}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+1}}\right)^{2k+2} = -\frac{2^{2q}(720p+1)+10}{45 \cdot 2^{2q+4}} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 - \dots \Rightarrow p = -\frac{2^{2q}+10}{45 \cdot 2^{2q+4}}, \\ &\sum_{k=0}^1 \frac{B_{2k+2} \left(\frac{1}{2}\right)}{(2k+2)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} + B_0 + B_1 = \sum_{k=0}^1 \frac{B_{2k+2} \left(\frac{1}{2}\right)}{(2k+2)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2q+2}}{24(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+1}}\right)^{2k+2} \\ &-p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4q+3}(3^{2k+1} - 3)}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+2}}\right)^{2k+2} = -\frac{2^{2q}(720p-7)-10}{45 \cdot 2^{2q+7}} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 - \dots \Rightarrow p = \frac{7 \cdot 2^{2q}+10}{45 \cdot 2^{2q+4}} \end{aligned} \right.$$

Bu durumda (4.76)'dan ikinci yaklaşıklıklarımızı şu şekilde elde etmiş oluruz:

$$(4.84) \quad \left\{ \begin{aligned} A_1(h) &= -\frac{2^{q-4}(2^{2q}+10)h}{45} \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{k} \left( f\left(b + (2k-3)\frac{h}{2^{q+1}}\right) - f\left(a + (2k-3)\frac{h}{2^{q+1}}\right) \right), \\ B_1(h) &= 2A_1\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{2^{q-4}(7 \cdot 2^{2q}+10)h}{45} \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{k} \left( f\left(b + (2k-3)\frac{h}{2^{q+2}}\right) - f\left(a + (2k-3)\frac{h}{2^{q+2}}\right) \right). \end{aligned} \right.$$

3.  $m = 2$  ise: Bu sefer de (4.77)'de  $m = 2$  alırsak,

$$a_{k,2} = \sum_{j=0}^5 (-1)^{5k+j} (5-2j)^k \binom{5}{j} = ((-1)^k - 1)(5^k - 5 \cdot 3^k + 10)$$

katsayısını yine (4.78)'de ilkinde yerine koyar ve gerekli hesapları yaparsak,

$$\begin{aligned} A_2 &= p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{6q+2} a_{k,2}}{k!} (f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+2}}\right)^{k+1} = p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((-1)^k - 1)(5^k - 5 \cdot 3^k + 10)2^{6q+2}}{k!} (f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+2}}\right)^{k+1} \\ &= -p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{6q+3}(5^{2k+1} - 5 \cdot 3^{2k+1} + 10)}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+2}}\right)^{2k+2} \end{aligned}$$

yaklaşıklığına göre (4.78)'dekileri şu şekilde elde etmiş oluruz:

$$(4.85) \quad \left\{ \begin{aligned} A_2 &= -p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{6q+3}(5^{2k+1} - 5 \cdot 3^{2k+1} + 10)}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+2}}\right)^{2k+2}, \\ B_2 &= -p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{6q+4}(5^{2k+1} - 5 \cdot 3^{2k+1} + 10)}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+3}}\right)^{2k+2}. \end{aligned} \right.$$

Yine bu yaklaşıklıklardaki p taraf tarafa toplamayla oluşan  $h^{6^*}$  ya ait katsayıların sıfırlanmasıyla şu şekilde elde edilirler:

$$(4.86) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=0}^2 \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} + \sum_{k=0}^2 A_k = \sum_{k=0}^2 \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2q+1}}{24(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^q}\right)^{2k+2} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2q-2}(2^{2q}+10)(3^{2k+1}-3)}{45 \cdot (2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+1}}\right)^{2k+2} - p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{6q+3}(5^{2k+1} - 5 \cdot 3^{2k+1} + 10)}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+2}}\right)^{2k+2} \\ &= \frac{2^{4q+2}(945p-1) - 21 \cdot 2^{2q} - 126}{945 \cdot 2^{4q+7}} (f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)) h^6 + \dots \Rightarrow p = \frac{2^{4q+2} + 21 \cdot 2^{2q} + 126}{945 \cdot 2^{4q+2}}, \\ &\sum_{k=0}^2 \frac{B_{2k+2} \left(\frac{1}{2}\right)}{(2k+2)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} + \sum_{k=0}^2 A_k = \sum_{k=0}^2 \frac{B_{2k+2} \left(\frac{1}{2}\right)}{(2k+2)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2q+2}}{24(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+1}}\right)^{2k+2} \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2q-1}(7 \cdot 2^{2q}+10)(3^{2k+1}-3)}{45 \cdot (2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+2}}\right)^{2k+2} - p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{6q+4}(5^{2k+1} - 5 \cdot 3^{2k+1} + 10)}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+3}}\right)^{2k+2} \\ &= -\frac{2^{4q+2}(945p+31) + 147 \cdot 2^{2q} + 126}{945 \cdot 2^{4q+12}} (f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)) h^6 + \dots \Rightarrow p = -\frac{31 \cdot 2^{4q+2} + 147 \cdot 2^{2q} + 126}{945 \cdot 2^{4q+2}}. \end{aligned} \right.$$

Buna göre (4.76)'dan üçüncü yaklaşıklıklarımızı şu şekilde elde etmiş oluruz:

$$(4.87) \quad \begin{cases} A_2(h) = \frac{2^{q-2}(2^{4q+2} + 21 \cdot 2^{2q} + 126)h}{945} \sum_{k=0}^5 (-1)^k \binom{5}{k} \left( f\left(b + (2k-5)\frac{h}{2^{q+2}}\right) - f\left(a + (2k-5)\frac{h}{2^{q+2}}\right) \right), \\ B_2(h) = 2A_2\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{2^{q-2}(31 \cdot 2^{4q+2} + 147 \cdot 2^{2q} + 126)h}{945} \sum_{k=0}^5 (-1)^k \binom{5}{k} \left( f\left(b + (2k-5)\frac{h}{2^{q+3}}\right) - f\left(a + (2k-5)\frac{h}{2^{q+3}}\right) \right). \end{cases}$$

4.  $m = 3$  ise: Son olarak (4.77)'de  $m = 3$  alırsak,

$$a_{k,3} = \sum_{j=0}^7 (-1)^{7k+j} (7-2j)^k \binom{7}{j} = ((-1)^k - 1)(7^k - 7 \cdot 5^k + 7 \cdot 3^{k+1} - 35)$$

katsayısını (4.78)'de ilkinde yerine koyar ve gerekli hesapları yaparsak,

$$\begin{aligned} A_3 &= p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{8q+3} a_{k,3}}{k!} (f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+3}}\right)^{k+1} = p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{8q+3} ((-1)^k - 1)(7^k - 7 \cdot 5^k + 7 \cdot 3^{k+1} - 35)}{k!} (f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+3}}\right)^{k+1} \\ &= -p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{8q+4} (7^{2k+1} - 7 \cdot 5^{2k+1} + 7 \cdot 3^{2k+2} - 35)}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+3}}\right)^{2k+2} \end{aligned}$$

yaklaşıklığına göre (4.78)'dekileri şu şekilde elde etmiş oluruz:

$$(4.88) \quad \begin{cases} A_3 = -p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{8q+4} (7^{2k+1} - 7 \cdot 5^{2k+1} + 7 \cdot 3^{2k+2} - 35)}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+3}}\right)^{2k+2}, \\ B_3 = -p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{8q+5} (7^{2k+1} - 7 \cdot 5^{2k+1} + 7 \cdot 3^{2k+2} - 35)}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+4}}\right)^{2k+2}. \end{cases}$$

Yine bu yaklaşıklıklardaki  $p$  taraf tarafa toplamayla oluşan  $h^8$ 'e ait katsayıların sıfırlanmasıyla şu şekilde elde edilirler:

$$(4.89) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=0}^3 \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} + \sum_{k=0}^3 A_k = \sum_{k=0}^3 \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2q+1}}{24(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^q}\right)^{2k+2} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2q-2} (2^{2q} + 10)(3^{2k+1} - 3)}{45 \cdot (2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+1}}\right)^{2k+2} \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2q+1} (2^{4q+2} + 21 \cdot 2^{2q} + 126)(5^{2k+1} - 5 \cdot 3^{2k+1} + 10)}{945 \cdot (2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+2}}\right)^{2k+2} \\ &- p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{8q+4} (7^{2k+1} - 7 \cdot 5^{2k+1} + 7 \cdot 3^{2k+2} - 35)}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+3}}\right)^{2k+2} \\ &= -\frac{3 \cdot 2^{6q} (4725p + 8192) + 25 \cdot 2^{4q+11} - 21 \cdot 2^{2q+9} - 691200}{14175 \cdot 2^{6q+21}} (f^{(7)}(b) - f^{(7)}(a)) h^8 + \dots \Rightarrow p = -\frac{3 \cdot 2^{6q+4} + 25 \cdot 2^{4q+2} - 21 \cdot 2^{2q} - 1350}{14175 \cdot 2^{6q-2}}, \\ &\sum_{k=0}^3 \frac{B_{2k+2} \left(\frac{1}{2}\right)}{(2k+2)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} + \sum_{k=0}^3 B_k = \sum_{k=0}^3 \frac{B_{2k+2} \left(\frac{1}{2}\right)}{(2k+2)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2q+2}}{24(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+1}}\right)^{2k+2} \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2q-1} (7 \cdot 2^{2q} + 10)(3^{2k+1} - 3)}{45 \cdot (2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+2}}\right)^{2k+2} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2q+2} (31 \cdot 2^{4q+2} + 147 \cdot 2^{2q} + 126)(5^{2k+1} - 5 \cdot 3^{2k+1} + 10)}{945 \cdot (2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+3}}\right)^{2k+2} \\ &- p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{8q+5} (7^{2k+1} - 7 \cdot 5^{2k+1} + 7 \cdot 3^{2k+2} - 35)}{(2k+1)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) \left(\frac{h}{2^{q+4}}\right)^{2k+2} \\ &= -\frac{3 \cdot 2^{6q} (4725p - 8128) - 775 \cdot 2^{4q+4} + 147 \cdot 2^{2q+2} + 5400}{14175 \cdot 2^{6q+21}} (f^{(7)}(b) - f^{(7)}(a)) h^8 + \dots \Rightarrow p = \frac{381 \cdot 2^{6q+4} + 775 \cdot 2^{4q+2} - 147 \cdot 2^{2q} - 1350}{14175 \cdot 2^{6q-2}}. \end{aligned} \right.$$

Buna göre (4.76)'dan dördüncü yaklaşıklıklarımızı şu şekilde elde etmiş oluruz:

$$(4.90) \quad \begin{cases} A_3(h) = -\frac{2^{q+2} (3 \cdot 2^{6q+4} + 25 \cdot 2^{4q+2} - 21 \cdot 2^{2q} - 1350)h}{14175} \sum_{k=0}^7 (-1)^k \binom{7}{k} \left( f\left(b + (2k-7)\frac{h}{2^{q+3}}\right) - f\left(a + (2k-7)\frac{h}{2^{q+3}}\right) \right), \\ B_3(h) = 2A_3\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{2^{q+2} (381 \cdot 2^{6q+4} + 775 \cdot 2^{4q+2} - 147 \cdot 2^{2q} - 1350)h}{14175} \sum_{k=0}^7 (-1)^k \binom{7}{k} \left( f\left(b + (2k-7)\frac{h}{2^{q+4}}\right) - f\left(a + (2k-7)\frac{h}{2^{q+4}}\right) \right). \end{cases}$$

Şu halde (4.61)'e göre (4.81), (4.84), (4.87) ve (4.90)'dan şu yaklaşıklıkları verebiliriz:

$$\begin{aligned}
 K_{n,1} &= K_n + A_0 = h \frac{f(a) + f(b)}{2} + h \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + \frac{2^q h}{24} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} \left( f\left(b + (2k-1) \frac{h}{2^q}\right) - f\left(a + (2k-1) \frac{h}{2^q}\right) \right) + O(h^4), \\
 K_{n,2} &= K_{n,1} + A_1 = K_{n,0} - \frac{2^{q-4}(2^{2q} + 10)h}{45} \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{k} \left( f\left(b + (2k-3) \frac{h}{2^{q+1}}\right) - f\left(a + (2k-3) \frac{h}{2^{q+1}}\right) \right) + O(h^6), \\
 K_{n,3} &= K_{n,2} + A_2 = K_{n,1} + \frac{2^{q-2}(2^{4q+2} + 21 \cdot 2^{2q} + 126)h}{945} \sum_{k=0}^5 (-1)^k \binom{5}{k} \left( f\left(b + (2k-5) \frac{h}{2^{q+2}}\right) - f\left(a + (2k-5) \frac{h}{2^{q+2}}\right) \right) + O(h^8), \\
 K_{n,4} &= K_{n,3} + A_3 = K_{n,2} - \frac{2^{q+2}(3 \cdot 2^{6q+4} + 25 \cdot 2^{4q+2} - 21 \cdot 2^{2q} - 1350)h}{14175} \sum_{k=0}^7 (-1)^k \binom{7}{k} \left( f\left(b + (2k-7) \frac{h}{2^{q+3}}\right) - f\left(a + (2k-7) \frac{h}{2^{q+3}}\right) \right) + O(h^{10}), \\
 &\vdots \\
 T_{n,1} &= T_n + B_0 = h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h\right) - \frac{2^q h}{24} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} \left( f\left(b + (2k-1) \frac{h}{2^{q+1}}\right) - f\left(a + (2k-1) \frac{h}{2^{q+1}}\right) \right) + O(h^4), \\
 T_{n,2} &= T_{n,1} + B_1 = T_{n,0} + \frac{2^{q-4}(7 \cdot 2^{2q} + 10)h}{45} \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{k} \left( f\left(b + (2k-3) \frac{h}{2^{q+2}}\right) - f\left(a + (2k-3) \frac{h}{2^{q+2}}\right) \right) + O(h^6), \\
 T_{n,3} &= T_{n,2} + B_2 = T_{n,1} - \frac{2^{q-2}(31 \cdot 2^{4q+2} + 147 \cdot 2^{2q} + 126)h}{945} \sum_{k=0}^5 (-1)^k \binom{5}{k} \left( f\left(b + (2k-5) \frac{h}{2^{q+3}}\right) - f\left(a + (2k-5) \frac{h}{2^{q+3}}\right) \right) + O(h^8), \\
 T_{n,4} &= T_{n,3} + B_3 = T_{n,2} + \frac{2^{q+2}(381 \cdot 2^{6q+4} + 775 \cdot 2^{4q+2} - 147 \cdot 2^{2q} - 1350)h}{14175} \sum_{k=0}^7 (-1)^k \binom{7}{k} \left( f\left(b + (2k-7) \frac{h}{2^{q+4}}\right) - f\left(a + (2k-7) \frac{h}{2^{q+4}}\right) \right) + O(h^{10}), \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{4.91}$$

İşte bu yaklaşıklıkların Tablo 4.4'teki çıktılara hemen hemen eş yaklaşımlarda oldukları görülür:

Metot 2, 2021	
$T_1 = 0.99428188829215795204$	$T_0 = 1.0028615075117907939$
$T_3 = 0.99999340119831826228$	$T_2 = 1.0000057271656654506$
$T_5 = 0.9999998927975159289$	$T_4 = 1.0000000103444292205$
$T_7 = 0.9999999998168780033$	$T_6 = 1.00000000001814149138$
$T_9 = 0.999999999996834745$	$T_8 = 1.00000000000003157413$

**Tablo 4.5.**  $q = 5$  için (4.91)'deki yaklaşıklıklarla (4.3)'teki örnekten elde edilen çıktılar.

Bu tablodaki sonuçlar bize **Ole Amble**'in 1952'de yaptığı gibi  $f'(x), f^{(3)}(x), f^{(5)}(x), \dots$  için merkezi fark formüllerini eziyetli bir şekilde çıkarmaya, ezberlememize ya da bunlara ait tabloların (bkz. "[Central finite difference \(Sonlu Merkezi Fark\)](#)") gereksiz olduğunu gösterir (ki **Ole Amble**'in orta nokta formülü için bulduğu yaklaşıklıklardaki katsayıların hatalı olmasının bir nedeni budur). İşte METOT 2'yi bu yüzden inşaa ettim ve onu burada tüm yönleriyle anlattım!

**Not 4.7.** Burada söz konusu METOT 2'den elde ettiğim (4.91) yaklaşıklıklarına ilişkin Mathematica programlarını şöyle çıkarttım:

1. [Metot 2, 2021](#) (Oluşturma: 14.10.2021, 17:08:07, Değiştirme: 08.11.2021, 14:52:07):
  - 1.1. [Kn,2 ve Tn,2 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), 08.11.2021, 14:52:07,
  - 1.2. [Kn,3 ve Tn,3 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), 08.11.2021, 14:52:07,
  - 1.3. [Kn,4 ve Tn,4 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), 08.11.2021, 14:52:07.

**4.3. METOT 3.** Bu metot [METOT 4](#)'ün  $\mathbb{Q}$ 'daki karşılığıdır. Şöyle ki eğer (3.7)'yi  $\mathbb{C}$ 'de değil  $\mathbb{Q}$ 'da genelleştirirsek yani  $k = 1, 2, \dots, m$  için  $p_k(q) \in \mathbb{Q}[q]$  polinomal katsayısı için

$$(4.92) \quad A_m(h) = \sum_{k=1}^m p_k(q)h \left[ \left( f\left(b + \frac{h}{2^{q+k-1}}\right) - f\left(b - \frac{h}{2^{q+k-1}}\right) \right) - \left( f\left(a + \frac{h}{2^{q+k-1}}\right) - f\left(a - \frac{h}{2^{q+k-1}}\right) \right) \right]$$

yaklaşıklıklığına göre  $I = \int_a^b f(x)dx$  integrali için (3.11)'e göre şu esas yaklaşıklıklar söz konusu olur (ki  $h = h_n$ 'dir):

$$(4.93) \quad \begin{cases} K_{n,m} = K_n + A_m(h) + O(h^{2m+2}), \\ T_{n,m} = T_n - A_m\left(\frac{h}{2}\right) + O(h^{2m+2}). \end{cases}$$

Burada Euler-Maclaurin toplam formülüne göre  $I$  integrali için  $K_n$  trapez formülü ve  $T_n$  orta nokta formülü için

$$(4.94) \quad \begin{cases} K_n = I + \sum_{k=1}^m a_k h^{2k} = I + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \dots + O(h^{2m+2}), \\ T_n = I + \sum_{k=1}^m b_k h^{2k} = I + b_1 h^2 + b_2 h^4 + \dots + O(h^{2m+2}) \end{cases}$$

eşitlikleri geçerlidir (Bkz. "[Konvergenzbeschleunigung durch Extrapolation am Beispiel der Romberg-Integration](#)" adlı tezinde trapez formülü için S. 35 ve orta nokta formülü için S. 43).

Bu eşitliklerdeki katsayılar şunlardır (Bkz. "[Euler-Maclaurin Formula](#)"):

$$(4.95) \quad a_k = \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left( f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right), \quad b_k = \frac{B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)}{(2k)!} \left( f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right).$$

Yine bu katsayılar Bernoulli polinomlarına göre ilkinde  $B_{2k} = B_{2k}(1)$  iken ikincisinde

$$(4.96) \quad B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right) B_{2k}$$

dir.

Diğer taraftan (4.92)'deki  $A_m(h)$ 'nin  $h$ 'nin çift kuvvetlerine göre açılımı,

$$(4.97) \quad \begin{aligned} f\left(a + \frac{h}{2^q}\right) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(a)}{r!} \left(\frac{h}{2^q}\right)^r \Rightarrow f\left(a + \frac{h}{2^{q+k-1}}\right) - f\left(a - \frac{h}{2^{q+k-1}}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(a)}{r!} \left(\left(\frac{h}{2^{q+k-1}}\right)^r - \left(-\frac{h}{2^{q+k-1}}\right)^r\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(2r+1)}(a)}{2^{(2r+1)(q+k-1)}(2r+1)!} (h^{2r+1} - (-h)^{2r+1}) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(2r+1)}(a)}{2^{(2r+1)(q+k-1)-1}(2r+1)!} h^{2r+1} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f^{(2r-1)}(a)}{2^{(2r-1)(q+k-1)-1}(2r-1)!} h^{2r-1} \end{aligned}$$

için

$$(4.98) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{p_k(q)}{2^{(2r-1)(q+k-1)-1}(2r-1)!} [f^{(2r-1)}(b) - f^{(2r-1)}(a)] h^{2r} = \underbrace{\sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m \frac{p_k(q)}{2^{(2r-1)(q+k-1)-1}(2r-1)!} [f^{(2r-1)}(b) - f^{(2r-1)}(a)] h^{2r}}_{=: A_m(h)} + O(h^{2m+2})$$

şeklindedir.

Şu halde (4.93)'e göre

$$(4.99) \quad \left\{ \begin{aligned} K_{n,m} &= K_n + A_m(h) = K_n = I + \sum_{k=1}^m a_k h^{2k} + \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m \frac{p_k(q)}{2^{(2r-1)(q+k-1)-1}(2r-1)!} [f^{(2r-1)}(b) - f^{(2r-1)}(a)] h^{2r} \\ &= I + \sum_{k=1}^m a_k h^{2k} + \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m \frac{p_r(q)}{2^{(2k-1)(q+r-1)-1}(2k-1)!} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] h^{2k} \\ &= I + \sum_{k=1}^m \left[ \frac{B_{2k}}{(2k)!} + \sum_{r=1}^m \frac{p_r(q)}{2^{(2k-1)(q+r-1)-1}(2k-1)!} \right] (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) h^{2k}, \\ T_{n,m} &= T_n - A_m\left(\frac{h}{2}\right) = T_n = I + \sum_{k=1}^m b_k h^{2k} - \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m \frac{p_k(q)}{2^{(2r-1)(q+k-1)-1}(2r-1)!} [f^{(2r-1)}(b) - f^{(2r-1)}(a)] \left(\frac{h}{2}\right)^{2r} \\ &= I + \sum_{k=1}^m b_k h^{2k} - \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m \frac{p_r(q)}{2^{(2k-1)(q+r-1)-1}(2k-1)!} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \left(\frac{h}{2}\right)^{2k} \\ &= I + \sum_{k=1}^m \left[ -\frac{\left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right) B_{2k}}{(2k)!} - \sum_{r=1}^m \frac{p_r(q)}{2^{(2k-1)(q+r)-1}(2k-1)!} \right] (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) h^{2k} \end{aligned} \right.$$

eşitliklerinden

$$(4.100) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{r=1}^m \frac{p_r(q)}{2^{(2k-1)(q+r-1)-1}(2k-1)!} &= -\frac{B_{2k}}{(2k)!}, \\ \sum_{r=1}^m \frac{p_r(q)}{2^{(2k-1)(q+r)-1}(2k-1)!} &= -\frac{\left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right) B_{2k}}{(2k)!} \end{aligned} \right.$$

ya da matrisel formda  $k = 1, \dots, m$  için  $e_k := c_k, d_k$  dersek,

$$(4.101) \quad \left\{ \begin{aligned} &\begin{pmatrix} \frac{1}{2^{-1}1!2^q} & \frac{1}{2^01!2^q} & \dots & \frac{1}{2^{m-2}1!2^q} \\ \frac{1}{2^{-1}3!2^{3q}} & \frac{1}{2^23!2^{3q}} & \dots & \frac{1}{2^{3m-4}3!2^{3q}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2^{-1}(2m-1)!2^{(2m-1)q}} & \frac{1}{2^{2m-2}(2m-1)!2^{(2m-1)q}} & \dots & \frac{1}{2^{m(2m-3)}(2m-1)!2^{(2m-1)q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(q) \\ p_2(q) \\ \vdots \\ p_m(q) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{B_2}{2!} \\ \frac{B_4}{4!} \\ \vdots \\ \frac{B_{2m}}{(2m)!} \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} \frac{1}{2^11!2^q} & \frac{1}{2^21!2^q} & \dots & \frac{1}{2^{m1}!2^q} \\ \frac{1}{2^33!2^{3q}} & \frac{1}{2^63!2^{3q}} & \dots & \frac{1}{2^{3m3}!2^{3q}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2^{2m-1}(2m-1)!2^{(2m-1)q}} & \frac{1}{2^{2(2m-1)}(2m-1)!2^{(2m-1)q}} & \dots & \frac{1}{2^{m(2m-1)}(2m-1)!2^{(2m-1)q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(q) \\ p_2(q) \\ \vdots \\ p_m(q) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\left(1 - \frac{1}{2^1}\right) B_2}{2!} \\ \frac{\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) B_4}{4!} \\ \vdots \\ \frac{\left(1 - \frac{1}{2^{2m-1}}\right) B_{2m}}{(2m)!} \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

çifte denklem sistemi elde edilir. Burada her 2 sistemin çözümünü Cramer yöntemine göre verebilir ve katsayılar determinantlarının çarpanlarına ayrıldığını söyleyebilirim. Fakat bu katsayılar determinantlarının çarpanlarına nasıl ayrıldığını göstermek ve bunların devamındaki  $p_1(q), p_2(q), \dots, p_m(q)$  katsayılarını **METOT 4**'teki gibi vermek çok zaman ister. Diğer taraftan aşağıdaki nottaki programlarda gördüğünüz üzere Mathematica,  $p_1(q), p_2(q), \dots, p_m(q)$  katsayılarını bulur ve benim tercihim bu yönde olacaktır. Bu nedenle bu hesapları **METOT 3**'ün teorisiyle uğraşanlara bırakıyorum ve şimdiden kolay gelsin diyorum!

Şimdi tüm metotları karşılaştırıp genel bir değerlendirme yapmam gerekirse özetle şunları söyleyebilirim: Piobert-Parmentier Metodu için verdiğim tüm bu 4 metottan (ki C'dekine "**METOT 4**" diyelim ve tüm aramalarıma rağmen bu 4 metodun dışında başka bir metot bulamadım) I integraline yaklaşım bakımından son 2 metot yeterlidir. Yani **Ole Amble**'in merkezi fark formülleriyle boşuna uğraştığı görünür ve onun arkasından Binom katsayılarına göre verdiğim **METOT 2** de aynı durumdadır (ki **METOT 2**'yi simetrik katsayıları değiştirerek sonsuza genişletebilirsiniz). Buna göre tüm metotlar içinde yakınsaklık hızı en iyi olan metot, **METOT 4** iken hesaplama hızı bakımından en iyi metot, **METOT 3**'tür. Ama her 2 metotla I'ya aynı yaklaşımlarda bulunduğunuz zaman **METOT**'ün **METOT 4**'ten çok daha hızlı olduğunu görürsünüz. Bu değerlendirme sonuçlarını aşağıdaki Mathematica dosyalarında görebilirsiniz!

**Not 4.8.** Burada **METOT 3** gereğince (4.101)'den elde ettiğim  $p_k(q)$  katsayılarını (4.92)'de yerlerine koyup (4.93)'deki  $K_{n,m}$  ve  $T_{n,m}$  yaklaşıklık çiftine ait yazdığım Mathematica programları şunlardır:

1. [Metot 3, 2021](#) (Oluşturma: 23.11.2021, 08:19:06, Değiştirme: 30.11.2021, 06:36:56):
  - 1.1. [Kn,1 ve Tn,1 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#) (Oluşturma: 19.07.2021, 12:50:37, Değiştirme: 20.07.2021, 19:27:33),
  - 1.2. [Kn,2 ve Tn,2 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#) (Oluşturma: 30.09.2021, 04:07:34, Değiştirme: 01.10.2021, 01:22:01),
  - 1.3. [Kn,3 ve Tn,3 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#) (Oluşturma: 14.10.2021, 17:08:07, Değiştirme: 08.11.2021, 14:52:07),
  - 1.4. [Kn,4 ve Tn,4 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#) (Oluşturma: 14.10.2021, 17:08:07, Değiştirme: 08.11.2021, 14:52:07),
  - 1.5. [Kn,5 ve Tn,5 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#) (Oluşturma: 24.01.2021, 21:20:03, Değiştirme: 23.03.2022, 14:38:49),
  - 1.6. [Kn,6 ve Tn,6 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#) (Oluşturma: 23.03.2022, 17:38:53, Değiştirme: 23.03.2022, 20:26:55),
  - 1.7. [Kn,12 ve Tn,12 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#), (Oluşturma: 25.01.2022, 03:18:29, Değiştirme: 26.01.2022, 05:15:09).



**Resim 4.6.** Çanakkale Savaşları ile ilgili pek çok eser ve ders kitaplarında, Büyük Önder **Mustafa Kemal Atatürk**'ün 103 yıl önce Gelibolu Yarımadası'ndaki Conkbayırı'nda bir siperde görülen fotoğrafı çeken Binbaşı **Haydar Mehmet Alganer**'in makinesi, **Çanakkale Deniz Müzesi**'nin [en nadide eserleri arasında yer alıyor](#) (Bkz. [Alganer'in orijinal fotoğrafı](#) ve [geliştirilmiş renkli fotoğrafı](#)). Çanakkale Savaşları'na binbaşı rütbesiyle katılan **Alganer**, cepheyi imkanları ölçüsünde makinesi ile görüntüledi ve 17 Haziran 1915'te, 19. Tümeni ziyaret eden Kurmay Albay **Mustafa Kemal'e**, Conkbayırı'nda siperdeyken çektiği fotoğrafını hediye etti. O dönemde okuma yazma oranının düşük olması nedeniyle hatırat tutmanın çok az olduğu, birliklere mektup yazıcılarının gönderildiği Çanakkale Cephesi'nde **Alganer**'in ayrıca günlük tutması, yıllar sonra savaşın tarihinin okunması, yaşananların anlaşılabilmesi ve sonraki nesillere aktarılması için iyi bir kaynak oluşturdu, [Atatürk'ü Çanakkale'de çeken makine](#).

Çok ilginçtir, YANDEX tarafından **Çanakkale Zaferi'nin 100. Yıldönümü** nedeniyle **Alganer**'in kamerasının ötesine geçilerek tam bir canlandırma ile anasayfada kullanıcılara sunulan bu fotoğrafta ATA Algoritmaları adına çok ilginç bir şey keşfettim: **Atatürk**'ün **hâki** renkteki ceketinin üzerinde 2 tane "A" harfi şeklinde gölgeler mevcuttur. Bunlar **Atatürk**'ün 17 Haziran 1915'te Conkbayırı'ndaki bir siperde düşmanı gözetlerken hemen önündeki çalıların ceketinin üzerinde bıraktığı ve ceketteki buruşukluklardan kaynaklanan karışık ama anlamlı (ilahi) izler olup, **Mustafa Kemal**'in 19 yıl sonra alacağı "ATATÜRK" soyadındaki "A" harflerini gösteriyordu!

Bu konuda **Lord Kingross** şu anekdotunu anlatır: "Daha önce, hiçbir Türk devlet başkanının yapmadığı bir şekilde, Türk olmaktan duyduğu gururu açıklayan bir soyadı aldı: **ATATÜRK**. Bundan sonra, **Mustafa** adını da büsbütün bırakarak, imzasını '**Kemal Atatürk**' diye atacaktı", **Bir Ulusun Yeniden Doğuşu, Bölüm 58: Türklerin Babası, S. 545-546**.

Fakat ulusu O'na, kısaca "ATA" diyordu. İşte, fotoğraftaki o ilahi izlerden oluşan 2 tane "A" harfi bu isimdeki harflerdir!

Son olarak **METOT 1, 2 ve 3**'teki yaklaşıklıkların yakınsaklıklarını hızlandıran ATA (ATATÜRK) ekstrapolasyonumuzu tanımlayalım.

**METOT 1, 2 ve 3 İçin 2. Tür ATA Ekstrapolasyonu.** Eğer METOT 1'deki  $(T_{2m+1}, T_{2m})$  ile METOT 2 ve 3'teki  $(K_{n,m}, T_{n,m})$  yaklaşıklık çiftlerini  $\forall \ell \in \mathbb{N}^+$  için  $X_{\ell n} = T_{2m+1}, T_{2m}, K_{\ell n, m}, T_{\ell n, m}$  (ki  $T_{2m+1}$  ve  $T_{2m}$ 'de n yerine  $\ell n$ 'nin geldiğine ama burada görülmediğine dikkat ediniz) genel yaklaşıklıklar olarak göz önüne alırsak,

$$(4.102) \quad Y_{\ell n, 0}(X) = X_{\ell n}$$

başlangıç değerine göre  $\forall k \in \mathbb{N}$  için 2. Tür E-ATA Algoritması Ver. 1 (2003) ya da 2. Tür ATA Ekstrapolasyonu geçerli olur (Bkz. [\(2.34\)](#) ve [\(2.39\)](#)):

$$(4.103) \quad Y_{\ell(n+1), k+1}(X) = \frac{4^{\ell(k+m+1)} Y_{\ell(n+1), k}(X) - Y_{\ell n, k}(X)}{4^{\ell(k+m+1)} - 1} + O(h_{\ell n}^{2k+2m+4}).$$

Burada dikkat ederseniz  $X_{\ell n}$ 'deki yaklaşım mertebesi  $O(h_{\ell n}^{2m+2})$  olduğundan,  $h_n$ 'nin kuvvetinin yarısı  $\left(\frac{2m+2}{2} = m+1\right)$  4'ün kuvvetindeki k'nin ötelenildiği değeri gösterirken, Y ekstrapolasyonunun yaklaşım mertebesi şu şekilde elde edilir:

$$(4.104) \quad O(h_{\ell n}^{2(k+m+1+1)}) = O(h_{\ell n}^{2(k+m+2)}) = O(h_{\ell n}^{2k+2m+4}).$$

Bunun için ilkin  $Y_{\ell n, 0}(X) = X_{\ell n}$ 'deki yaklaşım mertebesi  $O(h_{\ell n}^{2m+2})$  iken Y ekstrapolasyonunda  $k=0$  için bu silinir ve bir sonraki yaklaşım olan  $Y_{\ell n, 1}(X)$ 'deki  $O(h_{\ell n}^{2m+2+2}) = O(h_{\ell n}^{2m+4}) = O(h_{\ell n}^{2(m+2)})$  yaklaşım mertebesi ortaya çıkar. Aynı şekilde ikinci olarak  $Y_{\ell n, 1}(X)$ 'deki yaklaşım mertebesi  $O(h_{\ell n}^{2m+4})$  iken Y ekstrapolasyonunda  $k=1$  için bu da silinir ve bir sonraki yaklaşım olan  $Y_{\ell n, 2}(X)$ 'deki  $O(h_{\ell n}^{2m+4+2}) = O(h_{\ell n}^{2m+6}) = O(h_{\ell n}^{2(m+3)})$  yaklaşım mertebesi ortaya çıkar. Özetle diğer k değerleri için de işlem bu şekilde devam eder ve sonunda k için (4.104)'e ulaşılır.

#### **Alganer'in Fotoğrafındaki Keşfinin Hikâyesi**

METOT 3'ü güncellendikten sonra resmi de değiştirdim. Bu son fotoğrafın hikâyesi aşağıdaki Büyük Piramit'teki Anzak kaydıyla başlar. Ama bundan önce 02.11.2016, 22:54'te başladığım ve her seferinde yeni bulgularla genişlettiğim "**Romberg Metodu.docx**" adlı dosyamdaki (ki siz bunlardan ilk olanlarını web sitemde kronolojik olarak RİK 1, 2, 3 ve 4 olarak görüyorsunuz) şu gelişmeleri vermem gerekiyor.

Öncelikle anılan bu dosyayı 02.11.2016, 22:54'ten 15.04.2017, 03:39:24-01:35:35'e kadar hep A4 formatında yazıyordum. Ama bu formatta resimler ve denklemler zor sığıyordu ve bu yüzden 05.05.2017, 02:07:55'te A3 formatına geçtim. Bununla birlikte web sitemin girişindeki ilk kapağı Photoshop'ta A3 formatında 02.06.2017, 03:46:04'te hazırlamıştım. Sonra dosyadaki "**3.4. E-ATA 1 Algoritmaları'ndan Transferler**" bölümünün başına konulacak bir resim arayışına geçtim. İlk aşağıdaki piramitteki kayıtlarla ilişkin keşif tarihinden 2 gün sonra, 30.06.2017, 04:20:34'te bölümün başına ve sağ tarafına gelecek şekilde Türk-Alman ittifakı nedeniyle **Mustafa Kemal**'in 31 Ekim 1918'deki Yıldırım Orduları Komutanlığı'na atanmasına

## Piobert-Parmentier Metodu'nun Q Üzerinde Genelleştirilmesi

İlişkin *Limon von Sanders* ile birlikte çekilmiş bir [fotoğraf](#) koymuştum ama *Alganer*'in fotoğrafındaki keşfi yapınca, onun yerine hemen 2003'ten kalma 2. Tür E-ATA Algoritması'na layık bu fotoğrafı koydum. Resim 4.6'daki keşif tarihim, 10.10.2017, 03:12'dir (ki bu keşif hiçbir yerde geçmiyordu). Bu resmin altındaki yazı ise 18.07.2017, 23:50 tarihli dosyanın üzerine yazdığım 06.02.2018, 13:13:27 tarihli bir diğer dosya idi. Bu son dosyayı kaydettiğim tarih, 05.01.2018, 13:45:15'tir.

Şimdi öyle görünüyor ki Resim 4.6'daki keşfimi aşağıdaki Resim 4.7'ye borçluyum. Çünkü eğer Resim 4.7'de araştırma yapmasaydım Resim 4.6'da *Atatürk*'ün üzerindeki "A" harflerini fark edemezdim. Yani Resim 4.7 Resim 4.6'ya odaklanmamı sağladı, diyebilirim. Ayrıca Azakların siperlerdeyken *Atatürk*'ü gördükleri zaman neden "*Sarı Paşa (The Blonde Pascha)*" dediklerini (bkz. sarı bıyıklarına) bu fotoğrafta net bir şekilde görebiliyoruz. *Nazım Hikmet*, [bir şiirinde Atatürk](#)'ü sarışın bir kurda benzetiyordu!

Burada son dosyamdaki piramitte keşfettiğim I. ve II. Dünya Savaşları'na katılmış askerlere ait yazıtlara ilişkin parçayı aşağıda orijinal şekilde sunuyorum. Bu parçayı ve onunla birlikte Resim 4.6'yı kronolojide sırası geldiğinde RİK adlı bir dosyamda tekrar göreceksiniz!

### Büyük Piramit'teki Bir Anzak Kaydı Hakkında

28.06.2017, 01:00.



**Resim 4.7.** Büyük Piramit'in içindeki Büyük Basamak'ın doğusunda kalan Büyük Galeri duvarında I. ve II. Dünya savaşlarına katılmış 2 askerın kaydı, [Inside KHUFU](#). **Not (Yol Tarifi).** Bu bağlantıya tıkladıktan sonra son üst köşedeki "OLD KINGDOM"un altındaki "KHUFU PYRAMID"e girin. Burada yine sol üst köşedeki "INSIDE KHUFU" linkini tıklayınız ve orada en üstteki soldan 2. yere geliniz. Bunun üzerinde "Grand Gallery (Upper)" yazar. Şimdi farenizle Büyük Galeri'nin doğu duvarı tam karşınızda olacak şekilde sola dönün. İşte bu yazıtlar oradadır ve eğer arzu ederseniz farenizle zoom yaparak bu yazıtları detaylı bir şekilde inceleyebilirsiniz!

Öncelikle piramitleri ziyaret eden kişilerin piramitlerin çeşitli yerlerine kayıtlar düştüklerini biliyoruz. Büyük Piramit bu konuda başı çeker. Çok uzun zamandan beri bildiğim yukarıdaki kayıtların izlerini sürdüm ve ilk kez burada açıklıyorum.

Büyük Galeri'nin sonundaki Büyük Basamak üzerinde doğu tarafındaki duvara baktığımızda rahatlıkla görebileceğiniz bu kayıtlar ve çözümlenmeleri şöyledir:

1. N. C. 1915.

I.O. R.T.U.R.: I. Officer Royal T.U. Regiment.

I. Dünya Savaşı'ndan kalma bu kaydın ilk satırı derhal kendisini ele veriyor. Ama ikinci satırdaki yazının da bununla ilgisi olduğunu yani ordudaki pozisyonu gösteren bir kayıt olduğunu düşünüyorum ve bunu da bir yere kadar çözebildim. Eğer bu ikinci yazı çözülebilirse ilk satırda sadece ad ve soyadını baş harfleriyle yazan kişinin kim olduğunu çözebiliriz.

Bilindiği gibi Avustralya I. Dünya Savaşı'na tüm askerlerini Mısır (ki burada kamp yapmak suretiyle) üzerinden gönderdi. Mısır'a gelen ilk tabur 11. Tabur idi ve bu tabur Büyük Piramit'in kuzeyinin aşağısında büyük bir kampta toplandılar. 11. Tabur Gelibolu'ya gelmezden yani dedelerimizi kıtır kıtır kesmeden önce [Büyük Piramit'in önünde bir hatıra fotoğrafı](#) çektiler. Ancak bu fotoğrafta 11. Tabur'un tamamı yoktur; orada sadece 703 asker vardır. Çünkü 11. Tabur'da [1185 asker](#) vardı. Ben ilk başta bu yazıtı yazan askerın o ünlü fotoğraftakinden biri olacağını zannetmişim ama listeye baktığımda bulamadım. Daha sonra 11. Tabur Listesi'ne bakınca şu 2 askeri buldum:

Cole N.: Er [Norman Cole](#).

Crossley N.: Er [Norcliffe Crossley](#).

Bilirsiniz, askerde isimler önce soyad sonra ad ile gösterilir. Fakat yukarıdaki kaydı koyan asker, ad ve soyadını sivildeki gibi yazmış. İşte bu şekilde araştırma yaptığımızda karşınıza 11. Tabur'dan sadece 2 asker çıkıyor. Ama bu askerler Gelibolu'dan sağ çıkmışlar, iyi mi! İlki Gelibolu'da yakalandığı [akciğer tüberkülozu](#) nedeniyle (önce Mısır'a, oradan da memleketine) Avustralya'ya geri gönderilmiş ve 4 Mart 1918'de ölmüş. İkinci asker ise Gelibolu'dan Mısır'a döndükten sonra oradan da Batı cephesine, Fransa'ya gönderilmiş ve 25 Temmuz 1916'da cephede ölmüş. Mezarı Somme'dedir.

Çok ilginçtir, Yeni Zelandalı matematikçi ve bu makalenin konularından biri olan "[Aitken's process](#)" ile algoritmaları hızlandıran *Alexander Craig Aitken* de bu savaşlara katılmış ve her 2 cepheden (Gelibolu ve Somme) sağ çıkmayı başarmıştır (Bkz. "[Gelibolu'dan Somme'ye \(Gallipoli to the Somme\)](#)").

Yukarıdaki resimde geçen 2. kayıt şudur:

2. LT. Eo. F. ORTOWSKI: Lieutenant (Teğmen) [Executive Officer](#) F. Ortowski.

USA-1944

ARMY AIR CORPS

Bu kayıt ilk kaydı doğrudur. Çünkü o kaydı gören Amerikalı havacı, onun altına bir kayıt da ben koyayım diye düşünmüş. İlk kayıttan 29 yıl sonra bu kaydı, daha doğrusu künyeyi yazan Amerikalı havacı büyük bir ihtimalle şimdi bizim çözemediğimiz ilk kayıttaki künyenin ne anlama geldiğini biliyordu. Fakat ben bu askerin kaydını Amerikan Havacılık Kayıtlarından araştırırken bulamadım. Çünkü Amerikalılar Avustralyalılar gibi kolaylık sağlamıyorlar. Öyle ki Avustralyalılar her askerin peşinde koşuyor ve eğer [Norman Cole](#) linkine tıklarsanız şu uyarıda görüldüğü üzere yardım istendiğini görürsünüz: “*Help us honour Norman Cole's service by contributing information, stories, and images so that they can be preserved for future generations*”.

**BATTELFIELD I** oyununun “4. The Runner (Haberci)” bölümünün sonunda **Frederick Bishop (1862-1915)** şunu der: “*Good kid (Aferin evlat)*”.

Bu sözün hemen arkasından Çanakkale Savaşları ile ilgili şu bilgiler verilir:

“*Vahşi çatışma 9 ay sürdü ve sonunda Osmanlılar, uğruna çok şey feda ettikleri zafere ulaştılar.*

*Gelibolu'yu vermediler.*

*100,000'e yakın Osmanlı askeri vatanlarını savunurken can verdi.*

*Onların arasından sonrasında Türkiye Cumhuriyeti'ni kuracak deneyimli liderler çıktı.*

*Bu savaşta Avustralyalılar ve Yeni Zelandalılar ilk kez ülkeleri için savaştilar.*

*Kahramanlık ve kardeşlik öyküleri bu ülkelerin ulusal kimliklerinin oluşmasında büyük rol oynadı.”*

Burada sözü ya da iddia edilenin aksine, deneyimli tek bir liderimiz vardı ve O'nun da ANZAKLAR için sözü şuydu:

“*Bu memleketin toprakları üstünde kanlarını döken kahramanlar, burada dost bir vatanın bağrında bulunuyorsunuz. Huzur ve barış içinde uyuyun. Sizler Mehmetçikler ile yan yana, koyun koyunasınız. Uzak diyarlardan evlatlarını bu savaşa gönderen analar, gözyaşlarınızı dindiriniz. Evlatlarımız, bizim bağrımızdadır. Onlar bu topraklarda canlarını verdikten sonra artık bizim çocuklarımız olmuşlardır.”*, ATATÜRK-18 Mart 1934.

Görüldüğü üzere Çanakkale Savaşları ANZAKLAR dediğimiz Avustralyalılar ile Yeni Zelandalıların uluslaşmasına neden olmuştur. Fakat ATATÜRK'ün Osmanlı İmparatorluğu'nun külleri üzerine kurduğu Türkiye Cumhuriyeti için başlattığı uluslaşma süreci kesintiler yüzünden tamamlanamamıştır. Siz anladınız onu!

**Not 4.9.** Bu arada bir itirafta bulunayım: Aslında Resim 4.7'deki ANZAK'ın kimliğini tam teşhis edebilsen ve Gelibolu'da şehit düşmüş olduğunu tam tespit edebilseydim, **BATTELFIELD I**'in “4. Haberci” bölümünde **Frederick Bishop** yerine onu koyacak ve bunu bir sürpriz yapmak için Youtube'dan tüm dünyaya yayınlayacaktım (ki o sırada bir web sitem yoktu). Olmadı, çünkü bu ANZAK askerinin kimliğini tam olarak teşhis edebilmek gerçekten çok güçlü!

*D. PAMUKTULUM*