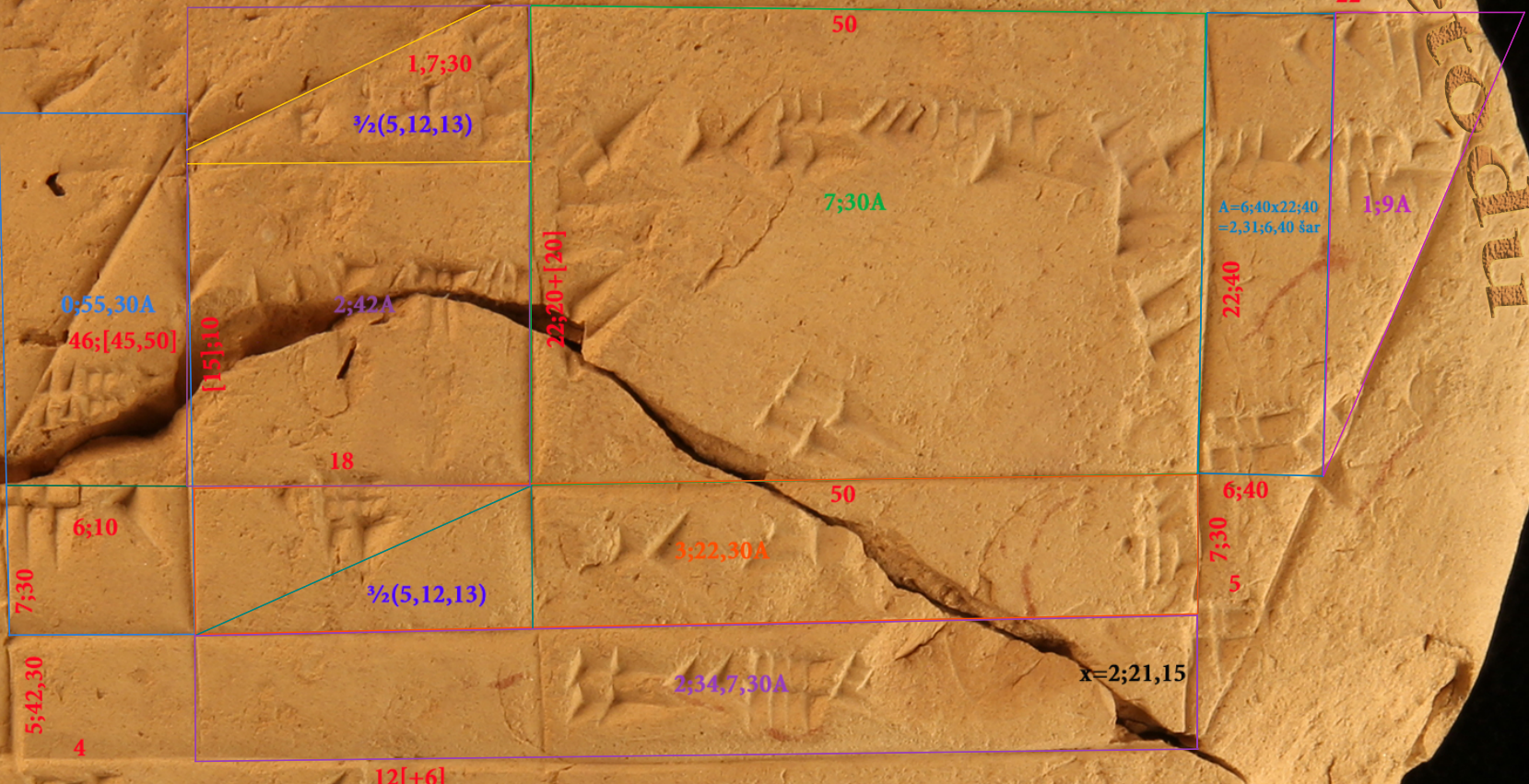
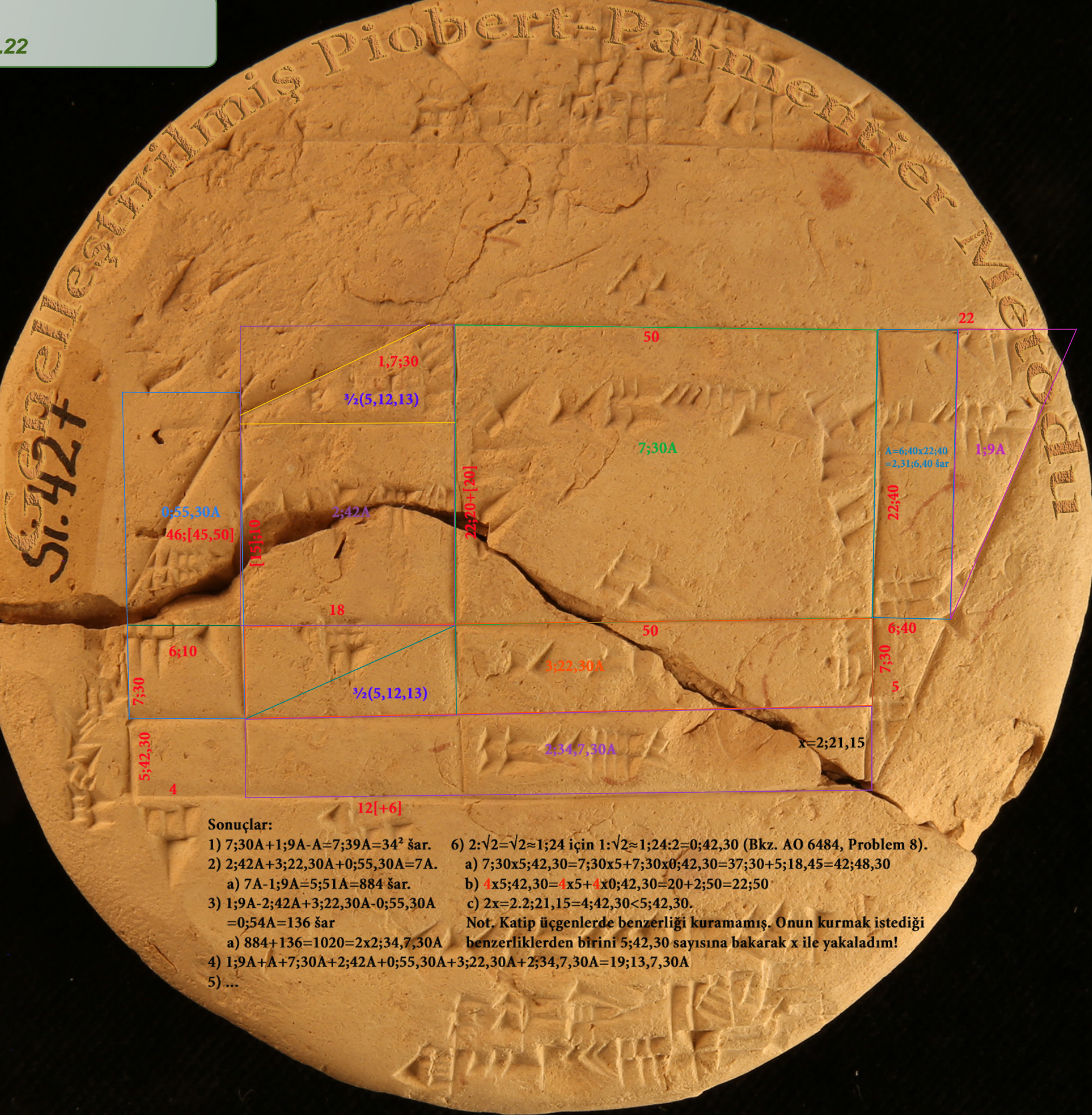


Si.427



Sonuçlar:

- 1) $7;30A+1;9A-A=7;39A=34^2$ şar.
- 2) $2;42A+3;22,30A+0;55,30A=7A$.
 - a) $7A-1;9A=5;51A=884$ şar.
- 3) $1;9A-2;42A+3;22,30A-0;55,30A=0;54A=136$ şar.
 - a) $884+136=1020=2x2;34,7,30A$
- 4) $1;9A+A+7;30A+2;42A+0;55,30A+3;22,30A+2;34,7,30A=19;13,7,30A$
- 5) ...
- 6) $2:\sqrt{2}=\sqrt{2}\approx 1;24$ için $1:\sqrt{2}\approx 1;24;2=0;42,30$ (Bkz. AO 6484, Problem 8).
 - a) $7;30x5;42,30=7;30x5+7;30x0;42,30=37;30+5;18,45=42;48,30$
 - b) $4x5;42,30=4x5+4x0;42,30=20+2;50=22;50$
 - c) $2x=2.2;21,15=4;42,30<5;42,30$.

Not. Katip üçgenlerde benzerliği kuramamış. Onun kurmak istediği benzerliklerden birini 5;42,30 sayısına bakarak x ile yakaladım!

KAMUYA AÇIKLANACAK

Si.427

İşbu tezimdeki Piobert-Parmentier Metodu'nu ¹ genelleştirerek elde ettiğim METOT'a ve bu metottan elde edilen yaklaşıklıklara Cumhuriyetimizin 100. Yıl Dönümü'nde Ay yüzeyine hibrit bir roket indirerek Bilim ve Teknoloji'ye katkılarından dolayı "**Recep Tayyip Erdoğan Metodu**" ve "**Recep Tayyip Erdoğan Yaklaşıklıkları**" adlarını verdim (Bkz. "**Önsöz**", S. 3-5). Formülleri kendisine, kendisi de bize kutlu olsun ve bayrağı bizden sonra devralacaklara daha nice 100 yıllar dileriz!

Hatırlayacağınız üzere **RİK 4**'ün **Önsöz**'ünde Sovyetler Ekim Devrimi ve SSCB'nin 50. yıl dönümlerini görmüşlerdi ama 100. yıl dönümlerini görememişlerdi. Ama onların görmediğini biz görebiliriz. Çünkü 10.02.2021'de Cumhurbaşkanı Erdoğan, Beştepe Millet Kongre ve Kültür Merkezi'ndeki Milli Uzay Programı Tanıtım Toplantısı'nda Türkiye adına tarihi bir dönüm noktasına şahitlik etmek üzere bir araya geldiklerini söyledikten sonra bize şu müjdeyi verdi:



Yani SSCB'ye kısmet olmayan "**100 ЛЕТ (100. Yıl)**"da Ay yüzeyine biz ineceğiz. Hem de sert inişle. Bu ilk kez olacak, çünkü bu sefer Ay modülü yerine doğrudan hibrit bir roket indireceğiz. Bu sırada Ay yüzeyinden büyük bir miktarda toprağın kalkması bekleniyor! 1973'teki LUNA 21'inkinden daha fazla olması bekleniyor. Bilindiği gibi LUNA 21 Ay yüzeyine APOLLO Seferleri'ndeki Ay modüllerinden daha yumuşak bir şekilde inmişti ama buna rağmen, bir bacak üzerine monte edilmiş **Lenin**'in madalyonu tozla kaplanmıştı (Bkz. [Kapak](#)).



ABD'de yaşayan Türk iş adamı **Ekmel Anda**, APOLLO 15 ile Ay'a götürülen bayrağımızı Amerikalı koleksiyonculardan satın alarak 41 yıl sonra Türkiye'ye getirdi (Bkz. "[Ay'a giden Türk bayrağı 41 yıl sonra Türkiye yolunda](#)").

Yanda görülen bayrağımız 1971'de APOLLO 15 ile Ay'a götürülmüş ve sonra tekrar Dünya'ya getirilmişti. Fakat ABD'de yaşayan iş adamımız **Ekmel Anda**, bayrağımızın peşini bırakmadı; uzun bir araştırma ve uğraştan sonra 2012'de satın aldığını belirterek duygularını şöyle ifade etti: "**Çok gurur verici bir şey bu benim için, Ay'a giden bayrağımızın Türk çocuklarına ilham vereceğine inanıyorum. Onların hayallerini süsleyeceğine ve onların vizyonlarını güçlendireceğine inanıyorum. Ay'a giden ilk ve tek Türk bayrağı bu bayrak. Artık bayrağımızı uzaya biz götürelim. Bir gün Türk çocuklarının da hayallerini gerçekleştirmesi için bu bayrağı Türkiye'ye gönderiyorum. Sevgili dostum Sunay Akın çok başarılı bir projeyi hayata geçirdi, bayrağı bulup satın aldığımı öğrenince çocuklar gibi sevindi!**"

Cumhurbaşkanı **Erdoğan**, çok önemli açıklamalarda bulundu: "**İlk yerli ve milli yüksek çözünürlüklü yer gözlem uydumuz İmce'nin entegrasyon işlemleri tamamlandı, testleri sürüyor.**" ifadesinden sonra "**Dünya yörüngesinden ateşleyeceğimiz kendi milli ve özgün hibrit roketimizle 29.10.2023'te Ay'a sert iniş gerçekleştireceğiz.**" dedi ve 10 uzay hedefini sırasıyla şöyle müjdeledi:

¹ Gerçekte böyle bir metot yok. Sadece **Piobert** ve **Parmentier**'in 19. yy.'dan kalma çalışmaları 20. yy.'ın ilk yarısına kadar devam ettirilmiş ve her yeni çıkarımda bulunan matematikçi farklı bir metot vermiştir. Örneğin **Romberg**, tezinin ilk bölümünde kendi metodunu (Bileşik Trapez Kuralı) verdikten sonra 2. bölümünde "**Ambles Methode (Amble'in Metodu)**" demiştir (Bkz. "**W. Romberg: Vereinfachte numerische Integration. Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim. v. 28. 1955. p. 30-36. MR 61, 517**" ve "**O. AMBLE: A set of formulas for numerical integration. Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim. v. 25. 1952. p. 38-41. MR 14, 907**"). Ama ben, sırf tarihi kronolojiyi bozmamak için tüm bu yöntemleri orijine taşıdım ve bu yüzden bu tezimin adına "**Genelleştirilmiş Piobert-Parmentier Metodu**" dedim.

Cumhurbaşkanı Erdoğan: 2023'te Ay'a gideceğiz

Türkiye'nin Milli Uzay Programı'nın tanıtımı,
Cumhurbaşkanı Recep Tayyip Erdoğan'ın katılımıyla
Cumhurbaşkanlığı Millet Kongre ve Kültür
Merkezi'nde yapıldı.



Cumhurbaşkanı
**RECEP TAYYIP
ERDOĞAN**



TUA

Türkiye Uzay
Ajansı

İŞTE TÜRKİYE'NİN UZAY PROGRAMININ 10 YILLIK 10 HEDEFİ

HEDEF 1

"Cumhuriyetimizin
100'üncü yılında
Ay'a ilk teması
gerçekleştirmek"

HEDEF 2

"Yeni nesil uydu
geliştirme alanında
dünya ile rekabet
edebilecek ticari
marka ortaya
çıkarmak"

HEDEF 3

"Türkiye'ye ait
bölgesel
konumlama ve
zamanlama sistemi
geliştirmek"

HEDEF 4

"Uzaya erişimi
sağlamak ve bir
uzay limanı
işletmesi kurmak"

HEDEF 5

"Uzay havası ya da
meteorolojisi olarak
tabir edilen alana
yatırım yaparak,
uzaydaki yetkinliğimizi
artırmak"

HEDEF 6

"Türkiye'yi
astronomik
gözlemler ve uzay
nesnelerinin
yerden takibi
konularında daha
ileri bir seviyeye
ulaştırmak"

HEDEF 7

"Ülkemizde uzay
sanayii ekonomi
sistemini daha da
geliştirmek"

HEDEF 8

"Bir uzay teknolojisi
geliştirme bölgesi
kurmak"

HEDEF 9

"Uzay alanında
etkin ve yetkin
insan kaynağımızı
geliştirmek"

HEDEF 10

"Bir Türk
vatandaşını uzaya
göndermek"



İthaf

Kendisinin **Erbakan** Hocamız gibi 8-16. yy.'da yaşamış Türk-İslam Bilim Adamları'na, özellikle Matematikçilere, düşkün olduğu biliyoruz. Örneğin "[2019 Prof. Dr. Fuat Sezgin Yılı](#)"nın kapanış töreninde "*Algoritmaya ismini veren El Harezmi'dir. Açaların pergelle ölçümünü geometriye kazandıran El Kindi'dir. Ondalık kesirleri geliştiren El Kaşi'dir*" demiştir.

Efendim, tezimdeki bu yeni formüller yenmiyor ama bir Eski Mısır atasözünde denildiği gibi adınızı gelecek kuşaklara taşıyor. Piramitlerde çalışırken öğrendiğime göre, Eski Mısır'da ölen birinin adını söylediğinizde, o kişinin yaşadığına inanılırdı. Bir diğer canlandırmaya göre, "[10 Emir](#)" filminde **Moses (Musa) II. Ramses'e**, "*İzin verin, heykeliniz size 1000 yıl sadakatimi gösterecek!*" demiş ve **II. Ramses de**, bunun ardında yatan sırrı (ölümsüzlüğü) çözdüğünden içi içine sığmayarak şöyle karşılık vermişti: "*Harika!*" (Bkz. "[KHUFU'nun Sarkofajının Defin Odaları'ndaki ve Piramitteki Konumları](#)", ilk ve son sayfa kapaklarına). İşte bu formüllerin önemi burada yatar!

METOT Hakkındaki Düşüncelerim

Metodun tarihçesini aşağıda kısaca açıkladım. Ardından 25.07.2021, 08:45:32'de metoda girişi nasıl yaptığımı ve nasıl genelleştirdiğime ilişkin güzel bir örnek verdim. Genelleştirilmiş Metodu 5 Ağustos 2021 Perşembe, 14:07:52'de verdim ve bu yeni bir metot olduğu için bir şey dikkatimi çekmişti. Bu metodu **Romberg**'in yaptığı gibi kendi adımla anabilirdim ama öyle yapmadım; daha büyük bir şeyin parçası olmasını istedim: Cumhuriyetimizin 100'üncü yılında Ay'a iniş projesini destekleyen ve TUA'nın 10 yılda 10 uzay hedefine ön ayak olan Sayın Cumhurbaşkanımıza hediye etmek ve bu vesileyle uzay çalışmalarımızın hızlandırılmasını istedim.

Söz konusu metodumuzdan elde edilen Uygulamalar'daki algoritmalar, **Sven Ström**'den 11.10.2021, 15:28'de aldığım "[O. AMBLE: A set of formulas for numerical integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 25, 1952, p. 38-41. MR 14, 907](#)" tezindeki algoritmalarından üstündür. Örneğin **Ole Amble**'in, tezinde verdiği trapezli ve orta noktalı

$$T_5 = T_3 - \frac{11h}{720}(\Delta^3\bar{y}_0 - \Delta^3\bar{y}_n) + O(h^6), T_4 = T_2 + \frac{17h}{5760}(\Delta^3\bar{y}_0 - \Delta^3\bar{y}_n) + O(h^6)$$

yaklaşıklıkları ile aşağıdaki (3.53)'teki $K_{n,1}$ ve $T_{n,1}$ yaklaşıklıkları aynı mertebeden yakınsarlar. Fakat bunun için her ikisinde de trapez ve orta nokta formüllerine 2'şer tane katalizör yaklaşıklık eklemek gerekirken bizdekinde sadece 1 tane yani $A_1(h_n\bar{h})$ ve $B_1(h_n\bar{h})$ 'yi almanız yeterlidir. Arzu eden okuyucularımız, buradaki ve aşağıdaki diğer uygulamalardaki $A_m(h_n\bar{h})$ ve $B_m(h_n\bar{h})$ ile gösterdiğim katalizör yaklaşıklıklarını **Romberg**'in yaptığı gibi Sayın Cumhurbaşkanımızın ilk adının baş harfi $R_m(h_n\bar{h})$ ile gösterebilirler. Ben, sadece notasyon sistemi bozulmasın diye böyle yaptım!

Herhalde sözlerimi A-ha'nın beyni olan **Pål Waaktaar**, ki aslında anne ve babası, ile benim Norveçli edebiyatçı **Knut Hamsun**'dan çok beğendiğimiz şu şiir ile sonlandırmamda bir mahsur olmaz (Bkz. "[Genelleştirilmiş Ole Amble Algoritması](#)"):

Yitik Ada

Sandalım kayıyor
Şimdi denizde
Yemyeşil kıyılı
O adaya doğru.
Tüm gözlerden irak
Yetişmiş çiçekler
Yabancı yabancı
Bana bakıyorlar.

Oysa kalbimde de
Bir büyülü bahçe
Şu adada olan
Çiçeklerle dolu.
Yan yana gelince
Fısıldaşıyorlar
Gülüp söylüyorlar
Çocuklar misali.

Herhalde bir gün
Zaman doğarken
Varlığın burada
Bir ak Şpir'miş.
İşte yeniden
Ta eskilerden
Gelen kokular
Rüyalarlayım.

Gözlerim kapalı
Bir uzak anıdan
Başım düşüvermiş
Senin omzuna.
Gece büyümekte
Ada üzerinde
Denizde kükrüyor
NİRVANA, yok oluş.

D. PAMUKTULUM

17.10.2021, 03:33.

D. PAMUKTULUM

Tarihçesi. Bu metot hakkında en esaslı bilgileri *D. C. Joyce*'nin, "[Survey of Extrapolation Processes In Numerical Analysis/9. Analysis of Romberg's method](#)" kitabında bahsettiği "[W. F. Sheppard: Some quadrature formulas, Proc. London Math. Soc., 32, 1900, pp. 258-277](#)" adlı tezden alıyoruz.

Sheppard, 29.05.1900'de sunduğu tezinin 267. sayfasında bu metottan şöyle bahseder:

III. Miscellaneous Formulæ.

9. Various methods have been devised for getting rid of the terms in z' in the Euler-Maclaurin formula, or in the corresponding formula for mid-ordinates, so as to retain the trapezoidal rule as the main basis of calculation. Thus, in Parmentier's rule, the ordinates taken are $z_{\frac{1}{2}}, z_{\frac{3}{4}}, z_{\frac{5}{4}}, \dots, z_{m-\frac{1}{4}}$, and also z_0 and z_m . The values of $\frac{1}{2}hz'$ are then taken as equal to $z_1 - z_0$ and $z_m - z_{m-1}$ respectively, so that the formula becomes

$$A = S_1 + \frac{1}{12}h (z_0 - z_1 - z_{m-1} + z_m). \quad (28)$$

This, however, is not a very good rule; for, although it gets rid of the terms in z' , it introduces terms in z'' . These latter terms can be kept out by a slight alteration in the formula.

Alıntı 3.1. *Sheppard*'in 19. yy.'dan kalma *Parmentier*'in kuralını ifade etme şekli-14.06.1900, "[W. F. Sheppard: Some quadrature formulas, Proc. London Math. Soc., 32, 1900, pp. 258-277](#)", S. 167.

Sheppard'a göre, bu alıntının son paragrafında görüldüğü gibi, *Parmentier*'in vermiş olduğu kural o kadar da iyi değilmiş. Gerçekten de *Parmentier*'in (28) no'lu formülü üzerinde yaptığım araştırmaya göre, "[2. Tür E-ATA M Algoritması Üzerindeki En Genel Haldeki Ole Amble Algoritması'na Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#)" adlı Mathematica dosyasındaki "[1.1. En Genel Haldeki Ole Amble Algoritması'ndaki Yaklaşımlar](#)"daki "[1. Parmentier Kuralı \(19. yy.\)](#)"nda yukarıdaki *Parmentier*'in (28) no'lu formülünü (1.13) olarak yazdıktan sonra (1.17)'de modernleştirdiğimde yakınsaklığın $O(h^3)$ 'te olduğunu gördüm. Bu sonuçla birlikte *Parmentier*'in formülünün *Sheppard*'in iddialı olduğu (38) no'lu formülünden daha iyi olduğu sonucu çıktı (Bkz. "[2. Sheppard Kuralı \(1900\)](#)"). Çünkü yakınsaklık bakımından *Parmentier*'inki $O(h^3)$ iken *Sheppard*'inki $O(h^2)$ 'de takıldı kaldı! Fakat *Sheppard*, bu durumdan habersiz olarak tezinin ikinci yarısını *Parmentier*'in kuralını geliştirmeye adanmış ya da ayırır. 52 yıl sonra Norveçli kâşif *Ole Amble*, aynı kuralı geliştirerek hem trapez kuralına hem de orta nokta kuralına mükemmel bir şekilde uyarlar (Bkz. "[A set of formulas for numerical integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 25, 1952, p. 38-41. MR 14, 907](#)"). O sırada baş kahramanımız *Romberg*, *Ole Amble*'in yanında (Trondheim) sürgündedir ve sanki kendisinden beklentiler çok yüksekmış gibi hem *Sheppard*'in ekstrapolasyonik algoritmalarla integrale yaklaşım metodunu geliştirir (bkz. [6. Madde](#)'deki $\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln 2 = 0.693147180 \dots$ örneğine), hem de bu metottan farklı bir metot olarak *Ole Amble*'in metodunu kendi tezinde 1955'te yayımlar (Bkz. "[Vereinfachte numerische Integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 28, 1955, p. 30-36, MR 61, 517](#)"). Diğer tarihi gelişmeleri "[Quadrature Theory: The Theory of Numerical Integration on a Compact Interval](#)" kitabının "[7.8. The midpoint method](#)" bölümünde bulabilirsiniz. Buna göre ilkin [256](#). sayfada orta nokta metodu ya da kuralı ele alındıktan sonra yukarıdaki alıntıdaki (28) no'lu formül [257](#). sayfadaki Sonuç 7.8.1'de ve [258](#). sayfadaki Örnek 7.8.1'de Durand metodu için bir diğer formül verilir ve bunlar yakınsaklık hızı bakımından karşılaştırılırlar. Son sayfada (S. [259](#)) ise konu kapatılmış ve altına bir çizgi çizilerek *Romberg*'in orijinal tezine atfen orta noktalardan oluşan yeni bir formül tanımlanmıştır. Ama *Ole Amble*'in metodundan hiç bahsedilmemiştir. Neden?

Ole Amble'in Tezini Arıyorum!

Romberg'in tezini *Prof. Dr. Brynjulf Owren*'den 23.12.2018, 09:11'de aldıktan sonra *Ole Amble*'in tezini her yerde harıl harıl aradım ama bulamadım. Peki bu tez neredeydi?

Eğer her 2 tezin,

1. "[W. ROMBERG: Vereinfachte numerische Integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 28, 1955, p. 30-36, MR 61, 517](#)".
2. "[O. AMBLE: A set of formulas for numerical integration, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, v. 25, 1952, p. 38-41. MR 14, 907](#)".

künyelerine bakarsanız, onun da *Romberg*'in tezinde olduğu gibi DKNVS (Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs)'de olduğu anlaşılıyor. Bu nedenle bazı girişimlerde bulundum. Örneğin Norveç Kralı *V. Harald*'a bir taziye sunarken, kendisinin 1760'tan beri DKNVS'nin koruyucusu olduğunu belirttikten sonra bu durumu oradan bildirmem, sadece *Ole Amble*'in tezinin bende olmadığına dair bir kayıt düşmek anlamına geliyordu (Bkz. "[Saygıdeğer Ekselansları V. HARALD'a Taziye Mesajım](#)", S. 16). Sonra [EK 1](#)'de belirttiğim üzere "[Genelleştirilmiş Ole Amble Algoritması](#)" makalesiyle (ki bu, aynı zamanda bir araştırma tezidir) sürpriz yapmak istediğim *Owren*'e 03.10.2021, 04:48'de gönderdiğim e-postada *Ole Amble*'in tezi için çıkan sonucu özetledikten sonra bu teze NTNU'dan ulaşım ulaşamayacağını ve eğer ulaşmazsa ne yapmam gerektiğini sordum. O da bana NTNU'da çalışan 3 kişiye yönlendirerek araştırmamı istedi. Sonuçlar geldiğinde buradan bildireceğim!

Aslında *Ole Amble*'in tezine hiç ihtiyacım yok ama sırf kullandığı metodu merak ediyorum. Yani *Ole Amble*, kendi algoritmasını yazarken *Romberg* gibi mi yazdı, yoksa *Sheppard* gibi mi? Bu, onun kullandığı metot hakkında bize bilgi verecek ve böylece o dönemdeki algoritmaların, dolayısıyla metotların nasıl kullanılmış olduğuna dair kesin bir fikir sahibi olacağız.

İşte sırf bu merakıma yenik düştüğüm için *Ole Amble*'in tezini istedim ve bunun dışında benim için başka bir önemi yok. Çünkü benzerleri [256.rar](#), [257.rar](#), [258.rar](#) ve [259.rar](#)'da görülen *Ole Amble*'in algoritmasını "[Genelleştirilmiş Ole Amble Algoritması](#)"nda 23.06.2021, 01:17:55'te çözmüştüm zaten (Y.N. Bu resimli dosyaları ayrıca rarlı olarak veriyorum, çünkü siz siteden bu resimleri bilgisayarınıza indirdiğiniz an orijinaliği bozuluyor ve hangi tarih ve saatte aldıysanız onu gösteriyor. Yani rarlı dosyaların içerindeki resimleri çıkarttığınız zaman hangi tarih ve saati gösteriyorsa, bu resimleri [AMS](#)'ten onlardan biraz önce almışım demektir. Kitabın liste fiyatı 105 \$'dır ve bu 4 sayfa için satın almayı gereksiz gördüm, ama nümerik integral için teorik olarak piyasada bulabileceğiniz başat kitaplardan biri olduğu açıktır).

Nihayet Ole Amble'in Tezini Bulduk!

Geçen hafta sonu **Ole Amble**'in teziyle ilgili NTNU'daki öğretim üyeleriyle bazı yazışmalarda bulundum ve bunlardan **Sven Strøm**, Pazartesi günü tezi bana yolladı. **Owren**'in bana bildirdiğine göre **Ole Amble**'in tezi elektronik ortamda mevcut değildi ve **Sven Strøm** gerçekten altından kalkılması güç bir işe girişti; tezi muhtemelen arşivdeki tozların arasından çıkarttı, tozlarını temizledikten sonra PDF'ye dönüştürdü ve bana e-postayla gönderdi. Bu, hatırı sayılır bir iş demektir. Çünkü böyle bir şeyin olabilmesi için hatırınızın sayılır olması gerekir. Bu bakımdan **Sven Strøm**'e çok çok teşekkür eder ve çalışmalarında başarılar dilerim. Söz konusu bu tezi 11.10.2021'in akşam saatlerinde e-posta kutumdan alır almaz ilkin yaptığım çalışmalara göre inceledim ve sonra web sitemde "[Nihayet Ole Amble'in tezini bulduk!](#)" başlığıyla size duyurarak kısa bir değerlendirmede bulundum. Konuyla ilgili gelişmeleri oradan okursunuz.

Gözlemlerim. **Ole Amble**'in 4 sayfalık "[A Set of Formulas for Numerical Integration, DKNVS, BD. 25, 1952 NR. 10, 517.61](#)" adlı tezini incelerken şu sonuçlara eriştim:

1. Bu tez muhtemelen NUSSE'nin gelmesiyle ortaya çıktı. Çünkü **NUSSE** Oslo Üniversitesi'nde 1950-1955'te kurulurken 1952'de faaliyete geçti (Bkz. [Resim 2.5](#)).
2. Yukarıda belirttiğim üzere bu tezdeki en büyük merakım, METOT idi. Yani bu tezde **Sheppard**'in metodu mu kullanılıyordu, yoksa **Romberg**'inki mi? İşte ben, bu metodu böyle kestirmeye çalışırken **Sven Strøm**'den 11.10.2021, 15:28'de aldığım **Ole Amble**'in tezindeki (4) no'lu formülün **D.C. Joyce**'nin makalesindeki (63) no'lu formülde verilmiş olduğunu gördüm (Bkz. "[Survey of Extrapolation Process In Numerical Analysis](#)"). Bu, (2.4)'te ilk verdiğim trapezli yaklaşım formülüdür!
3. **Ole Amble**'in trapez ve orta nokta formüllerini hızlandırmak için bulduğu yeni yaklaşıklıklar **Sheppard**'da olduğu gibidir (Bkz. "[W. F. Sheppard: Some quadratures formulas, Proc. London Math. Soc. 32, 1900](#)"). Burada **Romberg**'e teşekkür etmemiz gerekiyor, çünkü (2.4)'teki yaklaşıklıkları **Ole Amble**'in tezinden çıkartmak kolay değildir. Bununla birlikte **Romberg**'in kendi tezinde kullandığı (1.55)'teki örneği **Ole Amble**'in tezinin 2. sayfasının sonunda buldum (ki orada $\frac{\pi}{12}$ olacaktı. Çünkü bu takdirde $y = \frac{x}{6}$ dönüşümüyle (1.55) örneği elde edilmektedir). Ama (2.4)'tekileri hem modernleştirmek hem de genelleştirmek gerekiyordu ki bu da bana nasip oldu!
4. **Ole Amble**, sadece **Romberg**'in kendi metodu için kullandığı (2.4)'teki yaklaşıklıkları vermez; trapez yaklaşıklıklığını (9) ve (10) ve orta nokta yaklaşıklıklığını (21)-(23) no'lu formüllerle metodu genişletir ya da genelleştirir. Eğer bir fırsatım olursa, bu makalemden sonra **Ole Amble**'in burada ne demek istediğini göstereceğim. Şimdilik şunu söyleyebilirim: **Ole Amble**'in sözüne ettiği metodun genişletilmesiyle ortaya çıkan bu yaklaşıklıkların aşağıdaki uygulamalara eşlik edebilmesi için, terim sayısı bakımından $A_{2m}(h_n)$ 'deki gibi ele alınması ve bu yeni yaklaşıklıklar için de 2. Tür E-ATA Algoritması'nın (3.37)'deki gibi özelleştirilmesi gerekiyor!

Özetle **Piobert-Parmentier** metodunun tarihçesi böyledir. Şimdi bu metodun genelleştirilmesi için ilkin açık bir uygulama yapacağım, sonra bu uygulamadan hareketle nasıl genelleştirebileceğini göstereceğim. Tabii ki metodun genelleştirilmesinde tutmuş olduğum yol, en genel haldeki **Ole Amble**'in metodundan gelir (Bkz. (2.46)).

Metoda Giriş (25.07.2021, 08:45:32). Eğer "[Genelleştirilmiş Ole Amble Algoritması](#)"nda Teorem 2.3'te geçen (2.38)'i en genel halde ele alır ve $h_{n+p} =: h$ dersek,

$$(3.1) \quad A_1(h) = \frac{h}{p} \left[f\left(a + \frac{h}{q}\right) - f\left(a - \frac{h}{q}\right) + f\left(b - \frac{h}{q}\right) - f\left(b + \frac{h}{q}\right) \right]$$

için

$$(3.2) \quad \begin{cases} K_{n,1} = K_n - A_1(h) + O(h^6), \\ T_{n,1} = T_n + A_1(h) + O(h^6) \end{cases}$$

yaklaşıklıkları söz konusu olur.

Burada $K_{n,1}$ ve $T_{n,1}$ 'in h^2 'nin kuvvetlerine göre açılımları (2.43)'tekiler olmak üzere $A_1(h)$ 'nin h^2 'nin kuvvetlerine göre açılımı şu şekildedir:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} A_1(h) &= \frac{h}{p} \left[f\left(a + \frac{h}{q}\right) - f\left(a - \frac{h}{q}\right) + f\left(b - \frac{h}{q}\right) - f\left(b + \frac{h}{q}\right) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n! pq^n} \left[(1 + (-1)^{n+1})f^{(n)}(a) - (1 + (-1)^{n+1})f^{(n)}(b) \right] h^{n+1} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)! pq^{2n+1}} \left(f^{(2n+1)}(b) - f^{(2n+1)}(a) \right) h^{2n+2} = - \frac{2}{pq} (f'(b) - f'(a))h^2 - \frac{1}{3pq^3} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 - \dots \end{aligned}$$

Şimdi (2.47)'deki işlemleri burada da aynen yapar,

$$(3.4) \quad \begin{cases} K_{n,1} = K_n - A_1(h) = I + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \dots - \frac{h}{p} \left[f\left(a + \frac{h}{q}\right) - f\left(a - \frac{h}{q}\right) + f\left(b - \frac{h}{q}\right) - f\left(b + \frac{h}{q}\right) \right] \\ = I + \frac{B_2}{2!} (f'(b) - f'(a))h^2 + \frac{B_4}{4!} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 + \dots - \frac{h}{p} \left[f\left(a + \frac{h}{q}\right) - f\left(a - \frac{h}{q}\right) + f\left(b - \frac{h}{q}\right) - f\left(b + \frac{h}{q}\right) \right] \\ = I + \frac{1}{12} (f'(b) - f'(a))h^2 - \frac{1}{720} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 + \dots + \frac{2}{pq} (f'(b) - f'(a))h^2 + \frac{1}{3pq^3} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 - \dots, \\ = I + \frac{pq + 24}{12pq} (f'(b) - f'(a))h^2 - \frac{pq^3 - 240}{720pq^3} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 + \dots \\ T_{n,1} = T_n + A_1(h) = I + b_1 h^2 + b_2 h^4 + \dots + \frac{h}{r} \left[f\left(a + \frac{h}{s}\right) - f\left(a - \frac{h}{s}\right) + f\left(b - \frac{h}{s}\right) - f\left(b + \frac{h}{s}\right) \right] \\ = I + \frac{B_2 \left(\frac{1}{2}\right)}{2!} (f'(b) - f'(a))h^2 + \frac{B_4 \left(\frac{1}{2}\right)}{4!} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 + \dots + \frac{h}{r} \left[f\left(a + \frac{h}{s}\right) - f\left(a - \frac{h}{s}\right) + f\left(b - \frac{h}{s}\right) - f\left(b + \frac{h}{s}\right) \right] \\ = I - \frac{1}{24} (f'(b) - f'(a))h^2 + \frac{7}{5760} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 + \dots + \frac{2}{rs} (f'(b) - f'(a))h^2 - \frac{1}{3rs^3} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 - \dots, \\ = I - \frac{rs - 192}{96rs} (f'(b) - f'(a))h^2 + \frac{7rs^3 - 30720}{92160rs^3} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 + \dots \end{cases}$$

ve bu sefer h^2 ve h^4 'ün katsayılarını sıfırlarsak,

$$(3.5) \quad (pq + 24, pq^3 - 240) = (0,0), (rs + 192, 7rs^3 - 30720) = (0,0)$$

şeklinde bir denklem çifti elde ederiz.

İşte bu denklem çiftinin kökleri saf karmaşık sayılar olarak şu şekilde elde edilirler:

$$(3.6) \quad (p, q) = \pm \left(\frac{12}{5} \sqrt{10}i, \sqrt{10}i \right), (r, s) = \pm \left(24 \sqrt{\frac{14}{5}}i, 4 \sqrt{\frac{10}{7}}i \right) = \pm \left(\frac{24}{5} \sqrt{70}i, \frac{4}{7} \sqrt{70}i \right) = \sqrt{7} \left(2p, \frac{4}{7}q \right).$$

Şu halde bu sonuçlara göre (3.1)'de h yerine $h\bar{i}$ alır ve $A_1(h\bar{i})$ 'yi

$$(3.7) \quad B_1(h\bar{i}) = \text{ph}\bar{i}[f(a + qh\bar{i}) - f(a - qh\bar{i}) + f(b - qh\bar{i}) - f(b + qh\bar{i})]$$

formunda göz önüne alırsam,

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_{n,1} = K_n - B_1(h\bar{i}) = I + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \dots - \text{ph}\bar{i}[f(a + qh\bar{i}) - f(a - qh\bar{i}) + f(b - qh\bar{i}) - f(b + qh\bar{i})] \\ = I + \frac{B_2}{2!} (f'(b) - f'(a))h^2 + \frac{B_4}{4!} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 + \dots - \text{ph}\bar{i}[f(a + qh\bar{i}) - f(a - qh\bar{i}) + f(b - qh\bar{i}) - f(b + qh\bar{i})] \\ = I + \frac{1}{12} (f'(b) - f'(a))h^2 - \frac{1}{720} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 + \dots - 2pq(f'(b) - f'(a))h^2 + \frac{pq^3}{3} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 - \dots, \\ = I - \frac{24pq - 1}{12} (f'(b) - f'(a))h^2 + \frac{240pq^3 - 1}{720} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 + \dots \\ T_{n,1} = T_n + B_1(h\bar{i}) = I + b_1 h^2 + b_2 h^4 + \dots + \text{rh}\bar{i}[f(a + sh\bar{i}) - f(a - sh\bar{i}) + f(b - sh\bar{i}) - f(b + sh\bar{i})] \\ = I + \frac{B_2}{2!} (f'(b) - f'(a))h^2 + \frac{B_4}{4!} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 + \dots + \text{rh}\bar{i}[f(a + sh\bar{i}) - f(a - sh\bar{i}) + f(b - sh\bar{i}) - f(b + sh\bar{i})] \\ = I - \frac{1}{24} (f'(b) - f'(a))h^2 + \frac{7}{5760} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 + \dots + 2rs(f'(b) - f'(a))h^2 - \frac{rs^3}{3} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 - \dots, \\ = I + \frac{48rs - 1}{24} (f'(b) - f'(a))h^2 - \frac{1920rs^3 - 7}{5760} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))h^4 + \dots \end{array} \right.$$

yaklaşımlarına göre

$$(3.9) \quad (24pq - 1, 240pq^3 - 1) = (0,0), (48rs - 1, 1920rs^3 - 7) = (0,0)$$

denklem çiftinin köklerini reel olarak şu şekilde elde etmiş oluruz:

$$(3.10) \quad (p, q) = \pm \left(\frac{\sqrt{10}}{24}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right), (r, s) = \pm \left(\frac{1}{12} \sqrt{\frac{5}{14}}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{10}} \right) = \pm \left(\frac{5}{12\sqrt{70}}, \frac{7}{2\sqrt{70}} \right) = \frac{1}{\sqrt{7}} \left(p, \frac{7}{2}q \right).$$

İşte bu köklere göre (3.7)'deki $B_1(h\bar{i})$ ile

$$(3.11) \quad \begin{cases} K_{n,1} = K_n - B_1(h\bar{i}) + O(h^6), \\ T_{n,1} = T_n + B_1(h\bar{i}) + O(h^6) \end{cases}$$

oluşan yaklaşıklıkları, Piebort-Parmentier metodunun ilk genelleştirilmiş şeklini gösterir. Çünkü bu yaklaşıklıkların yaklaşım mertebesi ne **Sheppard**'ın (31)-(44)'te bulunduğu yaklaşıklıklardaki gibi $O(h^2)$ 'den $O(h^3)$ 'e kadar değişebilen mertebelerdeki gibidir (ki bunlar genel bir metotla değil özel bir metotla bulunmuştur, dolayısıyla kötü sonuçlar üretirler), ne **Ole Amble**'inkiler gibi $O(h^4)$, ne de anılan son kaynağın 256. sayfasındaki (7.72)'de gösterilen ve 258. sayfasında da Örnek 7.8.1'de Durand metodu için türetilen formüldeki gibi $O(h^2)$ ve $O(h^3)$ 'tür; tam anlamıyla $O(h^6)$ 'dır. Çünkü (3.8)'de görüldüğü gibi h^2 ve h^4 'ün katsayılarını sıfırladık!

Şu halde bu uygulamadan elde ettiğimiz sonuçlara göre metodu artık rahat rahat genelleştirebiliriz.

Genelleştirilmiş Metot. Eğer (3.7)'yi genelleştirirsek yani $k = 1, 2, \dots, m$ için $p_k, q_k \in \mathbb{R}$ katsayılarını göz önüne alırsak,

$$(3.12) \quad A_m(h\bar{i}) = \sum_{k=1}^m p_k h\bar{i} [(f(a + q_k h\bar{i}) - f(a - q_k h\bar{i})) - (f(b + q_k h\bar{i}) - f(b - q_k h\bar{i}))]$$

yaklaşıklıklığına göre $I = \int_a^b f(x)dx$ integrali için (3.11)'e göre

$$(3.13) \quad \begin{cases} K_{n,m} = K_n - A_m(h\bar{i}) + O(h^{4m+2}), \\ T_{n,m} = T_n + A_m(h\bar{i}) + O(h^{4m+2}) \end{cases}$$

esas yaklaşıklıkları söz konusu olur (ki $h = h_n$ 'dir).

Burada Euler-Maclaurin toplam formülüne göre I integrali için K_n trapez formülü ve T_n orta nokta formülü için

$$(3.14) \quad \begin{cases} K_n = I + \sum_{k=1}^{2m} a_k h^{2k} = I + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \dots, \\ T_n = I + \sum_{k=1}^{2m} b_k h^{2k} = I + b_1 h^2 + b_2 h^4 + \dots \end{cases}$$

eşitlikleri geçerlidir (Bkz. "[Konvergenzbeschleunigung durch Extrapolation am Beispiel der Romberg-Integration](#)" adlı tezinde trapez formülü için S. 35 ve orta nokta formülü için S. 43).

Bu eşitliklerdeki katsayılar,

$$(3.15) \quad a_k = \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right), b_k = \frac{B_{2k} \left(\frac{1}{2} \right)}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right)$$

dir (Bkz. "[Euler-Maclaurin Formula](#)").

Bu katsayılarda Bernoulli polinomlarına göre ilkinde $B_q = B_q(1)$ iken ikincisinde

$$(3.16) \quad B_{2k} \left(\frac{1}{2} \right) = - \left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}} \right) B_{2k}$$

dir.

Diğer taraftan (3.12)'deki $A_m(h\bar{h})$ 'nin h 'nin kuvvetlerine (çift kuvvetleri) göre açılımı,

$$(3.17) \quad f(a + q_k h \bar{h}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\bar{h}^r}{r!} f^{(r)}(a) (q_k h)^r$$

için

$$(3.18) \quad \begin{aligned} A_m(h\bar{h}) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1 + \bar{h}^{2r+2})}{r!} \left(\sum_{s=1}^m p_s q_s^r \right) [f^{(r)}(a) - f^{(r)}(b)] (h\bar{h})^{r+1} = \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{2(-1)^{k+2}}{(2k+1)!} \left(\sum_{s=1}^m p_s q_s^{2k+1} \right) (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} \\ &= 2 \left(\sum_{s=1}^m p_s q_s \right) (f'(b) - f'(a)) h^2 - \frac{1}{3} \left(\sum_{s=1}^m p_s q_s^3 \right) (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) h^4 + \dots \end{aligned}$$

şeklindedir.

Şu halde (3.13)'e göre

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{aligned} K_{n,m} &= K_n - A_m(h\bar{h}) = K_n = I + \sum_{k=1}^{2m} a_k h^{2k} - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{2(-1)^{k+2}}{(2k+1)!} \left(\sum_{s=1}^m p_s q_s^{2k+1} \right) (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} \\ &= I + \sum_{k=0}^{2m-1} a_{k+1} h^{2k+2} - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{2(-1)^{k+2}}{(2k+1)!} \left(\sum_{s=1}^m p_s q_s^{2k+1} \right) (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} \\ &= I + \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{2(-1)^{k+2}}{(2k+1)!} \left(\sum_{s=1}^m p_s q_s^{2k+1} \right) (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} \\ &= I + \sum_{k=0}^{2m-1} \left[\underbrace{\frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!} - \frac{2(-1)^{k+2}}{(2k+1)!} \left(\sum_{s=1}^m p_s q_s^{2k+1} \right)}_{=0} \right] (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} + O(h^{4m+2}), \end{aligned} \right.$$

ve

$$(3.20) \quad \left\{ \begin{aligned} T_{n,m} &= T_n + A_m(h\bar{h}) = T_n = I + \sum_{k=1}^{2m} b_k h^{2k} + \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{2(-1)^{k+2}}{(2k+1)!} \left(\sum_{s=1}^m p_s q_s^{2k+1} \right) (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} \\ &= I + \sum_{k=0}^{2m-1} b_{k+1} h^{2k+2} + \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{2(-1)^{k+2}}{(2k+1)!} \left(\sum_{s=1}^m p_s q_s^{2k+1} \right) (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} \\ &= I + \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{B_{2k+2} \left(\frac{1}{2} \right)}{(2k+2)!} (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} + \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{2(-1)^{k+2}}{(2k+1)!} \left(\sum_{s=1}^m p_s q_s^{2k+1} \right) (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} \\ &= I + \sum_{k=0}^{2m-1} \left[\underbrace{\frac{(1 - 2^{1-2k}) B_{2k}}{(2k+2)!} + \frac{2(-1)^{k+2}}{(2k+1)!} \left(\sum_{s=1}^m p_s q_s^{2k+1} \right)}_{=0} \right] (f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)) h^{2k+2} + O(h^{4m+2}) \end{aligned} \right.$$

eşitliklerinden

$$(3.21) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{s=1}^m p_s q_s^{2k+1} &= \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!} = \frac{(-1)^k}{4(k+1)} B_{2k+2} =: c_k, \\ \sum_{s=1}^m p_s q_s^{2k+1} &= - \frac{B_{2k+2} \left(\frac{1}{2} \right)}{(2k+2)!} = - \frac{(-1)^k}{4(k+1)} B_{2k+2} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{(-1)^k}{4(k+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}} \right) B_{2k+2} = \left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}} \right) c_k =: d_k \end{aligned} \right.$$

çifte denklem sistemi elde edilir. Fakat bu çifte denklem sistemi bir lineer denklem sistemi olmadığından çözümünü hiç mi hiç kolay değildir. Çünkü $k = 0, 1, \dots, 2m-1$ için $e_k := c_k, d_k$ dersek,

Genelleştirilmiş Piobert-Parmentier Metodu

$$(3.22) \quad \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_m \\ q_1^3 & q_2^3 & \cdots & q_m^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^{4m-1} & q_2^{4m-1} & \cdots & q_m^{4m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{2m-1} \end{pmatrix}$$

denkleminizi söz konusu olur. Ancak bu denklemin çözümü ne kadar zor olursa olsun yine de lineer denklemindeki gibi sistemli olarak kolay bir yolu var. Şöyle ki katsayılar matrisi

$$(3.23) \quad \Delta = \begin{pmatrix} e_{m-1} & \cdots & e_2 & e_1 & e_0 \\ e_m & \cdots & e_3 & e_2 & e_1 \\ e_{m+1} & \cdots & e_4 & e_3 & e_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{2m-3} & \cdots & e_m & e_{m-1} & e_{m-2} \\ e_{2m-2} & \cdots & e_{m+1} & e_m & e_{m-1} \end{pmatrix}$$

olmak üzere $q_1^2, q_2^2, \dots, q_m^2$ 'nin

$$(3.24) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \sum q_i^2 = q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_m^2, \\ \sigma_2 = \sum q_i^2 q_j^2 = q_1^2 q_2^2 + q_1^2 q_3^2 + \cdots + q_{m-1}^2 q_m^2 \\ \vdots \\ \sigma_m = q_1^2 q_2^2 \cdots q_m^2 \end{cases}$$

elemantar simetrik polinomlarına göre

$$(3.25) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{|\Delta|} \begin{vmatrix} e_{m-1} & \cdots & e_2 & e_1 & e_0 \\ e_m & \cdots & e_3 & e_2 & e_1 \\ e_{m+1} & \cdots & e_4 & e_3 & e_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{2m-3} & \cdots & e_m & e_{m-1} & e_{m-2} \\ e_{2m-2} & \cdots & e_{m+1} & e_m & e_{m-1} \end{vmatrix}, \sigma_2 = -\frac{1}{|\Delta|} \begin{vmatrix} e_{m-1} & \cdots & e_2 & e_1 & e_0 \\ e_m & \cdots & e_3 & e_2 & e_1 \\ e_{m+1} & \cdots & e_4 & e_3 & e_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{2m-1} & \cdots & e_{m+2} & e_{m+1} & e_m \\ e_{2m-2} & \cdots & e_{m+1} & e_m & e_{m-1} \end{vmatrix}, \dots, \sigma_i = \frac{(-1)^{i-1}}{|\Delta|} \begin{vmatrix} e_{m-1} & \cdots & e_2 & e_1 & e_0 \\ e_m & \cdots & e_3 & e_2 & e_1 \\ e_{m+1} & \cdots & e_4 & e_3 & e_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{2m-1} & \cdots & e_{m+2} & e_{m+1} & e_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{2m-3} & \cdots & e_m & e_{m-1} & e_{m-2} \\ e_{2m-2} & \cdots & e_{m+1} & e_m & e_{m-1} \end{vmatrix}, \\ \dots, \sigma_m = \frac{(-1)^{m-1}}{|\Delta|} \begin{vmatrix} e_{2m-1} & \cdots & e_{m+2} & e_{m+1} & e_m \\ e_m & \cdots & e_3 & e_2 & e_1 \\ e_{m+1} & \cdots & e_4 & e_3 & e_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{2m-3} & \cdots & e_m & e_{m-1} & e_{m-2} \\ e_{2m-2} & \cdots & e_{m+1} & e_m & e_{m-1} \end{vmatrix} \end{cases}$$

çözümleri mevcuttur. O halde bu elemantar simetrik polinomlara göre

$$(3.26) \quad \sum_{j=0}^m (-1)^j \sigma_j q^{2(m-j)} = 0$$

denklemini elde edilir ki bu denklemin köklerinden

$$(3.27) \quad p_1 = \frac{\sum_{q_i^2 \notin \sigma_j, j=0}^{m-1} (-1)^j e_{m-j-1} \sigma_j}{q_1 \prod_{j \neq 1, j=1}^m (q_1^2 - q_j^2)}, p_2 = \frac{\sum_{q_2^2 \notin \sigma_j, j=0}^{m-1} (-1)^j e_{m-j-1} \sigma_j}{q_2 \prod_{j \neq 2, j=1}^m (q_2^2 - q_j^2)}, \dots, p_i = \frac{\sum_{q_i^2 \notin \sigma_j, j=0}^{m-1} (-1)^j e_{m-j-1} \sigma_j}{q_i \prod_{j \neq i, j=1}^m (q_i^2 - q_j^2)}, \dots, p_m = \frac{\sum_{q_m^2 \notin \sigma_j, j=0}^{m-1} (-1)^j e_{m-j-1} \sigma_j}{q_m \prod_{j \neq m, j=1}^m (q_m^2 - q_j^2)}$$

çözümleri geçerli olur.

Fakat bu çözümlerdeki pay ve paydadaki ifadeler,

$$(3.28) \quad \begin{cases} \sum_{q_i^2 \notin \sigma_j, j=0}^{m-1} (-1)^j e_{m-j-1} \sigma_j = \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^r (-1)^j e_{r-j} \sigma_j \right) q_i^{2(m-r-1)}, \\ \prod_{j \neq i, j=1}^m (q_i^2 - q_j^2) = \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r (m-r) \sigma_r q_i^{2(m-r-1)} = \sum_{r=1}^m (-1)^{r+1} r \sigma_r q_i^{2(m-r-1)} \end{cases}$$

şeklinde de yazılabildiğinden p_i 'leri şu şekilde de verebiliriz:

$$(3.29) \quad \begin{cases} p_1 = \frac{\sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^r (-1)^j e_{r-j} \sigma_j \right) q_1^{2(m-r-1)}}{\sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r (m-r) \sigma_r q_1^{2(m-r-1)}}, p_2 = \frac{\sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^r (-1)^j e_{r-j} \sigma_j \right) q_2^{2(m-r-1)}}{\sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r (m-r) \sigma_r q_2^{2(m-r-1)}}, \dots, p_i = \frac{\sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^r (-1)^j e_{r-j} \sigma_j \right) q_i^{2(m-r-1)}}{\sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r (m-r) \sigma_r q_i^{2(m-r-1)}}, \dots, \\ p_m = \frac{\sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^r (-1)^j e_{r-j} \sigma_j \right) q_m^{2(m-r-1)}}{\sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r (m-r) \sigma_r q_m^{2(m-r-1)}}. \end{cases}$$

Şimdi bu çözümleri biraz daha geliştirebilmek için (3.26) denklemini incelememiz gerekiyor.

Denklemin Hakkında. (3.26) denklemini için aşağıdaki sonuçlar geçerlidir:

1. (3.26) denkleminin tüm kökleri reeldir. Bu köklerin yarısı (m tane) orijinin solunda ve diğer yarısı da sağında simetrikler.
2. 1. Madde nedeniyle sadece pozitif kökleri almamız yeterlidir. Yani (3.26)'da $q^2 =: x$ değişken dönüşümünü yaparsak,

$$(3.30) \quad q_k = \sqrt{x_k}$$

için sadece

$$(3.31) \quad \sum_{j=0}^m (-1)^j \sigma_j x^{m-j} = 0$$

denklemini almamız yeterlidir. Çünkü bu haldeyken tüm kökler reel olup orijinin sağında olduklarından bunların negatif işaretli olanları simetrik olan diğer kökleri verir.

3. Eğer $q_k = -\sqrt{x_k}$ negatif kökleri göz önüne alırsak (3.27)'ye göre $-p_k$ elde edilir ve bunları (3.12)'de yerlerine koyarsak,

$$(3.32) \quad \begin{cases} A_m(h\bar{i}) = \sum_{k=1}^m p_k h\bar{i} [(f(a + q_k h\bar{i}) - f(a - q_k h\bar{i})) - (f(b + q_k h\bar{i}) - f(b - q_k h\bar{i}))] \\ = \sum_{k=1}^m (-p_k) h\bar{i} [(f(a - \sqrt{x_k} h\bar{i}) - f(a + \sqrt{x_k} h\bar{i})) - (f(b - \sqrt{x_k} h\bar{i}) - f(b + \sqrt{x_k} h\bar{i}))] \\ = \sum_{k=1}^m p_k h\bar{i} [(f(a + \sqrt{x_k} h\bar{i}) - f(a - \sqrt{x_k} h\bar{i})) - (f(b + \sqrt{x_k} h\bar{i}) - f(b - \sqrt{x_k} h\bar{i}))] = A_m(h\bar{i}) \end{cases}$$

sonucu değişmez. Yani negatif kökler (3.12)'deki $A_m(h\bar{i})$ 'yi değiştirmez!

4. (3.26)'daki polinom 1. Madde'ye göre [Legendre polinomlarına](#) benzer. Ama buradaki polinom hem x ekseninde sınırlanabilir hem de genliği Legendre polinomlarından çok çok daha büyüktür.

Şu halde bu sonuçlara göre (3.30)'daki değişken dönüşümünü yaparsak (3.12)'deki $A_m(h\bar{i})$ 'yi,

$$(3.33) \quad A_m(h\bar{i}) = \sum_{k=1}^m p_k h\bar{i} [(f(a + \sqrt{x_k} h\bar{i}) - f(a - \sqrt{x_k} h\bar{i})) - (f(b + \sqrt{x_k} h\bar{i}) - f(b - \sqrt{x_k} h\bar{i}))]$$

şeklinde yazabilir ve (3.29)'daki çözümleri de en sade şekilde şöyle verebiliriz:

$$(3.34) \quad \begin{cases} p_1 = \frac{\sum_{r=0}^{m-1} (\sum_{j=0}^r (-1)^j e_{r-j} \sigma_j) x_1^{m-r-1}}{\sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r (m-r) \sigma_r x_1^{m-r-\frac{1}{2}}}, p_2 = \frac{\sum_{r=0}^{m-1} (\sum_{j=0}^r (-1)^j e_{r-j} \sigma_j) x_2^{m-r-1}}{\sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r (m-r) \sigma_r x_2^{m-r-\frac{1}{2}}}, \dots, p_i = \frac{\sum_{r=0}^{m-1} (\sum_{j=0}^r (-1)^j e_{r-j} \sigma_j) x_i^{m-r-1}}{\sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r (m-r) \sigma_r x_i^{m-r-\frac{1}{2}}}, \dots, \\ p_m = \frac{\sum_{r=0}^{m-1} (\sum_{j=0}^r (-1)^j e_{r-j} \sigma_j) x_m^{m-r-1}}{\sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r (m-r) \sigma_r x_m^{m-r-\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Burada (3.24)'e göre $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ ifadeleri artık x_1, x_2, \dots, x_m 'nin elemanter simetrik polinomlarıdır:

$$(3.35) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \sum x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_m, \\ \sigma_2 = \sum x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{m-1} x_m, \\ \vdots \\ \sigma_m = x_1 x_2 \dots x_m. \end{cases}$$

Ekstrapolasyonun Tanımı. Eğer (3.13)'teki $K_{n,m}$ ve $T_{n,m}$ yaklaşıklıklarını $\forall \ell \in \mathbb{N}^+$ için $X_{\ell n} = K_{\ell n, m}, T_{\ell n, m}$ genel yaklaşıklıklar olarak göz önüne alırsak,

$$(3.36) \quad Z_{\ell n, 0}(X) = X_{\ell n}$$

başlangıç değerine göre $\forall k \in \mathbb{N}$ için 2. Tür E-ATA Algoritması Ver. 1 (2003) ya da 2. Tür ATA Ekstrapolasyonu geçerli olur (Bkz. (2.34) ve (2.39)):

$$(3.37) \quad Z_{\ell(n+1), k+1}(X) = \frac{4^{\ell(k+2m+1)} Z_{\ell(n+1), k}(X) - Z_{\ell n, k}(X)}{4^{\ell(k+2m+1)} - 1} + O(h_{\ell n}^{2k+4(m+1)}).$$

Burada dikkat ederseniz (3.13)'teki $K_{n,m}$ ve $T_{n,m}$ yaklaşıklıklarının yaklaşım mertebesi $O(h_n^{4m+2})$ olduğundan, h_n 'nin kuvvetinin yarısı $(\frac{4m+2}{2} = 2m+1)$ 4'ün kuvvetindeki k 'nin ötelendiği değeri gösterirken, Z ekstrapolasyonunun yaklaşım mertebesi şu şekilde elde edilir:

$$(3.38) \quad O(h_{\ell n}^{2(k+2m+1+1)}) = O(h_{\ell n}^{2(k+2m+2)}) = O(h_{\ell n}^{2k+4(m+1)}).$$

Bunun için ilkin $K_{n,m}$ ve $T_{n,m}$ yaklaşıklıklarının yaklaşım mertebesi $O(h_n^{4m+2})$, dolayısıyla $K_{\ell n, m}$ ve $T_{\ell n, m}$ yaklaşıklıklarının yaklaşım mertebesi $O(h_{\ell n}^{4m+2})$ iken Z ekstrapolasyonunda ($k=0$ için) bu silinir ve bir sonraki $O(h_{\ell n}^{4m+2+2}) = O(h_{\ell n}^{4m+4}) = O(h_{\ell n}^{4(m+1)})$ yaklaşım mertebesi ortaya çıkar. Diğer k değerleri için de işlem bu şekilde devam eder ve sonunda k için (3.38)'e ulaşılır!

Uygulamalara Giriş. Öncelikle uygulamalara başlamadan önce “*Denklemlerin Tarihçesi*” hakkında birkaç söz söylemek istiyorum. Çünkü bizim zamanımızda mevcut olmayan “*Matematik Tarihi*” üniversitelerimizde artık bir ders olarak okutuluyor. İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nü [pek de hoş olmayan bir ortam](#)da okumuştum ve şimdi hepsi ahirete göçtüğü için rahat rahat konuşabilirim (ki bundan yanlış bir anlam çıkarılmasın). Bizim dönemimizde denklemler hiç anlatılmadı; yalnızca bazı öğretim üyeleri derslerde havayı yumuşatmak için bir espri olarak değinirlerdi. Hiç unutmam, **Bediz Asral**, bir Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler dersimizde 3. derece denklem hakkında birkaç şey söyledikten sonra “*Hırsız Kardan*” demişti, ki bu doğrudu (Bkz. “*Cardano the Thief*”, S. 7). Aslında bu konu cebirci **Hülya Şenkon**’un işiydi ve ancak son yılımızda “*Soyut Cebir Dersleri Cilt II*” kitabını yetiştirebilmişti. Denklemlerin çözümleri kitabın son bölümündeydi ama fırsat bulamadığı için derste anlatamadı (ki bu durumdan yakınmasının 1-1 tanığıyım). Tabii ki ben genelde ders çalışmak için Üniversite Kütüphanesi yerine Beyazıt Devlet Kütüphanesi’ne gittiğimden, orada “*Denklemler Teorisi I, II, III*” kitaplarıyla çoktan haşır neşir olmuşum ve bir şey dikkatimi çekmişti: **Hülya Şenkon**, yazdığı kitaplarda **B. L. van der Waerden**’in kitaplarından yararlanıyordu (Bkz. “*Modern Cebir Cilt II*”). Neden? Çünkü **Waerden**, **Emmy Noether**’in öğrencisiydi ve o da bir **Emmy Noether** hayranıydı (Bkz. “*Cumhuriyet Katalog*”). Bu linki tıkladığınızda **Hülya Şenkon**’un **Emmy Noether** hakkındaki yayınlarını görebilirsiniz). Bir şey daha dikkatimi çekmişti: **Waerden**, sadece Modern Cebir’de yetkin biri değildi; son sınıftayken bölümümüzde satılan “*Bilimin Uyanışı*” adlı kitabını aldıktan sonra Antik Matematik’te de yetkin biri olduğunu görmüştüm. Örneğin, kitaptaki Plimpton 322 no’lu tablet hakkında **Otto Neugebauer**’inkiyle birlikte onun çıkarımlarını ve tahminlerini okurken resmen soluksuz okuyordum. **Neugebauer**’i öyle yabana atmayın; çünkü eğer Göttingen Üniversitesi’ndeyseniz [çalışma kağıtları](#)na bakarsanız, Modern Cebir’de de diğerlerinden farkı yoktu. Örneğin, **Hülya Şenkon**’un bize anlattığı Halka Aksiyomları’nı **Emmy Noether**’in dersindeymiş gibi almış (Bkz. [Ring](#)).

Denklemlerin Kısa Bir Tarihçesi

Bilindiği üzere Denklemler Teorisi’ne göre derecesi 5 ve 5’ten büyük genel bir denklemin kökleri radikallerle yazılamaz. Bu konuda Marmara Üniversitesi’nin de tavsiye ettiği Hollandalı matematikçi **B. L. Waerden**’in “*Modern Cebir Cilt I*”indeki “*Chapter VII: Galois Theory*” bölümünden gerekli bilgileri alabilirsiniz (Bkz. “*Ders Kitabı/Malzemesi/Önerilen Kaynaklar*”). Fakat 172. sayfada başlayan “*56. Solution of Equations by Radicals*”da denklemlerin çözümleri tarihçesiyle birlikte anlatılmaz. Örneğin, 177. sayfada başlayan “*58. Equations of The Second, Third and Forth Degrees*”de 3. ve 4. dereceden genel denklemlerin çözümleri **Lagrange**’a aittir (Bkz. “*37.3.6. Lagrange method*”, S. 136-138). Yani 3. dereceden genel bir denklemin çözümü **Lagrange**’ın yöntemine göre verildikten sonra “*Cardano Çözümü*”nden bahsedilir. Modern anlamda bu doğrudur ama **Cardano**’nun orijinal çözümü için 1545 tarihli “*Ars Magna (Büyük Yapıt)*”ya bakmak gerekir!

1. **Kuadratik Denklem.** 2. dereceden (kuadratik) her türlü denklem Eski Babilonya’da çözülmüyordu. Bu konuda elimizde sayısız tablet vardır (Bkz. “*The Exact Science In Antiquity*”). **Neugebauer** burada Plimpton 322 no’lu tabletteki Pisagor Üçlüleri’nin kuadratik denklemler yoluyla elde edildiğini söyler). Bununla birlikte kuadratik denklemler Antik dönemdeki Eski Mısır, Eski Çin, Eski Hint, Eski Yunan ve Eski Roma’da da konu olmuştur. Ama hepsi Eski Babilonya’ya dayanır. **Harezmi**’nin 825’te yazdığı “*Al Kitab-ı Fi Hisab Al Cabr wal Muqabalah (Tamamlama ve Dengeleme Yoluyla Hesaplama)*” adlı kitabı bu eski uygarlıklardaki denklemlerin bir derlemesi olarak karşımıza çıkar. **Harezmi**, bu kitapta kuadratik denklemleri 6 farklı şekilde sınıflar ve her birinin nasıl çözüldüğünü gösterir. Örneğin, 4. tipteki

$$(3.39) \quad x^2 + 10x = 39$$

denkleminin çözümünü şu şekilde anlatır: “*Şeylerin sayısının yarısı al, 5; onu kendisiyle çarp, 25; buna 39 ekle, 64; bunun karekökünü al, 8 ve bunu şeylerin sayısının yarısından çıkar. Sonuç 3’tür.*” **Harezmi**’nin çözümü Eski Babillilerin çözümüne benzer; çünkü çözümde kullandığı geometrik modelleme Eski Babil’den gelir!

2. **Kübik Denklem.** Kübik denklemlerle ilk uğraşanlar Türk-İslam matematikçileri olmuştur. Bu denklemlerle ilk uğraşan rubailerle de ünlü **Ömer Hayyam**’dır. **Hayyam**, $x^3 + cx = d$ tipindeki kübik bir denklemi parabol ve çemberi kesiştirerek geometrik yöntemle çözer. Türevin mucidi **Şerafeddin el Tusi** ise, “*Cebir*” adlı kitabının 2. parçasında kübik denklemleri 5 sınıfa ayırır ve bunların çözümlerini araştırır. Örneğin **Hayyam**’ınkinden farklı olarak, $x^3 + d = bx^2$ denkleminin çözümünde kübik polinomun maksimum noktasını bulmaya ihtiyacı vardı ki bu daha sonra **Cardano** tarafından cebirsel çözümü verilen denklemin diskriminantına karşılık geliyordu. Dikkat ediniz, bu kübik denklemin çözümünde hem türev (1. türev) bilgisi geçer, hem de diskriminant (Bkz. “*Cebirin tarihsel Gelişimi*”, “*Sharaf al-Din al-Tiisi on the Number of Positive Roots of Cubic Equations*”).

Daha sonra bu çözümler 15. yüzyıl ile 16. yüzyılın başına kadar Avrupalı matematikçiler tarafından ele alınarak geliştirilir. Buna göre 1500-1515 yılları arasında Bologna üniversitesinde profesör olan **Scipione del Ferro (1465-1526)**, $x^3 + cx = d$ tipindeki denklemlerin çözümleri için cebirsel bir yöntem geliştirdi. Bilindiği gibi İslam dünyasında sadece pozitif katsayılı denklemler geometrik bir yolla çözülmüş, negatif çözümler dikkate alınmamıştı. **Ferro**’nun 3. dereceden (kübik) denklemleri doğrusal, pozitif katsayılı ve sabit terimden oluşmaktadır. **Ferro** ölmeden önce yaptığı çözümleri öğrencisi **Antonio Marie Fiore**’ye (16. yüzyılın ilk yarısı) açıkladı. O dönemin İtalyan matematikçilerinden **Niccolo Tartaglia (1499-1557)**, $x^3 + bx^2 = d$ tipindeki denklemlerin çözümlerini ilk kendisinin keşfettiğini iddia etti. **Fiore**, halkın huzurunda **Tartaglia**’ya meydan okudu, ancak **Tartaglia**, **Fiore**’nin yapamadığı kübik denklem çözümlerini doğru olarak yaparak, halkın huzurunda kazandığını ilan etti (**Cajori**, 2007). Bir diğer İtalyan matematikçi **Gerolamo Cardano (1501-1576)**, **Tartaglia**’dan yaptığı çözümleri kendisine anlatmasını istedi. **Tartaglia**, **Cardano**’ya yaptığı çözümleri yayımlamaması koşuluyla anlatacağını söyledi. **Tartaglia**, 3 farklı kübik denklem formunun çözümlerini şiir formatında **Cardano**’ya açıklar. İlerleyen yıllarda **Cardano**, bu denklemlerin çözümlerinin **Tartaglia**’dan önce **Del Ferro** tarafından yapıldığını öğrenir. Bu duruma sinirlenen **Tartaglia**, 1545 yılında yayımladığı “*Ars Magna sive de Regulis Algebracis*” isimli eserinde $x^3 + cx = d$ tipindeki denklemlerin çözümlerini sözel olarak yapar ve çözümü veren formülü açıklar (**Katz**, 1998). **Cardano**, $x^3 \pm cx = d$ tipindeki denklemlerin çözümlerini modern gösterimle şöyle verir (ki bu çözümler bir yemek tarifi gibidir): **Bediz Asral**’ın aynı derste bize anlattığına göre, **Cardano**,

$$(3.40) \quad x^3 \pm cx = d$$

denkleminde $x = u + v$ değişken dönüşümüyle **Hudde**’nin hileli yöntemini kullanarak (ki ünlü illüzyonist **Houdini** ile karıştırmayınız),

$$\left(\frac{3uv \pm c}{=0} \right) (u + v) + u^3 + v^3 = u^3 + 3uv(u + v) + v^3 \pm c(u + v) = u^3 + \frac{3u^2v + 3uv^3}{=3uv(u+v)} + v^3 \pm c(u + v) = (u + v)^3 \pm c(u + v) = d$$

eşitliklerinden

$$(3.41) \quad \begin{cases} uv = \mp \frac{c}{3}, \\ u^3 + v^3 = d \end{cases}$$

denklem sistemini ve buradan da $U = u^3, V = v^3$ için kökler toplamı $U + V = d$ ve çarpımı $UV = \mp \left(\frac{c}{3}\right)^3$ olan şu kuadratik denklemi elde eder:

$$(3.42) \quad U^2 - dU \mp \left(\frac{c}{3}\right)^3 = 0.$$

İşte *Cardano* bu denklemin

$$U = u^3, v^3 = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pm \left(\frac{c}{3}\right)^3}$$

köklerinden

$$(3.43) \quad u, v = \sqrt[3]{\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pm \left(\frac{c}{3}\right)^3}}$$

çözümlerine ulaşır ve böylece (3.40) kübik denkleminin reel köküne

$$(3.44) \quad x = u + v = \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pm \left(\frac{c}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pm \left(\frac{c}{3}\right)^3}}$$

şeklinde ulaşır. Fakat bu kökün elde edilmesindeki (3.41)'in, dolayısıyla *Hudde*'nin hileli yönteminin "[Soyut Cebir Dersleri Cilt II](#)" kitabında açık olmadığı belirtilir. Bu, aynı zamanda [Bediz Asral](#)'ın yöntemde hileli gördüğü nokta idi. Çünkü o, bize derste 133-135. sayfalarındaki "[37.3.4. Cardano's method](#)"unu anlatırken tahtaya (2) denklemini yazmış ve sonra (3) denkleminde neden $3uv + p = 0$ olduğu hakkında bilimsel bir açıklama getirilemediği için "[Hudde'nin Hileli Yöntemi](#)" demişti. Aslında burada anlaşılacak bir şey yok, çünkü

$$x^3 = (u + v)^3 = u^3 + 3uv \left(\frac{u+v}{=x}\right) + v^3 = 3uvx + u^3 + v^3$$

olduğundan

$$(3.45) \quad x^3 \pm cx - d = x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3)$$

eşitliğinde polinomlarda özdeşlik geçerlidir (ki *Hudde* bunu 1650'de (4)'teki transformasyonla aşmıştır). Bu durumda (3.41)'deki denklemler açık hale gelmiş olur ki, bu şekildeki bir çözümü *Vieta (1540-1603)* kullanmış ve kübik denklemleri çözmüştür. *Vieta*, kübik denklemleri 13 sınıfa ayırır ve her birini ayrı ayrı çözmek yerine, her seferinde bu metodu kullanır. Örneğin, $x^3 - 21x = 20$ denklemini çözerken, $u^2 + uv + v^2 = 21$ ve $uv(u + v) = 20$ eşitliklerini göz önüne almış, u ve v değerlerinin 1 ve 4 olabileceğini ifade etmiş, buradan denklemin kökünü $x = u + v = 1 + 4 = 5$ olarak bulmuştur. Bununla birlikte bir denklemin katsayılarının kökleri cinsinden (3.35)'teki gibi yazıldığını ilk kez *Vieta* vermiştir (Bkz. "[Vieta Formülleri](#)" ve orijinali için "[Opera Mathematica](#)").

3. **Kuartik Denklem.** Bu tür denklemlerin çözümünü ilk kez *Cardano*'nun öğrencisi *Lodovico Ferrari (1540)* yapmış ve *Cardano*, bu çözümü kübik denklemin çözümüyle birlikte "[Ars Magna](#)"da yayımlamıştır. Buna göre *Ferrari*, genel 4. dereceden denklemdeki x^3 'lü terimi yok ederek,

$$(3.46) \quad x^4 + cx^2 + dx + e = 0$$

denklemini ele almış ve ardından, eğer modern matematikle ifade edersek,

$$(x^2 + u)^2 = x^4 + 2ux^2 + u^2 = 2ux^2 - cx^2 - dx + u^2 - e = (2u - c)x^2 - dx + u^2 - e$$

eşitliğin sol tarafının bir tam kareye tamamlarken,

$$(3.47) \quad (x^2 + u)^2 = (2u - c)x^2 - dx + u^2 - e$$

denkleminde görüldüğü üzere sağ tarafının da bir tam kare yani sağ taraftaki kuadratik polinomun diskriminantının

$$\Delta = (-d)^2 - 4(2u - c)(u^2 - e) = 0$$

olmasından hareketle, ki $2u = v$ değişken dönüşümünü yaparsak,

$$(3.48) \quad v^3 - cv^2 - 4ev + 4ce - d^2 = 0$$

kübik denklemini elde etmiştir. Bu denklem de (3.40)'teki kübik denkleme indirgenip ve reel kökü (3.44)'teki gibi olduğundan (3.46) kuartik denklemi böylece çözülmüş olur!

4. **Kuintik Denklem.** Bu tür genel bir denklemin çözülemeyeceğinin anlaşılması yaklaşık 300 yıl sürdü. Çünkü matematikçiler *Cardano*'dan sonra 5 ve daha yüksek dereceli bir denklemin köklerinin cebirsel olarak bulunmasının imkânsız olduğundan şüphelenmeye başlamışlardı. Bundan ilk şüphelenen kişi, *Paolo Ruffini*'dir. *Cardano*'dan yaklaşık 200 yıl sonra doğan *Ruffini* bu konudaki çalışmalarına değer verilmediğini görerek mutsuz bir şekilde öldü. Fakat kıymeti ancak 20. yy'ın sonlarında anlaşılabilirdi. *Ruffini*'den 100 yıl sonra *Niels Henrik Abel (1802-1829)* 5. dereceden (kuintik) bir denklemin köklerinin cebirsel olarak her zaman bulunamayacağı üzerine bir makale yayımladı. Onun kadar şanslı olamayan *Evariste Galois (1811-1832)* ise tüm denklemler için geçerli olan ve kendi adıyla anılan kuramını düelloda öleceğini anladığı için, düellodan önceki akşam arkadaşı *Auguste Chevalier*'e yazdığı bir mektupta açıkladı. O gece el yazmalarının her köşesine "hiç zamanım yok!" ibaresini bırakmıştı. Aslında henüz 20 yaşında Matematik dünyasına bıraktığı bu armağan bazı üniversitelerimizin Matematik bölümlerinde "**Galois Kuramı**" bir ders olarak okutulmaktadır (Bkz. [BÜM](#), [İYTE](#), [YÜM](#) vb.).

Özetle "derecesi 5 ve daha yüksek bir denklemin köklerinin cebirsel olarak çözümü yoktur" ifadesi ilk kez 1799'da ortaya atılmış ve 1824'te Abel-Ruffini Teoremi ile ispatlanmıştır. *Galois* ise son darbeyi vurmuştur. Çünkü kuramına göre derecesi 4'ten yüksek olan denklemlerin köklerinin cebirsel olarak bulunabilmesi için sağlamamak zorunda oldukları bazı şartlar vardır ve bazı denklemler bu şartları sağlamaz. Bu sonuç aynı ifadenin bir diğer ispatını gösterir.

Çözülebilir Olanlar

Fakat derecesi 4'ten büyük olan bazı denklemler indirgenebildiklerinden radikallerle (denklemin katsayılarından oluşan köklü ifadeler) çözülebilirler. Bunun örneklerini üniversitede kütüphanedeyken “Denklemler Teorisi I, II, III” kitaplarında ama, bu tip indirgenebilen denklemlerin çözümlerinin pratikte kullanılamayacak kadar karmaşık olduklarını görmüştüm. Bu konuda *Arthur Cayley*'in verilen herhangi bir 5. dereceden bir denklemin çözülebilir olup olmadığına ilişkin kriteri dikkat çeker. 1888'de *George Paxton Young*, çözülebilir 5. dereceden bir denklemin açık formül sağlamadan nasıl çözülebileceğini açıkladı. *Daniel Lazard* (2004), bunun için 3 sayfalık bir formül yazdı. Bu konuda diğer gelişmeler için “*Kuintik Denklem (Quintic Equation)*” sayfasına bakınız.

Diğer Yöntemler

Jerrard, 1835'te a reel sayısı için $x^5 + x - a = 0$ denkleminin eşsiz reel kökü olan ultra-radikaller (Bring radikalleri olarak da bilinir) kullanarak çözülebileceğini gösterdi. Daha sonra *Charles Hermite*, 1858'de 5. dereceden denklemlere ilişkin eliptik fonksiyonlar yardımıyla genel bir çözüm bulmuş ve *Felix Klein*, 1884'te ikosa-hedron simetrisi, Galois teorisi ve *Hermite*'nin çözümündeki eliptik modüler fonksiyonlarla ilişkili ve terimleri genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar olan bir çözüm vermişse de (ki Wolfram Research tarafından bir poster halinde yayınlanan “*Kuintik Çözümü (The Solving Quintic)*” buna dayanır), konu artık denklemler kuramının sınırlarını aşmış ve gruplar, cebirsel sayılar ve karmaşık değişkenli özel fonksiyonlar kuramlarının ortak ilgi alanına dönüşmüştür.



Derya PAMUKTULUM-2008

Resim 3.1. “Babil Algoritmasından Modern Kök Algoritmalarına Doğru 4,000 Yıllık Bir Yolculuk” adlı tezimin kapağı (Bkz. [JPG](#), [PDF](#)).

Yukarıda bu çalışmaların olduğu tezimin kapağı görülmektedir (ki benzer bir tez için *Manuel Benito Muñoz*'un “*Algunos problemas diofánticos (Birkaç Diofant Problemi)*” adlı doktora tezine bakabilirsiniz). Kapakta I. Babil Hanedanlığı Dönemi'ne tarihlenen ve Yale Babilonya Koleksiyonu'nda bulunan *YBC 7289* no'lu tabletin ön yüzü ve orada karenin köşegeni için verilen değerler görülmektedir. Araştırmacılar bu köşegen üzerindeki $\sqrt{2}$ 'nin 60 tabanındaki basamaklarının elde edilmesinde “*Babilonya Algoritması*”nın kullanılmış olduğunu düşünürler. Çok ilginçtir, *Otto Neugebauer (1899-1990)*, Göttingen Üniversitesi'nde yayınlanan “*Vorlesung über Geschichte der vorgriechische Mathematik*” kitabının “*Bölüm 6: Babilonya Geometrisi*”nin başlangıcı için yazdığı *Otto Neugebauer Papers, Box 1*'deki 1928 yılına ait sayfasında Eski Babil Dönemi'ne ait Pisagor Teoremi ve kareköklü bir sayıya rasyonel yaklaşıklıkla ilişkin Heron algoritmasına için şaşırtıcı gözlemlerine yer verir. Ancak henüz o sırada Heron algoritmasının bir Babil algoritması olduğundan habersizdir (ki 12. Maddede farklı zannediyordu). Bundan haberi, *YBC 7289* adlı tabletin bulunması ve *A. Sachs* ile birlikte yayımladıkları “*Mathematical Cuneiform Texts (Matematiksel Çiviyazı Metinleri)*, 1 Ocak 1945” kitabının 42-43. sayfalarında geçen “*a. Diagonal of a Square*” parçasında görüldüğü gibi incelemesinden sonra oldu!

Bu arada bir son dakika gelişmesi nedeniyle şu habere bir bakalım.

Avustralyalı Matematikçi, 3700 Yıllık Tablette Pisagor Üçlüleri'ni Keşfetti!

04.08.2021. 2017'de dünyanın en eski ve tam doğru bir trigonometrik tablosunu aktaran Plimton 322 adlı bir Babil tabletini *Norman Wildberg* ile birlikte aydınlatan ve onun bir inşaat çalışması sırasında pratik uygulamalar için hazırlanmasından hareket eden New South Wales Üniversitesi'nden matematikçi Dr. *Daniel Mansfield*'in

Fakat söz konusu bu çözümler de pratikte kullanılamayacak kadar karmaşıktırlar ve bu yüzden daha çok “*Yaklaşım Yöntemleri*” tercih edilir. Bu yöntemleri “*Sayısal Çözümleme*” adlı kitabın 2. bölümünde görebilirsiniz. Bunlardan en çok kullanılanlar, birçok literatürde görülen *Newton-Raphson*, *Halley*, *Olver*, *Abbasbandy*, *Li* ve *Wang*'ın verdiği *Thiele 1-2*, *Hausholder* vb. türevlere dayalı iteratif yöntemlerdir. Bu konuda 2008'de bitirdiğim 194 sayfalık “*Babil Algoritmasından Modern Kök Algoritmalarına Doğru 4000 Yıllık Bir Yolculuk*” adlı tezimin 108-170. sayfalarında ana başlıklar ve teorik olarak şu çalışmalarım mevcuttur:

1.5. ATA M Algoritmaları Ver. 3: Polinomal İnterpolasyonlarla $f(x)$ Eğrisinin Köklerine Yüksek Mertebeden Yaklaşımlar Metotları:

1.5.1. Linear İnterpolasyonla $f(x)$ Eğrisinin Köklerine Yüksek Mertebeden Yaklaşımlar Metodu,

1.5.2. Ters Polinomal İnterpolasyonlarla $f(x)$ Eğrisinin Köklerine Yüksek Mertebeden Yaklaşımlar Metotları,

1.5.2.1. Ters Linear İnterpolasyonla $f(x)$ Eğrisinin Köklerine Yüksek Mertebeden Yaklaşımlar Metodu,

1.5.2.2. Ters Kuadratik İnterpolasyonla $f(x)$ Eğrisinin Köklerine Yüksek Mertebeden Yaklaşımlar Metodu,

1.5.2.3. Ters Kübik İnterpolasyonla $f(x)$ Eğrisinin Köklerine Yüksek Mertebeden Yaklaşımlar Metodu,

1.5.2.4. Ters n-inci Mertebeden ve Tüm Noktaları Çakışan İnterpolasyonla $f(x)$ Eğrisinin Köklerine Yüksek Mertebeden Yaklaşımlar Metodu.

Söz konusu bu metotlara göre *Newton-Raphson*, *Halley* ve genelleştirilmiş, *Hausholder* ve genelleştirilmiş ve $f(x)$ 'in köklerine daha pek çok yaklaşım algoritması vardır. Peki kaç tane algoritma var? Sonsuz tane. Fakat bunlardan hiçbirisi $\sqrt[n]{x^m}$ 'e rasyonel yaklaşıklıklar için *ATA M Algoritmaları Ver. 2*'deki algoritmalarla yarışamaz. Örneğin $\sqrt[3]{2}$ için *RİK 4*'ün 46. sayfasında verdiğim çifte tablo bu durumu açık bir şekilde gösterir!

yolu İstanbul Arkeoloji Müzesi'ne düştü ve 3700 yıllık bir tablet keşfetti. Aslında bu bir keşif değildi, çünkü **Mansfield**, 1894'te günümüz Irak'ında gerçekleşen bir keşif gezisinin kazı kayıtlarını okuyarak varlığını öğrenmişti: "Bu kayıtlardan tabletin izini sürmek ve fiziksel olarak bulmak gerçekten zordu". Raporda tabletin artık var olmadığı belli bir yer olan Konstantinopolis İmparatorluk Müzesi'ne gittiği yazılıyordu. **Mansfield** nesneyi takip ettikten sonra çarşamba günü Foundations of Science dergisinde yayınlanan bir çalışmada ayrıntılı olarak ortaya konan tabletin önemini deşifre etmesi aylarını aldı. Matematik tarihini yeniden yazan 3700 yıllık bu tabletin üzerinde yer alan şekiller, onun arazi ölçeği için kullanıldığını ortaya koydu (Bkz. "[Sumerian tablet shows Pythagorean geometry 3,700kya 2021](#)").

1. Babil Hanedanlığı'nda yazıldı!

1. Babil Hanedanlığı'na (M.Ö. 1894-1595) tarihlenen ve Si.427 olarak adlandırılan tablet 1894'te antik bir kent olan Sippar'da ¹ çıkarıldı. Ancak tablet Dr. **Daniel Mansfield** tarafından analiz edilene kadar anlaşılamadı. **Mansfield**, 3700 yıllık bir kil tablet üzerinde bilinen en eski uygulamalı geometri örneği olduğunu açıkladı. **Mansfield** çarşamba günü yaptığı açıklamada, "Tabletin keşfi ve analizi matematik tarihi için önemli etkilere sahip. Örneğin bu, **Pisagor**'un doğmasından 1000 yıldan fazla bir süre önce." dedi.

Neugebauer, 1928'de söylemişti!

Oysa **Neugebauer**, 1928 tarihli kağıdında Pisagor Üçlüleri'nin 1. Babil Hanedanlığı'ndan beri mevcut olduğunu biliyor ve 7. Madde'de şunları yazıyordu:

"7) $A = a^2 + b^2 = c^2$! Also Pythagoras in der 1. Dyn. von Bab. (Pisagor bağıntısı I. Babil hanedanlığında da var).

Auch im Indian in der Sulba Sutras (≤ 200) Pythagoras A Heronische $\sqrt{\text{Approximation}}$ (Pythagoras 6-5-4 Dyn.) (Ayrıca Hindistan'da [Sulba Sutra](#)'da 200'e kadar A için $c = \sqrt{A}$, örneğin $\sqrt{2}$, kareköklü sayılarına Heronyen yaklaşıklık formülü kullanılmıştır (Pisagor 6-5-4. Hanedanlıklar))."

Bu maddedeki sonuçlar bende şu çağrışımı yaptı: "[Hindistan Dışişleri Bakanlığı-Londra](#). Son Yunan tarruzu Hindistan'da tepkilere yol açmış Sayın Bakan...

-İlk kabine toplantısında Sevr Antlaşması'nın Türkler lehine yumuşatılmasını isteyeceğim. Yoksa Hindistan'daki duruma hakim olamayacağız Sayın Müsteşar.

-Belki Mısır'da da Sayın Bakan!"

"İlk ve tek olduğu konusunda aynı fikirde değiliz!"

Tablet yıllardır İstanbul Arkeoloji Müzesi'nde sergileniyor. İstanbul Arkeoloji Müzesi Müdürü **Rahmi Asal**, "İlginç bir durum. Yaklaşık 20 yıldır teşhirde olan bir eserden bahsediyoruz. Tablet gerçekten çok önemli bir tablet. 1894 yılında **Osman Hamdi Bey**'in yönlendirmesiyle **Jean Vincent** adlı bir Fransız arkeoloğun çalışmalarıyla keşfedildi. Üzerindeki geometrik şekillerden dolayı geometriyle ilişkilendiriliyor. Dr. **Mansfield**'in araştırmasından sonra gündeme geldi. Üzerindeki geometrik ayrıntılardan ilk matematik tablet olduğu düşünülse de aslında biz arkeologlar biliyoruz ki bu daha öncelere dayanıyor. Araştırma Pisagor Teoremi ile ilişkilendirildi. Oradan hareketle bu tabletin bir kadastral belge olduğuna ilişkin matematik biliminden faydalandığı öne sürülüyor. İlk ve tek olduğu konusunda aynı fikirde değiliz" diye konuştu. **Asal**, ilginç konulu tabletlerle birlikte yeni bir sergi düzenleneceğini de belirterek, "Şu an eserin içinde olduğu vitrin ilginç konulu tablet örneklerimizin yer aldığı bir vitrin. Bu kadar gündeme geldikten sonra biz buradan belli başlı onun kadar önemli olan başka konular da var, mesela bir muska veya bir çarpım tablosu bu tabletleri gün yüzüne çıkarma niyetindeyiz" dedi (Bkz. "[Geometri tarihini değiştirecek 3 bin 700 yıllık tablet](#)").



Resim 3.2. Tablet "Si.427" envanter no'lu olarak İstanbul Arkeoloji Müzesi'nde son 20 yıldır sergilenmektedir (Bkz. [Tam Boyut](#) için). Tableti inceledim ve üzerinde çalıştım. Bu inceleme sırasında kâtibin kafasının net olmadığını, dolayısıyla dik üçgen, dikdörtgen ve yamuk şeklindeki arazi paylaşımlarında bazı problemlerin oluştuğunu gözlemledim.

Bu problemler şöyledir:

1. Sol altta 4 yazarken, onun üzerindeki 2. dikdörtgenin kenarına 6;10 yazmıştır.
2. Aynı şekilde sağ alttaki 6;40'ın altındaki taban için de 5 yazmış ve oradaki şekli bir dik üçgene tamamlamıştır. Ama üçgenlerdeki benzerlikten bunun doğru olmadığını görüyoruz. Örneğin bu benzerliklerden birini [AO 6484](#) no'lu tabletin 8. Problemi'ndeki $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < 1$; 25 yaklaşımından elde edilen $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1;25}{2} = 0;42,30$ 'a göre $x = \frac{4;42,30}{2} = 2;21,15$ ile düzelttim! (Y.N. Bu konuda tabletin üzerindeki şekildeki en alttaki dikdörtgenin genişliğinin, sol alt tarafta, 5;42,30 verildiğine dikkat ediniz. Fakat **Mansfield** x'i animasyonda [2:55](#) olarak verir. Ayrıca $\sqrt{2}$ için YBC 7289'daki yeni çıkarımlarım için [EK 1](#)'e bakabilirsiniz. Bu çalışmayı **R.J. Gillings**'de olduğu gibi **Mansfield**'in bu yeni araştırması nedeniyle bir diğer yönüne, Resim 3.1'deki tezimdeki YBC 7289'a ilişkin sonuçlara dikkat çekmek için yaptım. Bkz. "[Mathematics in the Time of Pharaohs \(Firavunlar Zamanında Matematik\)](#), Nova York, Dover, 1972").

Bunların dışında tablette bir sorun yoktur. Eğer tüm bu problemlere rağmen tableti orijinal haliyle kabul edersek, tablette sadece 2 farklı yerde (5,12,13) üçgeninin mevcut olduğunu görürüz. Bunlardan biri sol üst tepedeki dik üçgendir, diğeri yeşil köşegenle gösterdiğim sol alt taraftaki dikdörtgenin içindedir. Bununla birlikte haberlerde geçen (3,4,5) ve (8,15,17) üçlüleri, **Mansfield**'in, "[Perpendicular Lines and Diagonal Triples In Old Babylonian Surveying](#)" adlı makalesinin 93. sayfasındaki Şekil 3 (Fig. 3)'te tableti doğrulttuktan sonra, yani yukarıda anılan hataları tablettten arındırdıktan sonra, elde ettiği Pisagor üçlüleridir (Bkz. "[İstanbul'da 3700 yıllık uygulamalı geometri örneği bulundu!](#)").

Yukarıdaki resimde sayıların okumasını yaptıktan sonra kâtibin arazileri, çeşitli renklerle gösterdiğim dikdörtgenlerle, nasıl böldüğünü gösterdim. **Mansfield** bu şekilde gerçek bir arazi paylaşımının yapılmış olduğunu söyler ancak şekildeki dikdörtgenlerin alanlarının A'ya bağlı olması (ki A, sağ üst köşedeki dikdörtgenin alanıdır ve buna bağlı olarak şeklin altına çıkarttığım sonuçlar oldukça dikkat çekicidir), bana bunun bir egzersiz için kurgu olduğunu söylüyor!

¹ Sippar [Sitchin](#)'in özel bir takıntısıydı. Ona göre Sippar "Kuş" demektir ve kartallar burada yuva yaparlardı. Önsöz'de belirttiğine göre öğrenciyken Eski Ahit'teki "Nefilimler" kelimesinin yorumunu yanlış buldu ve Nefilimler'in dev yaratıklar olduğunu ve uzay mekikleriyle Sippar'a indiğini tespit ederek düzeltti. Bkz. "[12. Gezegen](#)".

Sitchin'e Bir Katkı: Mısır piramitlerinde kullanılan kübitin yaklaşık 52.38 CM olduğunu göz önüne alırsanız [Sitchin](#)'in tespitinin doğru olduğunu görürsünüz. Çünkü ölçümler, ki buna Mısır mummyaları da dahildir, Eski Babil Kısa Kübitleri'ndeki gibi 45-47 CM aralığında olduğunu göstermiştir. Ben ölçtüm; 45.5 CM çıktı!

25;29 gizemi!

Mansfield'i şaşırtan şeylerden biri, tabletin arkasına büyük yazı fontuyla kazınmış olan "25;29" gizemi. **Mansfield**, bir açıklamasında "Bu yaptıkları bir hesaplamanın parçası mı, henüz rastlamadığım bir alan mı, yoksa bir şeyin ölçüsü mü? Bu benim için gerçekten sinir bozucu çünkü tablet hakkında anladığım çok şey var. Bunun olduğunu anlamaya çalışmaktan vazgeçtim" derken, diğer açıklamasında "Bu mutlak bir muamma. Bu sayıların bize ne söylemeye çalıştığı konusunda bir önseziye sahip olabilecek tarihçiler veya matematikçilerle herhangi bir ipucunu tartışmaya hevesliyim." dedi (Bkz. "[Si.427-one of the oldest and most complete of applied geometry from the ancient world](#)").

Paket Programlarla Kök Bulunması

Fakat yukarıda anılan yöntemlerle kök bulmak belli bir yetkinlik ister, dolayısıyla günümüzde hazır paket programlardan yararlanırız. Örneğin Excel'de "Solver (Çözücü)" fonksiyonundan yararlanarak kök bulabiliriz. [Matlab](#) ve [Octave](#)'da kök bulmak için "Fzero" fonksiyonunu, polinomların kökünü bulmak içinse "Roots" ve [Mathematica](#)'da bir polinomun köklerini bulabilmek için yine "Roots" ve bunların radikallerle gösterimi yani tam çözümleri için de "Solve" (ki "NSolve", "Roots" ile aynı işleve sahiptir) fonksiyonlarını kullanabilirsiniz.

Uygulamalardan Önce Bilinmesi Gereken Bilgiler. Aşağıdaki uygulamalarda (3.13)'teki $K_{n,m}$ ve $T_{n,m}$ yaklaşıklıklarındaki (3.33)'te verilen $A_m(h\bar{n})$ için (3.34)'e göre

$$(3.49) \begin{cases} p_1 = \frac{c_0}{\sqrt{x_1}}, \\ p_i = \frac{c_0 x_i + c_1 - c_0 \sigma_1}{(2x_i - \sigma_1)\sqrt{x_i}} \quad (i = 1,2), \\ p_i = \frac{c_0 x_i^2 + (c_1 - c_0 \sigma_1)x_i + c_2 - c_1 \sigma_1 + c_0 \sigma_2}{(3x_i^2 - 2\sigma_1 x_i + \sigma_2)\sqrt{x_i}} \quad (i = 1,2,3), \\ p_i = \frac{c_0 x_i^3 + (c_1 - c_0 \sigma_1)x_i^2 + (c_2 - c_1 \sigma_1 + c_0 \sigma_2)x_i + c_3 - c_2 \sigma_1 + c_1 \sigma_2 - c_0 \sigma_3}{(4x_i^3 - 3\sigma_1 x_i^2 + 2\sigma_2 x_i - \sigma_3)\sqrt{x_i}} \quad (i = 1,2,3,4), \\ : \end{cases}$$

ve

$$(3.50) \begin{cases} r_1 = \frac{d_0}{\sqrt{y_1}}, \\ r_i = \frac{d_0 y_i + d_1 - d_0 \tau_1}{(2y_i - \tau_1)\sqrt{y_i}} \quad (i = 1,2), \\ r_i = \frac{d_0 y_i^2 + (d_1 - d_0 \tau_1)y_i + d_2 - d_1 \tau_1 + d_0 \tau_2}{(3y_i^2 - 2\tau_1 y_i + \tau_2)\sqrt{y_i}} \quad (i = 1,2,3), \\ r_i = \frac{d_0 y_i^3 + (d_1 - d_0 \tau_1)y_i^2 + (d_2 - d_1 \tau_1 + d_0 \tau_2)y_i + d_3 - d_2 \tau_1 + d_1 \tau_2 - d_0 \tau_3}{(4y_i^3 - 3\tau_1 y_i^2 + 2\tau_2 y_i - \tau_3)\sqrt{y_i}} \quad (i = 1,2,3,4), \\ : \end{cases}$$

katsayılarına ve bunlara karşılık gelen (3.31)'e göre

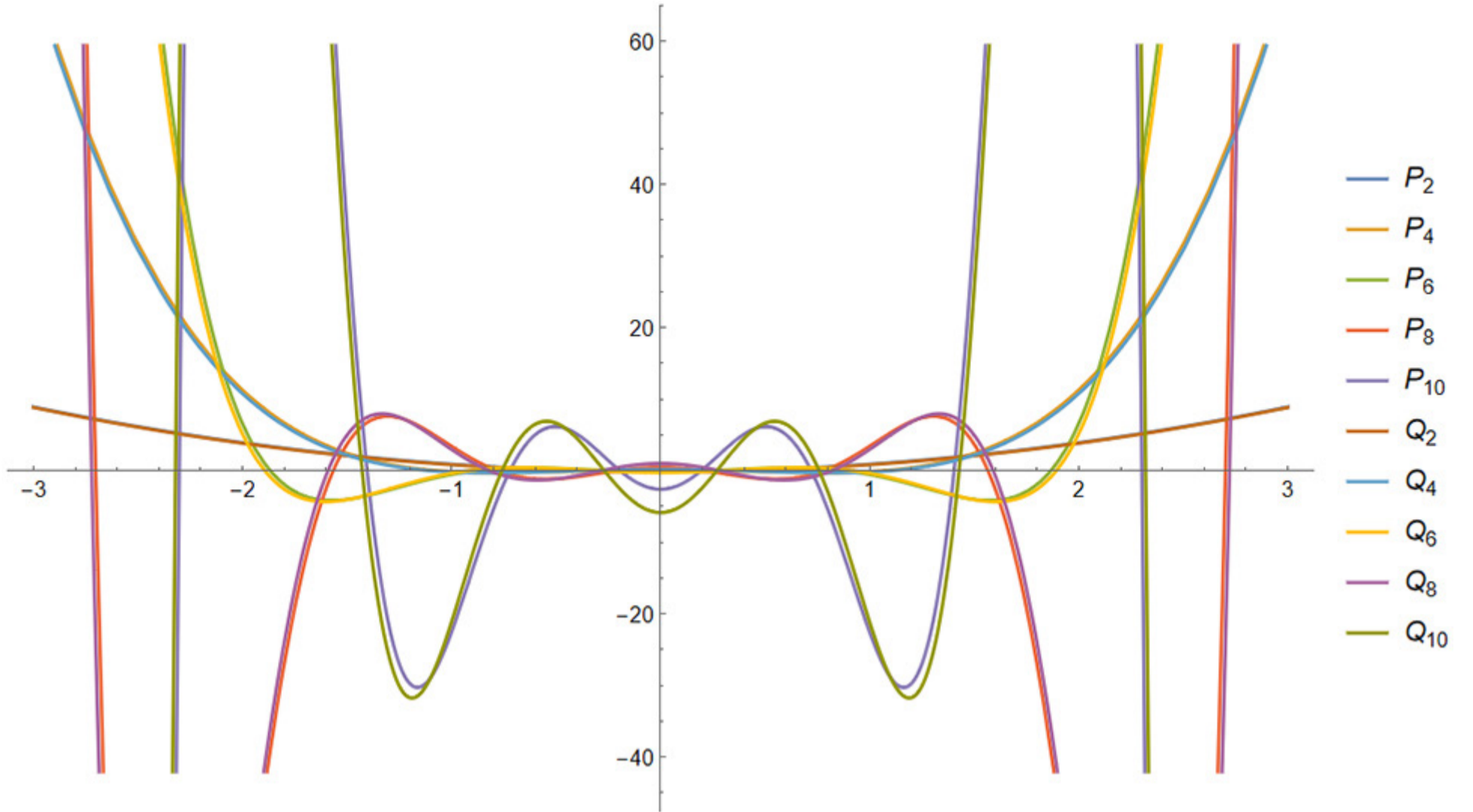
$$(3.51) \begin{cases} P_1(x) = x - \frac{1}{10} = 0, \\ P_2(x) = x^2 - \frac{95}{79}x + \frac{241}{3318} = 0, \\ P_3(x) = x^3 - \frac{29378559}{6823570}x^2 + \frac{21720531}{7505927}x - \frac{20169451}{150118540} = 0, \\ P_4(x) = x^4 - \frac{12655373038670}{1215864164327}x^3 + \frac{29551958406873}{1215864164327}x^2 - \frac{188805799287830}{15806234136251}x + \frac{162262595834387}{347737150997522} = 0, \\ P_5(x) = x^5 - \frac{5411944925153541478603603}{263846352383609361458150}x^4 + \frac{3594463688536580090475245056}{31582408380318040566540555}x^3 - \frac{48606109212769686853366451393}{255667115459717471252947350}x^2 \\ + \frac{3878690495933239005671807507}{51133423091943494250589470}x - \frac{364531577350817289951178316737}{139594245041005739304109253100} = 0, \\ : \end{cases}$$

ve

$$(3.52) \begin{cases} Q_1(y) = y - \frac{7}{40} = 0, \\ Q_2(y) = y^2 - \frac{11165}{8284}y + \frac{199849}{1391712} = 0, \\ Q_3(y) = y^3 - \frac{1474624620777}{326250475720}y^2 + \frac{4923031644489}{1435502093168}y - \frac{2494350063241}{8833859034880} = 0, \\ Q_4(y) = y^4 - \frac{2346471991174939308205}{219466354106092121614}y^3 + \frac{46158775788087795537873}{1755730832848736972912}y^2 - \frac{669313936491179725509895}{45649001654067161295712}y \\ + \frac{8192014289604970840000307}{8034224291115820388045312} = 0, \\ Q_5(y) = y^5 - \frac{244606447022503474610524400598026399701}{11724246373816687816448956955852504600}y^4 + \frac{167135289183333892458957398897295965315239}{1403392290945857531628940147615544800620}y^3 \\ - \frac{38170802194215059984330625252769052024364791}{181772715779653927906224628643537231318400}y^2 + \frac{13882053054748446890703311388700162592407967}{145418172623723142324979702914829785054720}y \\ - \frac{198264887787884393886776223369930695008453097}{33786520107469291791250603315530664953139200} = 0, \\ : \end{cases}$$

polinomal yaklaşımlardan elde edilen sonuçları uygulamalı olarak aşağıda teker teker verdikten sonra, bunlara ait Mathematica programları notlara ilâştireceğim!

Buradaki (3.51)&(3.52)'deki polinom çiftine ait grafikler şöyledir:



Şekil 3.1. (3.51) ve (3.52)'deki polinom çiftlerinin grafiklerinin birlikte görüntülenmesi. Fakat bu polinomları (3.31)'deki gibi değil, (3.26)'daki yazdım. Buna göre şekilden görüldüğü üzere $P_{2m}(q)$ ve $Q_{2m}(q)$ polinomlarının kökleri Legendre polinomlarındaki gibi orijine göre simetriktirler ve bu polinomlar yapışık ikiz gibi olduklarından, örneğin şekilde mavi $P_2(q)$ ve turuncu $Q_2(q)$ polinomlarının grafikleri adeta çakışmış gibi görünürler, birinin grafiği diğeriyle örtelenmiş gibi görünür ki kökler birbirlerine yakındırlar.

İşte bu şekildeki grafiklerde (3.26)'daki denklem için yukarıda çıkarttığım (Sayfa 6) 4 maddelik sonuçların doğru olduklarını açıkça görebilirsiniz. Yani $P_{2m}(q)$ ve $Q_{2m}(q)$ polinomlarının tüm kökleri reel olup, bunlardan yarısı orijinin solunda ve diğer yarısı sağında simetriktirler. Bu nedenle (3.32)'den görüldüğü üzere negatif kökler $A_m(h\bar{i})$ 'yi değiştirmedikçe göre, bu polinomların köklerini (3.26) yerine (3.31)'den bulmak yeterlidir!

1. **$K_{n,1}$ ve $T_{n,1}$ Yaklaşıklıkları (14.08.2021, 04:35:40).** Öncelikle (3.19)&(3.20)'de $m = 1$ alırsak $\forall n \in \mathbb{N}$ için geçerli olan

$$(3.53) \quad K_{n,1} = K_n - A_1(h_n\bar{i}) + O(h_n^6), \quad T_{n,1} = T_n + B_1(h_n\bar{i}) + O(h_n^6)$$

yaklaşıklarında (3.33)'ten

$$(3.54) \quad \begin{cases} A_1(h_n\bar{i}) = p_1 h_n\bar{i} \left[\left(f(a + \sqrt{x_1} h_n\bar{i}) - f(a - \sqrt{x_1} h_n\bar{i}) \right) - \left(f(b + \sqrt{x_1} h_n\bar{i}) - f(b - \sqrt{x_1} h_n\bar{i}) \right) \right], \\ B_1(h_n\bar{i}) = r_1 h_n\bar{i} \left[\left(f(a + \sqrt{y_1} h_n\bar{i}) - f(a - \sqrt{y_1} h_n\bar{i}) \right) - \left(f(b + \sqrt{y_1} h_n\bar{i}) - f(b - \sqrt{y_1} h_n\bar{i}) \right) \right] \end{cases}$$

katalizör yaklaşıklıklarının mevcut olduklarını biliyoruz.

Bu son yaklaşıklıklardaki kökler (3.51)&(3.52)'ye göre şu denklemlerden elde edilirler:

$$(3.55) \quad P_1(x) = x - \frac{1}{10} = 0, \quad Q_1(y) = y - \frac{7}{40} = 0$$

O halde bu denklemlerin

$$(3.56) \quad x_1 = \frac{1}{10}, \quad y_1 = \frac{7}{40}$$

köklerinden katsayılar (3.49)&(3.50)'ye göre şu şekilde belirmiş olur:

$$(3.57) \quad p_1 = \frac{c_0}{\sqrt{x_1}} = \frac{(-1)^0}{4(0+1)} B_{2,0+2} = \frac{1}{4} B_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{10}}{24}, \quad r_1 = \frac{d_0}{\sqrt{y_1}} = \frac{(-1)^0}{4(0+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2 \cdot 0 + 1}} \right) B_{2,0+2} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} \right) B_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{70}}{168}$$

Şu halde (3.56)'daki kökleri ve (3.57)'deki katsayıları (3.54)'te yerlerine koyar ve K_n trapez formülünü (1) ile T_n orta nokta formülünü (2)'den alırsak (3.53)'ten

$$(3.58) \quad \begin{cases} K_{n,1} = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) - \frac{\sqrt{10}}{24} h_n\bar{i} \left[\left(f\left(a + \frac{\sqrt{10}}{10} h_n\bar{i}\right) - f\left(a - \frac{\sqrt{10}}{10} h_n\bar{i}\right) \right) - \left(f\left(b + \frac{\sqrt{10}}{10} h_n\bar{i}\right) - f\left(b - \frac{\sqrt{10}}{10} h_n\bar{i}\right) \right) \right] + O(h_n^6), \\ T_{n,1} = h_n \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) h_n\right) + \frac{\sqrt{70}}{168} h_n\bar{i} \left[\left(f\left(a + \frac{\sqrt{70}}{20} h_n\bar{i}\right) - f\left(a - \frac{\sqrt{70}}{20} h_n\bar{i}\right) \right) - \left(f\left(b + \frac{\sqrt{70}}{20} h_n\bar{i}\right) - f\left(b - \frac{\sqrt{70}}{20} h_n\bar{i}\right) \right) \right] + O(h_n^6) \end{cases}$$

Uygulamalar

yaklaşıklıklarını elde etmiş oluruz. Bunlar (2.7)'deki *Ole Amble*'in yaklaşıklıklarının ya da (2.37)'deki genelleştirdiğim *Ole Amble*'in yaklaşıklıklarının bir üstüdür. Çünkü *Ole Amble*'in ya da genelleştirilmiş yaklaşıklıklarında h^2 'nin katsayısı sıfırlanırken, bu yaklaşıklıklarda h^2 ve h^4 'ün katsayıları sıfırlanmıştır (Bkz. "13.2. Tür E-ATA M Algoritması Üzerindeki En Genel Haldeki Ole Amble Algoritması'na Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım"daki "3. Ole Amble Kuralı (1952)"ye).

Şu halde (3.36)'ya göre $\forall m \in \mathbb{N}^+$ için $X_{mn} = K_{mn,1}, T_{mn,1}$ genel yaklaşıklıkları için

$$(3.59) \quad G_{mn,0}(X) = X_{mn}$$

başlangıç değerine göre (3.37)'ye göre $\forall k \in \mathbb{N}$ için şu ekstrapolasyon geçerli olur:

$$(3.60) \quad G_{m(n+1),k+1}(X) = \frac{4^{m(k+3)}G_{m(n+1),k}(X) - G_{mn,k}(X)}{4^{m(k+3)} - 1} + O(h_{mn}^{2(k+4)}).$$

Not 3.1. Yukarıda teorik sonuçlarımı verdiğim bu algoritmanın uygulamasını "[Kn,1 ve Tn,1 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#)"da görebilirsiniz.

2. **$K_{n,2}$ ve $T_{n,2}$ Yaklaşıklıkları (11.08.2021, 01:05:42).** $\forall n \in \mathbb{N}$ için geçerli olan (3.18)&(3.19)'da $m = 2$ alırsak,

$$(3.61) \quad \begin{cases} K_{n,2} = K_n - A_2(h_n) + O(h_n^{10}), \\ T_{n,2} = T_n + B_2(h_n) + O(h_n^{10}) \end{cases}$$

yaklaşıklarında (3.33)'ten

$$(3.62) \quad \begin{cases} A_2(h_n) = \sum_{k=1}^2 p_k h_n^k \left[(f(a + \sqrt{x_k} h_n) - f(a - \sqrt{x_k} h_n)) - (f(b + \sqrt{x_k} h_n) - f(b - \sqrt{x_k} h_n)) \right], \\ B_2(h_n) = \sum_{k=1}^2 r_k h_n^k \left[(f(a + \sqrt{y_k} h_n) - f(a - \sqrt{y_k} h_n)) - (f(b + \sqrt{y_k} h_n) - f(b - \sqrt{y_k} h_n)) \right] \end{cases}$$

katalizör yaklaşıklıklarının mevcut olur.

Bu son yaklaşıklıklardaki kökler (3.51)&(3.52)'ye göre şu denklemlerden elde edilirler:

$$(3.63) \quad \begin{cases} P_2(x) = x^2 - \frac{95}{79}x + \frac{241}{3318} = 0, \\ Q_2(y) = y^2 - \frac{11165}{8284}y + \frac{199849}{1391712} = 0. \end{cases}$$

O halde bu denklemlerin

$$(3.64) \quad \begin{cases} x_{1,2} = \frac{1995 \pm \sqrt{3180387}}{3318}, \\ y_{1,2} = \frac{234465 \pm \sqrt{37590570507}}{347928} \end{cases}$$

köklerinden katsayılar (3.49)&(3.50)'ye göre şu şekilde belirlenmiş olur:

$$(3.65) \quad \begin{cases} p_1 = \frac{c_0 x_1 + c_1 - c_0 \sigma_1}{(2x_1 - \sigma_1)\sqrt{x_1}} = \frac{(-1)^0}{4(0+1)} B_{2,0+2} \cdot \frac{1995 - \sqrt{3180387}}{3318} + \frac{(-1)^1}{4(1+1)} B_{2,1+2} - \frac{(-1)^0}{4(0+1)} B_{2,0+2} \cdot \frac{95}{79} = \frac{1}{240} \sqrt{\frac{26717557965 + 14979511\sqrt{3180387}}{36498727}}, \\ p_2 = \frac{c_0 x_2 + c_1 - c_0 \sigma_1}{(2x_2 - \sigma_1)\sqrt{x_2}} = \frac{(-1)^0}{4(0+1)} B_{2,0+2} \cdot \frac{1995 + \sqrt{3180387}}{3318} + \frac{(-1)^1}{4(1+1)} B_{2,1+2} - \frac{(-1)^0}{4(0+1)} B_{2,0+2} \cdot \frac{95}{79} = \frac{1}{240} \sqrt{\frac{26717557965 - 14979511\sqrt{3180387}}{36498727}}, \\ r_1 = \frac{d_0 y_1 + d_1 - d_0 \tau_1}{(2y_1 - \tau_1)\sqrt{y_1}} = \frac{(-1)^0}{4(0+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,0+1}}\right) B_{2,0+2} \cdot \frac{234465 - \sqrt{37590570507}}{347928} + \frac{(-1)^1}{4(1+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,1+1}}\right) B_{2,1+2} - \frac{(-1)^0}{4(0+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,0+1}}\right) B_{2,0+2} \cdot \frac{11165}{8284} \\ = \frac{1}{240} \sqrt{\frac{34437707238673095 + 177518449639\sqrt{37590570507}}{357735139297783}}, \\ r_2 = \frac{d_0 y_2 + d_1 - d_0 \tau_1}{(2y_2 - \tau_1)\sqrt{y_2}} = \frac{(-1)^0}{4(0+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,0+1}}\right) B_{2,0+2} \cdot \frac{234465 + \sqrt{37590570507}}{347928} + \frac{(-1)^1}{4(1+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,1+1}}\right) B_{2,1+2} - \frac{(-1)^0}{4(0+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,0+1}}\right) B_{2,0+2} \cdot \frac{11165}{8284} \\ = \frac{1}{240} \sqrt{\frac{34437707238673095 - 177518449639\sqrt{37590570507}}{357735139297783}} \end{cases}$$

Şu halde (3.64)'teki kökleri ve (3.65)'teki katsayıları (3.62)'de yerlerine koyar ve K_n trapez formülünü (1) ile T_n orta nokta formülünü (2)'den alırsak (3.61)'den

Uygulamalar

$$(3.66) \begin{cases} K_{n,2} = \frac{K_0}{2^n} + h_n \sum_{k=1}^{2^n-1} f(a + kh_n) - \frac{1}{240} \sqrt{\frac{26717557965 + 14979511\sqrt{3180387}}{36498727}} h_n \left[\left(f\left(a + \sqrt{\frac{1995 - \sqrt{3180387}}{3318}} h_n\right) - f\left(a - \sqrt{\frac{1995 - \sqrt{3180387}}{3318}} h_n\right) \right) - \left(f\left(b + \sqrt{\frac{1995 - \sqrt{3180387}}{3318}} h_n\right) - f\left(b - \sqrt{\frac{1995 - \sqrt{3180387}}{3318}} h_n\right) \right) \right] \\ - \frac{1}{240} \sqrt{\frac{26717557965 - 14979511\sqrt{3180387}}{36498727}} h_n \left[\left(f\left(a + \sqrt{\frac{1995 + \sqrt{3180387}}{3318}} h_n\right) - f\left(a - \sqrt{\frac{1995 + \sqrt{3180387}}{3318}} h_n\right) \right) - \left(f\left(b + \sqrt{\frac{1995 + \sqrt{3180387}}{3318}} h_n\right) - f\left(b - \sqrt{\frac{1995 + \sqrt{3180387}}{3318}} h_n\right) \right) \right] + O(h_n^{10}), \\ T_{n,2} = h_n \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h_n\right) + \frac{1}{240} \sqrt{\frac{34437707238673095 + 177518449639\sqrt{37590570507}}{357735139297783}} h_n \left[\left(f\left(a + \sqrt{\frac{234465 - \sqrt{37590570507}}{347928}} h_n\right) - f\left(a - \sqrt{\frac{234465 - \sqrt{37590570507}}{347928}} h_n\right) \right) - \left(f\left(b + \sqrt{\frac{234465 - \sqrt{37590570507}}{347928}} h_n\right) - f\left(b - \sqrt{\frac{234465 - \sqrt{37590570507}}{347928}} h_n\right) \right) \right] \\ - \frac{1}{240} \sqrt{\frac{34437707238673095 - 177518449639\sqrt{37590570507}}{357735139297783}} h_n \left[\left(f\left(a + \sqrt{\frac{234465 + \sqrt{37590570507}}{347928}} h_n\right) - f\left(a - \sqrt{\frac{234465 + \sqrt{37590570507}}{347928}} h_n\right) \right) - \left(f\left(b + \sqrt{\frac{234465 + \sqrt{37590570507}}{347928}} h_n\right) - f\left(b - \sqrt{\frac{234465 + \sqrt{37590570507}}{347928}} h_n\right) \right) \right] \\ + \frac{1}{240} \sqrt{\frac{34437707238673095 - 177518449639\sqrt{37590570507}}{357735139297783}} h_n \left[\left(f\left(a + \sqrt{\frac{234465 + \sqrt{37590570507}}{347928}} h_n\right) - f\left(a - \sqrt{\frac{234465 + \sqrt{37590570507}}{347928}} h_n\right) \right) - \left(f\left(b + \sqrt{\frac{234465 + \sqrt{37590570507}}{347928}} h_n\right) - f\left(b - \sqrt{\frac{234465 + \sqrt{37590570507}}{347928}} h_n\right) \right) \right] \\ + O(h_n^{10}) \end{cases}$$

yaklaşıklıklarını elde etmiş oluruz.

Söz konusu bu yaklaşıklıklarla (3.36)'ya göre $\forall m \in \mathbb{N}^+$ için $X_{mn} = K_{mn,2}, T_{mn,2}$ genel yaklaşıklıkları için

$$(3.67) \quad H_{mn,0}(X) = X_{mn}$$

başlangıç değerine göre (3.37)'ye göre $\forall k \in \mathbb{N}$ için şu ekstrapolasyon geçerli olur:

$$(3.68) \quad H_{m(n+1),k+1}(X) = \frac{4^{m(k+5)} H_{m(n+1),k}(X) - H_{mn,k}(X)}{4^{m(k+5)} - 1} + O(h_{mn}^{2(k+6)}).$$

Not 3.2. Yine bu parçada verdiğim teorik sonuçların uygulamasını "[Kn,2 ve Tn,2 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#)"da görebilirsiniz.

3. **$K_{n,3}$ ve $T_{n,3}$ Yaklaşıklıkları (10.08.2021, 11:05:36).** (3.18)&(3.19)'da bu sefer $m = 3$ alırsak $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(3.69) \quad K_{n,3} = K_n - A_3(h_n) + O(h_n^{14}), T_{n,3} = T_n + B_3(h_n) + O(h_n^{14})$$

yaklaşıklarında (3.33)'ten şu katalizör yaklaşıklıkları mevcut olur:

$$(3.70) \quad \begin{cases} A_3(h_n) = \sum_{k=1}^3 p_k h_n \left[\left(f(a + \sqrt{x_k} h_n) - f(a - \sqrt{x_k} h_n) \right) - \left(f(b + \sqrt{x_k} h_n) - f(b - \sqrt{x_k} h_n) \right) \right], \\ B_3(h_n) = \sum_{k=1}^3 r_k h_n \left[\left(f(a + \sqrt{y_k} h_n) - f(a - \sqrt{y_k} h_n) \right) - \left(f(b + \sqrt{y_k} h_n) - f(b - \sqrt{y_k} h_n) \right) \right] \end{cases}$$

Bu son yaklaşıklıklardaki kökler (3.51)&(3.52)'ye göre şu denklemlerden elde edilirler:

$$(3.71) \quad P_3(x) = x^3 - \frac{29378559}{6823570} x^2 + \frac{21720531}{7505927} x - \frac{20169451}{150118540} = 0, Q_3(y) = y^3 - \frac{1474624620777}{326250475720} y^2 + \frac{4923031644489}{1435502093168} y - \frac{2494350063241}{8833859034880} = 0.$$

Uygulamalar

O halde bu denklemlerin (ki kökler reel olduklarından, dolayısıyla “[Casus Irreducibilis](#) (İndirgenemez Hal)” den dolayı trigonometrik çözüme göre)

$$(3.72) \left\{ \begin{array}{l} x_{1,2} = \frac{9792853}{6823570} - \frac{\sqrt{\frac{560861122956799}{11}} \cos\left(\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{3411785 \sqrt{\frac{4814526012057111093331884764191}{11}}}{3308185097534522159172}\right)\right)}{6823570} \pm \frac{\sqrt{\frac{1682583368870397}{11}} \sin\left(\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{3411785 \sqrt{\frac{4814526012057111093331884764191}{11}}}{3308185097534522159172}\right)\right)}{6823570}, \\ x_3 = \frac{9792853}{6823570} + \frac{3411785}{6823570}, \\ y_{1,2} = \frac{491541540259}{326250475720} - \frac{7 \sqrt{\frac{26924342118424479395959}{11}} \cos\left(\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{3835 \sqrt{\frac{51814211276752482648948681029150617276165647943651949872270029871}{11}}}{373464109493358860320012829135534544}\right)\right)}{326250475720} \\ \pm \frac{7 \sqrt{\frac{80773026355273438187877}{11}} \sin\left(\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{3835 \sqrt{\frac{51814211276752482648948681029150617276165647943651949872270029871}{11}}}{373464109493358860320012829135534544}\right)\right)}{326250475720}, \\ y_3 = \frac{491541540259}{326250475720} + \frac{163125237860}{326250475720} \end{array} \right.$$

köklerine bağlı olarak katsayılar (3.49)&(3.50)'ye göre $i = 1,2,3$ için şu şekilde belirmiş olur:

$$(3.73) \left\{ \begin{array}{l} p_i = \frac{c_0 x_i^2 + (c_1 - c_0 \sigma_1) x_i + c_2 - c_1 \sigma_1 + c_0 \sigma_2}{(3x_i^2 - 2\sigma_1 x_i + \sigma_2) \sqrt{x_i}} = \frac{\frac{(-1)^0}{4(0+1)} B_{2.0+2} x_i^2 + \left(\frac{(-1)^1}{4(1+1)} B_{2.1+2} - \frac{(-1)^0}{4(0+1)} B_{2.0+2} \cdot \frac{29378559}{6823570}\right) x_i + \frac{(-1)^2}{4(2+1)} B_{2.2+2} - \frac{(-1)^1}{4(1+1)} B_{2.1+2} \cdot \frac{29378559}{6823570} + \frac{(-1)^0}{4(0+1)} B_{2.0+2} \cdot \frac{21720531}{7505927}}{(3x_i^2 - 2 \cdot \frac{29378559}{6823570} x_i + \frac{21720531}{7505927}) \sqrt{x_i}}, \\ = \frac{15762446700x_i^2 - 66288226620x_i + 39577260671}{30240(37529635x_i^2 - 107721383x_i + 36200885) \sqrt{x_i}}, \\ r_i = \frac{d_0 y_i^2 + (d_1 - d_0 \tau_1) y_i + d_2 - d_1 \tau_1 + d_0 \tau_2}{(3y_i^2 - 2\tau_1 y_i + \tau_2) \sqrt{y_i}} = \frac{\frac{(-1)^0}{4(0+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2.0+1}}\right) B_{2.0+2} y_i^2 + \left(\frac{(-1)^1}{4(1+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2.1+1}}\right) B_{2.1+2} - \frac{(-1)^0}{4(0+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2.0+1}}\right) B_{2.0+2} \cdot \frac{1474624620777}{326250475720}\right) y_i + \frac{(-1)^2}{4(2+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2.2+1}}\right) B_{2.2+2}}{(3y_i^2 - 2 \cdot \frac{1474624620777}{326250475720} y_i + \frac{4923031644489}{1435502093168}) \sqrt{y_i}}, \\ = \frac{-\frac{(-1)^1}{4(1+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2.1+1}}\right) B_{2.1+2} \cdot \frac{1474624620777}{326250475720} + \frac{(-1)^0}{4(0+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2.0+1}}\right) B_{2.0+2} \cdot \frac{4923031644489}{1435502093168}}{60480(7177510465840y_i^2 - 21627827771396y_i + 8205052740815) \sqrt{y_i}} \end{array} \right.$$

Dikkat ederseniz bu kökleri ve katsayıları (3.69)'da yerlerine koyup burada sergileme şansımız olmadığı için (ki aslında yapabilirim ama bu durumda (3.79), (3.80) ve (3.87)'dekilerden çok daha küçük olacak ve siz bunları okuyamayacaksınız. Bu nedenle sizin bu formülleri görebilmeniz için PDF'de okunabilecek boyuta kadar zoom yapmanız gerekir), sadece bunları açık olarak verebiliyorum. Yani sizin (3.72) ve (3.73)'ün (3.70)'de ve onun da (3.69)'da yerlerine konulmuş olduğunu kabul etmeniz gerekir.

Şu halde (3.69)'daki yaklaşıklıkları $\forall m \in \mathbb{N}^+$ için $X_{mn} = K_{mn,3}, T_{mn,3}$ genel yaklaşıklıklar olarak göz önüne alırsak (3.36)'ya göre,

Uygulamalar

$$(3.74) \quad K_{mn,0}(X) = X_{mn}$$

başlangıç değerine göre (3.37)'ye göre $\forall k \in \mathbb{N}$ için şu ekstrapolasyon geçerli olur:

$$(3.75) \quad K_{m(n+1),k+1}(X) = \frac{4^{m(k+7)}K_{m(n+1),k}(X) - K_{mn,k}(X)}{4^{m(k+7)} - 1} + O(h_{mn}^{2(k+8)}).$$

Not 3.3. Yine bu parçada verdiğim teorik sonuçların uygulamasını "[Kn,3 ve Tn,3 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#)"da görebilirsiniz.

4. **$K_{n,4}$ ve $T_{n,4}$ Yaklaşıklıkları (13.08.2021, 04:20:29).** Bu sefer (3.18)&(3.19)'da $m = 4$ alalım ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(3.76) \quad K_{n,4} = K_n - A_4(h_n \bar{i}) + O(h_n^{18}), T_{n,4} = T_n + B_4(h_n \bar{i}) + O(h_n^{18})$$

yaklaşıklarında (3.33)'ten

$$(3.77) \quad \begin{cases} A_4(h_n \bar{i}) = \sum_{k=1}^4 p_k h_n \bar{i} \left[\left(f(a + \sqrt{x_k} h_n \bar{i}) - f(a - \sqrt{x_k} h_n \bar{i}) \right) - \left(f(b + \sqrt{x_k} h_n \bar{i}) - f(b - \sqrt{x_k} h_n \bar{i}) \right) \right], \\ B_4(h_n \bar{i}) = \sum_{k=1}^4 r_k h_n \bar{i} \left[\left(f(a + \sqrt{y_k} h_n \bar{i}) - f(a - \sqrt{y_k} h_n \bar{i}) \right) - \left(f(b + \sqrt{y_k} h_n \bar{i}) - f(b - \sqrt{y_k} h_n \bar{i}) \right) \right] \end{cases}$$

yaklaşıklıklarını elde etmiş olalım.

Bu son yaklaşıklıklardaki kökler (3.51)&(3.52)'ye göre şu denklemlerden elde edilirler:

$$(3.78) \quad \begin{aligned} P_4(x) = x^4 - \frac{12655373038670}{1215864164327} x^3 + \frac{29551958406873}{1215864164327} x^2 - \frac{188805799287830}{15806234136251} x + \frac{162262595834387}{347737150997522} = 0, Q_4(y) = y^4 - \frac{2346471991174939308205}{219466354106092121614} y^3 + \frac{46158775788087795537873}{1755730832848736972912} y^2 - \frac{669313936491179725509895}{45649001654067161295712} y \\ + \frac{8192014289604970840000307}{8034224291115820388045312} = 0. \end{aligned}$$

O halde bu denklemlerin (ki kökler reel olduklarından, indirgendikleri kübik denklemlerdeki "[Casus Irreducibilis](#) (İndirgenemez Hal)"den dolayı trigonometrik çözüme göre)

$$(3.79) \quad \begin{aligned} x_{1,2,3,4} &= \frac{6327686519335}{2431728328654} \sqrt{\frac{16085505211907952396695911 + 2431728328654 \sqrt{\frac{5246420740474290766462154049}{143}} \cos\left(\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{40095390261300939676338377515584657604946669120740097785896840086331441899715529537}}{366350783784778635101503913173716926427130}\right)}{2431728328654}} \\ \pm \frac{1}{2} &\sqrt{\frac{32171010423815904793391822}{1478325666094594059362929} \pm \frac{2 \sqrt{\frac{5246420740474290766462154049}{143}} \cos\left(\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{40095390261300939676338377515584657604946669120740097785896840086331441899715529537}}{366350783784778635101503913173716926427130}\right)}{1215864164327}}{1215864164327}} \\ y_{1,2,3,4} &= \frac{2346471991174939308205}{877865416424368486456} \sqrt{\frac{2129164727964421930333959959946847694026351 + 219466354106092121614 \sqrt{\frac{11418287588036282093448910249135613659004244249}{143}} \cos\left(\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{4331580760589055619112471592745765344021544129398192213271421298543869134543933540897956558076194852867708328825737973107614942443178451337}}{1168578372982101141775265053976527599652454092277158825674787321853230}\right)}{877865416424368486456}} \\ \pm \frac{1}{2} &\sqrt{\frac{2129164727964421930333959959946847694026351}{9633096116924123649750777961119531929992} \pm \frac{\sqrt{\frac{671663975766840123144053544066800803470837897}{2431}} \cos\left(\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{4331580760589055619112471592745765344021544129398192213271421298543869134543933540897956558076194852867708328825737973107614942443178451337}}{1168578372982101141775265053976527599652454092277158825674787321853230}\right)}{51639142142609910968}}{3695572281442704356485842729075216548888337740588541355683764190}} \\ &\sqrt{\frac{156537811900017009308450139186819239386237}{2129164727964421930333959959946847694026351 + 219466354106092121614 \sqrt{\frac{11418287588036282093448910249135613659004244249}{143}} \cos\left(\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{4331580760589055619112471592745765344021544129398192213271421298543869134543933540897956558076194852867708328825737973107614942443178451337}}{1168578372982101141775265053976527599652454092277158825674787321853230}\right)}{1168578372982101141775265053976527599652454092277158825674787321853230}} \end{aligned}$$

köklere elde edilir. Fakat bu köklere x-ekseni üzerinde küçükten büyüğe doğru sıralayabilmemiz için işaretleri $(-, -), (+, -), (-, +), (+, +)$ almanız gerekir.

Uygulamalar

Bu durumda bu köklere bağlı olarak katsayılar (3.49)&(3.50)'ye göre $i = 1,2,3,4$ için şu şekilde belirmiş olur:

$$(3.80) \begin{cases} p_i = \frac{c_0 x_i^3 + (c_1 - c_0 \sigma_1) x_i^2 + (c_2 - c_1 \sigma_1 + c_0 \sigma_2) x_i + c_3 - c_2 \sigma_1 + c_1 \sigma_2 - c_0 \sigma_3}{(4x_i^3 - 3\sigma_1 x_i^2 + 2\sigma_2 x_i - \sigma_3) \sqrt{x_i}} \\ = \frac{\frac{(-1)^0}{4(0+1)} B_{2,0+2} x_i^3 + \left(\frac{(-1)^1}{4(1+1)} B_{2,1+2} - \frac{(-1)^0}{4(0+1)} B_{2,0+2} \cdot \frac{12655373038670}{1215864164327} \right) x_i^2 + \left(\frac{(-1)^2}{4(2+1)} B_{2,2+2} - \frac{(-1)^1}{4(1+1)} B_{2,1+2} \cdot \frac{12655373038670}{1215864164327} + \frac{(-1)^0}{4(0+1)} B_{2,0+2} \cdot \frac{29551958406873}{1215864164327} \right) x_i + \frac{(-1)^3}{4(3+1)} B_{2,3+2} - \frac{(-1)^2}{4(2+1)} B_{2,2+2} \cdot \frac{12655373038670}{1215864164327} + \frac{(-1)^1}{4(1+1)} B_{2,1+2} \cdot \frac{29551958406873}{1215864164327} - \frac{(-1)^0}{4(0+1)} B_{2,0+2} \cdot \frac{188805799287830}{15806234136251}}{(4x_i^3 - 3 \cdot \frac{12655373038670}{1215864164327} x_i^2 + 2 \cdot \frac{29551958406873}{1215864164327} x_i - \frac{188805799287830}{15806234136251}) \sqrt{x_i}} \\ = \frac{6638618337225420x_i^3 - 68434474957415658x_i^2 + 154759983905137780x_i - 66121532483928871}{20160(31612468272502x_i^3 - 246779774254065x_i^2 + 384175459289349x_i - 94402899643915) \sqrt{x_i}}, \\ r_i = \frac{d_0 y_i^3 + (d_1 - d_0 \tau_1) y_i^2 + (d_2 - d_1 \tau_1 + d_0 \tau_2) y_i + d_3 - d_2 \tau_1 + d_1 \tau_2 - d_0 \tau_3}{(4y_i^3 - 3\tau_1 y_i^2 + 2\tau_2 y_i - \tau_3) \sqrt{y_i}} = \frac{\frac{(-1)^0}{4(0+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,0+1}}\right) B_{2,0+2} y_i^3 + \left(\frac{(-1)^1}{4(1+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,1+1}}\right) B_{2,1+2} - \frac{(-1)^0}{4(0+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,0+1}}\right) B_{2,0+2} \cdot \frac{2346471991174939308205}{219466354106092121614} \right) y_i^2 + \left(\frac{(-1)^2}{4(2+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,2+1}}\right) B_{2,2+2} - \frac{(-1)^1}{4(1+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,1+1}}\right) B_{2,1+2} \cdot \frac{2346471991174939308205}{219466354106092121614} \right) y_i + \frac{(-1)^3}{4(3+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,3+1}}\right) B_{2,3+2} - \frac{(-1)^2}{4(2+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,2+1}}\right) B_{2,2+2} \cdot \frac{2346471991174939308205}{219466354106092121614} + \frac{(-1)^1}{4(1+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,1+1}}\right) B_{2,1+2} \cdot \frac{46158775788087795537873}{1755730832848736972912} - \frac{(-1)^0}{4(0+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,0+1}}\right) B_{2,0+2} \cdot \frac{669313936491179725509895}{45649001654067161295712}}{(4y_i^3 - 3 \cdot \frac{2346471991174939308205}{219466354106092121614} y_i^2 + 2 \cdot \frac{46158775788087795537873}{1755730832848736972912} y_i - \frac{669313936491179725509895}{45649001654067161295712}) \sqrt{y_i}} \\ + \frac{\frac{(-1)^0}{4(0+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,0+1}}\right) B_{2,0+2} \cdot \frac{46158775788087795537873}{1755730832848736972912} y_i + \frac{(-1)^3}{4(3+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,3+1}}\right) B_{2,3+2} - \frac{(-1)^2}{4(2+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,2+1}}\right) B_{2,2+2} \cdot \frac{2346471991174939308205}{219466354106092121614} + \frac{(-1)^1}{4(1+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,1+1}}\right) B_{2,1+2} \cdot \frac{46158775788087795537873}{1755730832848736972912} - \frac{(-1)^0}{4(0+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2,0+1}}\right) B_{2,0+2} \cdot \frac{669313936491179725509895}{45649001654067161295712}}{38345161389416415488398080y_i^3 - 403265183054937523219107936y_i^2 + 939899733237862715259887920y_i - 419825435106653276556586297} \\ = \frac{40320(182596006616268645182848y_i^3 - 1464198522493162128319920y_i^2 + 2400256340980565367969396y_i - 669313936491179725509895) \sqrt{y_i}}{38345161389416415488398080y_i^3 - 403265183054937523219107936y_i^2 + 939899733237862715259887920y_i - 419825435106653276556586297} \end{cases}$$

Burada yine (3.79)'daki köklerin ve (3.80)'deki katsayıların (3.77) vasıtasıyla (3.76)'da yerlerine konulmuş olduğunu kabul ediyoruz. O halde (3.76)'daki yaklaşıklıklardan $\forall m \in \mathbb{N}^+$ için $X_{mn} = K_{mn,4}, T_{mn,4}$ genel yaklaşıklıkları için (3.36)'ya göre,

$$(3.81) \quad L_{mn,0}(X) = X_{mn}$$

başlangıç değerine göre (3.37)'ye göre $\forall k \in \mathbb{N}$ için şu ekstrapolasyon geçerli olur:

$$(3.82) \quad L_{m(n+1),k+1}(X) = \frac{4^{m(k+9)} L_{m(n+1),k}(X) - L_{mn,k}(X)}{4^{m(k+9)} - 1} + O\left(h_{mn}^{2(k+10)}\right).$$

Not 3.4. Yine bu parçada verdiğim teorik sonuçların uygulamasını "[Kn,4 ve Tn,4 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#)"da görebilirsiniz.

5. **$K_{n,5}$ ve $T_{n,5}$ Yaklaşıklıkları (13.08.2021, 19:39:59).** Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için geçerli olan (3.18)&(3.19)'da $m = 5$ alırsak,

$$(3.83) \quad K_{n,5} = K_n - A_5(h_n^{\mathbb{I}}) + O(h_n^{22}), T_{n,5} = T_n + B_5(h_n^{\mathbb{I}}) + O(h_n^{22})$$

yaklaşıklarında (3.33)'ten

$$(3.84) \quad \begin{cases} A_5(h_n^{\mathbb{I}}) = \sum_{k=1}^5 p_k h_n^{\mathbb{I}} \left[\left(f(a + \sqrt{x_k} h_n^{\mathbb{I}}) - f(a - \sqrt{x_k} h_n^{\mathbb{I}}) \right) - \left(f(b + \sqrt{x_k} h_n^{\mathbb{I}}) - f(b - \sqrt{x_k} h_n^{\mathbb{I}}) \right) \right], \\ B_5(h_n^{\mathbb{I}}) = \sum_{k=1}^5 r_k h_n^{\mathbb{I}} \left[\left(f(a + \sqrt{y_k} h_n^{\mathbb{I}}) - f(a - \sqrt{y_k} h_n^{\mathbb{I}}) \right) - \left(f(b + \sqrt{y_k} h_n^{\mathbb{I}}) - f(b - \sqrt{y_k} h_n^{\mathbb{I}}) \right) \right] \end{cases}$$

katalizör yaklaşıklıklarının mevcut olur.

Bu son yaklaşıklıklardaki kökler, (3.51)&(3.52)'ye göre şu denklemlerin kökleridirler:

$$(3.85) \quad \begin{cases} P_5(x) = x^5 - \frac{5411944925153541478603603}{263846352383609361458150} x^4 + \frac{3594463688536580090475245056}{31582408380318040566540555} x^3 - \frac{48606109212769686853366451393}{255667115459717471252947350} x^2 + \frac{3878690495933239005671807507}{51133423091943494250589470} x - \frac{364531577350817289951178316737}{139594245041005739304109253100} = 0, \\ Q_5(y) = y^5 - \frac{244606447022503474610524400598026399701}{11724246373816687816448956955852504600} y^4 + \frac{167135289183333892458957398897295965315239}{1403392290945857531628940147615544800620} y^3 - \frac{38170802194215059984330625252769052024364791}{181772715779653927906224628643537231318400} y^2 \\ + \frac{13882053054748446890703311388700162592407967}{145418172623723142324979702914829785054720} y - \frac{198264887787884393886776223369930695008453097}{33786520107469291791250603315530664953139200} = 0. \end{cases}$$

Uygulamalar

Fakat bunlar kuintik (5. dereceden) denklemler ve çözülebilir olmadıklarından kökleri yukarıda değindiğim diğer yöntemlerden elde edebilirsiniz. Bu yöntemler arasında eliptik ve hipergeometrik fonksiyonlara göre elde edilen kuintik kökler son derece dikkat çekicidir. Çünkü (3.71)'deki kübik ve (3.78)'deki kuartik denklemlerin kökleri (3.72) ve (3.79)'dan görüldüğü üzere "[Casus Irreducibilis](#) (İndirgenemez Hal)"den dolayı, sinüs ve kosinüs serilerine bağlı olduklarından (3.85)'teki kuintik denklemlerin köklerinin hipergeometrik fonksiyonlara göre elde edilmesinin farklı şekilde elde edildiğini düşünmek doğru olmasa gerek (Bkz. "[Solving Algebraic Equations in Terms of A-Hypergeometric Series](#)"). Çünkü sonuçta (3.71), (3.78) ve (3.85)'teki denklemlerin kökleri serilere bağlı olarak bulunmuş oluyor.



Hatta bu konuda Mathematica programının yaratıcısı Wolfram Research tarafından 1994'te "[Kuintik Denklemin \(Quintic Equation\)](#)" adlı bir web sayfası hazırlanmış ve orada "[Kuintikin Çözümü \(Solving the Quintic\)](#)" adlı yanda görülen posterin satışı yapılıyordu. İşte bu posterde kuintik denklemin kısa bir tarihçesi ve beyaz görülen yerlerde de genel bir kuintik denklemin çözümünün nasıl yapıldığı gösteriliyor ve sonunda kökleri veriliyordu. Bu bilgileri hem yukarıda verdiğim diğer yöntemlerde hem de az önce linkini verdiğim web sayfasından görebilirsiniz. Ama Mathematica varken buna da gerek kalmadı artık. Çünkü Mathematica (3.85)'teki kuintik denklemlerin köklerini size verir ve siz bu köklerle demo halinde de olsa (3.83)'teki $K_{n,5}$ ve $T_{n,5}$ yaklaşıklıklarıyla hesap yapabilirsiniz. Aynı durum $5 < m$ için (3.18)&(3.19)'dan elde edilen diğer yaklaşıklıklar için de geçerlidir. Yani Mathematica ile tüm m değerleri için $K_{n,m}$ ve $T_{n,m}$ yaklaşıklıklarıyla hesap yapabilirsiniz. Bu konuda herhangi bir sıkıntı yaşamazsınız. Fakat bu hesapları Mathematica'nın dışındaki bir platformda (örneğin C, C+, C++ vb.) yapmaya çalışırsanız, o zaman işin rengi değişir ve bu kökleri hesaplamamız gerekir. Bu durumda Resim 3.1'de anılan tezimdeki "[1.5. ATA M Algoritmaları Ver. 3](#)" bölümündeki iteratif algoritmalar son derece önem arz eder. Söz konusu bu algoritmalara göre derecesi ne olursa olsun herhangi bir denklemin köklerini herhangi bir mertebeden (kuadratik, kübik, kuartik vd.) hesaplayabilirsiniz. Bu, özellikle programcılar için elzemdir!

Mathematica bize (3.85)'teki kuintik denklemlerin köklerini şöyle verir (ki aşağıdaki ilk yazılışlar Mathematica tarafından sıkıştırılarak paketlenmiş kökler olup bunları [\\$MinNumber](#)'dan [\\$MaxNumber](#)'a kadar kullanabilirsiniz. Fakat bu ekstramum değerler bilgisayardan bilgisayara değişir. Örneğin bu komutları yazdığımdaya bana önerilen en küçük ve en büyük değerler şunlar oldu: $[6.229688249675322 \times 10^{-1355718576299610}, 1.605216761933661 \times 10^{1355718576299609}]$. İşte demo dememin nedeni budur. Yani Mathematica size herhangi bir denklemin köklerini basamak sayıları bu aralıkta olacak şekilde verir ve bunun dışına çıkamaz. Ama uçmayacaksınız bu aralık size yeter ve artar bile):

$$(3.86) \quad \begin{cases} x_1 = 0.0380 \dots = 0.037955171271281072816 \dots, & y_1 = 0.0726 \dots = 0.072590648576114748741 \dots, \\ x_2 = 0.519 \dots = 0.51918907432044287151 \dots, & y_2 = 0.575 \dots = 0.57540573720088769831 \dots, \\ x_3 = 1.97 \dots = 1.9712231431834588107 \dots, & y_3 = 2.04 \dots = 2.0396043361007252391 \dots, \\ x_4 = 5.30 \dots = 5.3005262575317001421 \dots, & y_4 = 5.39 \dots = 5.385463107298776649 \dots, \\ x_5 = 12.7 \dots = 12.682835533428185585 \dots, & y_5 = 12.8 \dots = 12.790234264658654381 \dots \end{cases}$$

Bu durumda bu köklere bağlı olarak katsayılar (3.34)'e göre $i = 1,2,3,4,5$ için şu şekilde belirleriz:

$$(3.87) \quad \begin{cases} p_i = \frac{c_0 x_i^4 + (c_1 - c_0 \sigma_1) x_i^3 + (c_2 - c_1 \sigma_1 + c_0 \sigma_2) x_i^2 + (c_3 - c_2 \sigma_1 + c_1 \sigma_2 - c_0 \sigma_3) x_i + c_4 - c_3 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 - c_1 \sigma_3 + c_0 \sigma_4}{(5x_i^4 - 4\sigma_1 x_i^3 + 3\sigma_2 x_i^2 - 2\sigma_3 x_i + \sigma_4) \sqrt{x_i}} \\ = \frac{24804823541901789060960951897000x_i^4 - 506309340488416120926147699415440x_i^3 + 2773393980765793267793221704278886x_i^2 - 4456443383350185800175222357694110x_i + 1521224722762415228288645481221957}{332640(8948349041090111493853157250x_i^4 - 146836889709265887397472956596x_i^3 + 611058827051218615380791659520x_i^2 - 680485528978775615947130319502x_i + 135754167357663365198513262745) \sqrt{x_i}}, \\ r_i = \frac{d_0 y_i^4 + (d_1 - d_0 \tau_1) y_i^3 + (d_2 - d_1 \tau_1 + d_0 \tau_2) y_i^2 + (d_3 - d_2 \tau_1 + d_1 \tau_2 - d_0 \tau_3) y_i + d_4 - d_3 \tau_1 + d_2 \tau_2 - d_1 \tau_3 + d_0 \tau_4}{(5y_i^4 - 4\tau_1 y_i^3 + 3\tau_2 y_i^2 - 2\tau_3 y_i + \tau_4) \sqrt{y_i}} \\ = \frac{7054235539768096341847653883983928730044672000y_i^4 - 145940127964802635635009486526111461350469278720y_i^3 + 8150108380485468603361915717019610411163343048544y_i^2 - 13471909669584630179601037795771271011791637317480y_i + 4783734708555846156107459165711778122076595404413}{665280(25448180209151549906871448010095212384576000y_i^4 - 424746375719332113480495874369641745708002048y_i^3 + 1818431946314672749953456500002580102629800320y_i^2 - 2137564922876043359122515014155066913364428296y_i + 485871856916195641174615898604505690734278845) \sqrt{y_i}} \end{cases}$$

Yine burada (3.86)'daki köklerin ve (3.87)'deki katsayıların (3.84) vasıtasıyla (3.83)'te yerlerine konulmuş olduğunu kabul ediyoruz ve bu son yaklaşıklardan $\forall m \in \mathbb{N}^+$ için $X_{mn} = K_{mn,5}, T_{mn,5}$ genel yaklaşıklıkları için (3.36)'ya göre,

$$(3.88) \quad M_{mn,0}(X) = X_{mn}$$

başlangıç değerine göre (3.37)'ye göre $\forall k \in \mathbb{N}$ için şu ekstrapolasyon geçerlidir:

$$(3.89) \quad M_{m(n+1),k+1}(X) = \frac{4^{m(k+1)} M_{m(n+1),k}(X) - M_{mn,k}(X)}{4^{m(k+1)} - 1} + O\left(h_{mn}^{2(k+12)}\right).$$

Not 3.5. Bu parçada verdiğim teorik sonuçların uygulamasını "[Kn,5 ve Tn,5 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#)"da görebilirsiniz.

BONUS! Burada detaylarını vermeye gerek görmediğim "[Kn,6 ve Tn,6 Yaklaşıklıklarına Mathematica İle Sembolik Bir Yaklaşım](#)" çalışmasının yalnızca Mathematica'daki uygulamasına bakabilirsiniz!

D. PAMUKTULLAM

EK 1: YBC 7289 No'lu Tablette $\sqrt{2}$ İçin Verilen 1;24,51,10 Yaklaşıklıkının Bulunması.

17.09.2021, 23:16.

“Tarih, bir masal değil; milletlerin ve devletlerin hayat hikâyesidir!”

Bu tablet hakkında bir sürü şey yazıldı, çizildi ama şimdiye kadar (1 Ocak 1945'ten beri) tam çözüme ulaşabilen kimse çıkmadı.

Problem şu: Tabletın ön yüzünde köşegenleriyle birlikte çizilmiş bir kare ve bu karenin bir kenar uzunluğu $0;30 = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ Birim olarak verildiğine göre, bu karenin köşegeni cetvelle ölçülebilir mi? Ölçülebilirse kaç birim olur?

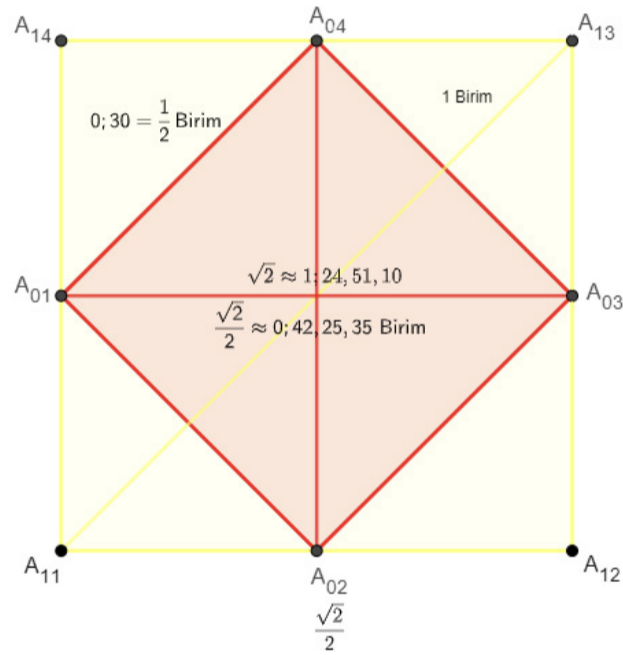
I. Babilonya Hanedanlığı Dönemi'ndeki (M.Ö. 19-16. yy.) bir kâtip, bu tabletteki karenin bir köşegeni üzerine yazdığı $1;24,51,10 \approx \sqrt{2}$ sabitini 2'ye bölerek,

$$(3.90) \quad 0;30 \times 1;24,51,10 = \frac{1;24,51,10}{2} = 0;42,25,35 \text{ Birim}$$

ile bir ölçümde bulunmuş ve bu sonucun kübitte $4;14,33,30 = 4\frac{1747}{7200} \approx 4\frac{1}{4}$ Parmak olduğunu görmüş ama tamamen okuyabilmek mümkün olmamış. Çünkü kesir kısmı çok karmaşık. Daha sonra Eski Yunanlılar, Pisagor Teoremi'nde olduğu gibi bu hikâyeyi de değiştirerek kendilerine mâl etmişlerdir. Bir rivayete göre, bütün sayıları rasyonel olarak kabul eden **Pisagor** ve tarikatı, bir dik kenarı 1 Birim olan ikizkenar dik üçgene Pisagor teoremini uyguladıklarında $\sqrt{2}$ çıkmış ve bunun $\frac{a}{b}$ şeklinde bir kesir olarak yazılmadığını görmüşler. Bunun üzerine **Pisagor**, bu bilginin tarikat içinde bir sır olarak kalmasını ve bundan sonra kimsenin bu konu hakkında konuşmamasını istemiş!

Şimdi bu kısa girişten sonra problemin çözümüne ilişkin araştırmamıza geçebiliriz. Bunun için ilkin aşağıdaki anahtar tabletimize bir bakalım.

Anahtar Tablet: BM 15285. 7 ya da daha fazla sütundan oluşan bu tablette bir dizi geometrik problem verilir. Başlangıçta geometrik desenlermiş gibi görünen şekillerde, özellikle iç içe geçmiş şekillerde, geometrik serilerle ilgili problemler dikkat çeker. Örneğin [Mathematical commentary](#)'nin üzerine tıklarsanız, oradaki iç içe geçmiş 2 kareden oluşan şekli bu tablette [4 farklı problem](#)de görebilirsiniz.



Şimdi [YBC 7289](#)'daki verilere göre yanda çizdiğim şekli ve bunu BM 15285'teki aynı şekle ait problemlere göre değerlendirdiğimiz zaman şu geometrik seriyle karşılaştığımızı görürüz: Eğer yanda görülen şekilde içteki $A_{01}A_{02}A_{03}A_{04}$ karesini YBC 7289'daki gibi alırsam karenin bir kenar uzunluğu $|A_{01}A_{04}| = 0;30 = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ Birim ve bir köşegen uzunluğu $|A_{01}A_{03}| = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Birim olur. Bunun için tablette

$$(3.91) \quad 1;24,51,10 \approx \sqrt{2}$$

yaklaşıklıkını verildiğinden

$$(3.92) \quad |A_{01}A_{03}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1;24,51,10}{2} = 0;42,25,35 \text{ Birim}$$

elde edilir. İşte bu sonuç yanda görüldüğü üzere tabletin bir köşegeni üzerindeki $1;24,51,10$ 'nun hemen altında yazar ve tablette bunlardan başka bir şey verilmez!

Peki bu sonucu elde edebilmem için bana ne lazım? BM 15285 no'lu tablet. Çünkü yandaki şekilden hareketle iç içe geçmiş kareleri göz önüne alır ve bunların köşegenleriyle ilgilenirsek, n doğal sayısı için $A_{n1}A_{n2}A_{n3}A_{n4}$ karesinin $|A_{n1}A_{n3}| = k_n = |A_{n2}A_{n4}|$ köşegenine ait şu tablo çıkar karşımıza:

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ... |
|-------|----------------------|---|------------|-------------|---|-------------|---|-------------|----|--------------|-----|
| k_n | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | $\sqrt{2}$ | $2\sqrt{2}$ | 4 | $4\sqrt{2}$ | 8 | $8\sqrt{2}$ | 16 | $16\sqrt{2}$ | ... |

Tablo 3.1. Geometrik serideki karelerin köşegen uzunlukları. Bkz. “[Proof of the Irrationality of the Square Root of 2 Contained in Babylonian Geometry Problem Tablets](#)”.

Şimdi bu tablodan $k_9 = 16\sqrt{2}$ 'yi alır ve **Neugebauer** gibi bir yaklaşımda bulunursak (bkz. “[Mathematical Cuneiform Texts \(Matematiksel Çivi Yazı Metinleri\)](#), 1 Ocak 1945” kitabının 42-43. sayfalarında geçen “[a. Diagonal of a Square](#)” parçasına),

$$(3.93) \quad 22 < 16\sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 16^2} = \sqrt{512} < 23$$

aralığındaki sınırların aritmetik ortalaması bize alt (üst) sınırdan daha iyi bir yaklaşıklık verecektir. Bu matematiksel olarak,

$$(3.94) \quad 16\sqrt{2} > \frac{22 + 23}{2} = \frac{45}{2} = 22;30$$

demektir. Burada dikkat ederseniz 2 ve 45 düzgün sayılardır (ki tersleri de 60 tabanında sonludurlar), dolayısıyla $22;30$ da bir düzgün sayıdır.

O halde bu eşitsizlikte $\sqrt{2}$ için her iki tarafı 16'ya bölersek,

$$(3.95) \quad \sqrt{2} > \frac{22;30}{16} = 1;24,22,30$$

şeklinde bir ilk yaklaşım elde ederiz. Ama dikkat ediniz, burada da 16 ve $22;30$ düzgün sayılar olduklarından $1;24,22,30$ da düzgün bir sayıdır!

Yine **Neugebauer**'e göre bu eşitsizlikten $\sqrt{2}$ 'nin üst sınırını şu şekilde elde ederiz:

Ekler

$$(3.96) \quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 1; 24,22,30 \Rightarrow \sqrt{2} < \frac{2}{1;24,22,30} = 1;25,20.$$

Şu halde (3.95) ve (3.96)'dan $\sqrt{2}$ 'nin aralığını şu şekilde bulmuş oluruz:

$$(3.97) \quad 1;24,22,30 < \sqrt{2} < 1;25,20.$$

Şimdi de (3.94)'te görüldüğü gibi buradaki sınırların aritmetik ortalamasını alırsak,

$$(3.98) \quad \sqrt{2} < \frac{1;24,22,30 + 1;25,20}{2} = \frac{2;49,42,30}{2} = 1;24,51,15$$

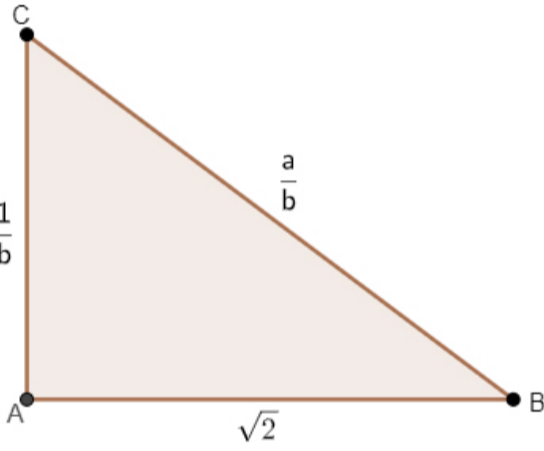
ile bir ikinci üst sınır elde ederiz (Bkz. [14.09.2021, 00:01:04](#)).

[Eleanor Robson](#), makalesinde bu son yaklaşıklardan 2 prosedürde de söz eder ama yeterli bulmaz. O, 2. prosedürde Babil algoritmasına [Heron](#)'un algoritması der (Bkz. "[Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context](#)"). Şaka gibi ama, [Neugebauer](#) de 1928'de öyle diyordu (bkz. [Otto Neugebauer Papers, Box 1](#)) ancak 1945'te düzeltti (Bkz. "[a. Diagonal of a Square](#)").

Şimdi [Robson](#)'un [2. prosedür](#)de elde ettiği sonuçları yakında inceleyelim.

[Robson](#), ilkin [Heron](#)'un algoritmasında, ona göre, yani $\frac{a+N}{2}$ 'de $N = 2$ ve $a = 1;25,20$ 'den (ki bu, (3.96)'daki üst sınırdır) $\frac{2}{a} = 1;24,22,30$ sonucunu elde eder (ki bu, (3.95)'teki alt sınır demektir) ve böylece $\frac{a+2}{2} = 1;24,51,15$ 'e ulaşır (ki bu da (3.98)'deki üst sınırdır). Sonra [Heron](#)'un algoritmasından daha iyi bir yaklaşıklık vereceğini umduğu $a + \frac{1}{2} \cdot \frac{N-a^2}{a}$ 'dan hareketle $1;25,20 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2-1;25,20^2}{1;25,20} = 1;25,20 + 0;0,28,45 = 1;24,51,15$ ile yine aynı sonuca ulaşır. Ama her seferinde (3.98)'deki üst sınırı elde eder ve bu sonuca sevinemez; çünkü bu sonuç tablette verilen değer için yeterli değildir ya da tabletteki $1;24,51,10$ değerine ulaşamaz!

Robson'un İlk Prosedürü İçin Bir Geometrik İteratif Algoritma



Çok ilginç, demek ki kaderde [W. F. Sheppard](#)'a yardım ettiği gibi [Eleanor Robson](#)'a da yardım etmek varmış (Bkz. "[Genelleştirilmiş Ole Amble Algoritması](#)"). Çünkü [Robson](#)'un ilk prosedürde

$$(3.99) \quad \sqrt{2} = \sqrt{a^2 - b} \lesssim a - \frac{b}{2a}$$

yaklaşımından hareketle elde ettiği 2 yaklaşıklardan sonrakileri verememesinin nedeni, a ve b pozitif tam sayıları için

$$(3.100) \quad 1 + 2b^2 = a^2$$

[Pell denkleminin](#) çözümlerini görememesinden kaynaklanır. Çünkü eğer görmüş olsaydı, o zaman bu yolun çıkmaz bir yol olduğunu görecekti!

Öncelikle bu denklemin tüm primitif çözümleri, $\forall n \in \mathbb{N}$ için (a_n, b_n) doğuranlarına göre (ki a_n ve b_n aralarında asal, yani $(a_n, b_n) = 1$ 'dir) şöyledir:

$$(3.101) \quad a_n^2 - 2b_n^2 = 1, b_n = 2a_n b_n, a_n = a_n^2 + 2b_n^2.$$

Eğer bu çözümleri tüm tam sayılara genişletirsek negatif indisli çözümler şu şekilde ortaya çıkar:

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | n |
|----------|--|---|--|---|-----|---|
| a_{-n} | $\frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}}}$ | ... | $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}}}$ |
| b_{-n} | $\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{-2+2\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{-2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$ | $\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{-2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}}$ | $\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{-2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}}}$ | ... | $\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{-2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}}}$ |

Tablo 3.2. Negatif indisli a_{-n} ve b_{-n} çözümleri. Bkz. "[Vieta Formülü](#)".

Bu tabloya göre

$$(3.102) \quad a_{-n} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, b_{-n} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{-2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

sonuçları geçerli olduğundan (3.101)'e göre (3.100)'ün triviyal (açık) çözümü söz konusu olur.

Buna göre eğer başlangıç değerlerini

$$(3.103) \quad a_0 = \sqrt{2}, b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ekler

olarak alırsak, ki bunlar (3.101)'deki ilk denklemden açık bir şekilde görülür, (3.101)'deki 2 ve 3. eşitliklerden $a := a_{n+1}$ ve $b := b_{n+1}$ için

$$(3.104) \quad a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2, b_{n+1} = 2a_nb_n$$

iterasyonları söz konusu olur ve bunlar

$$(3.105) \quad \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2}$$

limitini gerçekler.

Burada sonsuz azalmaya ([descente infinie](#)) göre $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \frac{a_n^2 + 2b_n^2}{2a_nb_n} &= \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \Rightarrow a_n^2 + 2b_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{2}a_nb_n \Rightarrow a_n^4 + 4a_n^2b_n^2 + 4b_n^4 = (a_n^2 + 2b_n^2)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 8a_n^2b_n^2 \\ \Rightarrow (a_n^2 - 2b_n^2)^2 &= a_n^4 - 4a_n^2b_n^2 + 4b_n^4 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow a_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2b_n^2 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \end{aligned}$$

limitlerinden

$$(3.106) \quad \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2}$$

yakınsaması gerçekleşirken,

$$\frac{a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2}{1 = a_n^2 - 2b_n^2} \Rightarrow \frac{a_{n+1} + 1}{b_{n+1}} = \frac{2a_n^2}{2a_nb_n} = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} + \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{b_n}$$

eşitliklerinden de

$$(3.107) \quad \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} + \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{b_n}$$

bağıntısı gerçekleşir.

Çok ilginçtir, şimdi (3.104)&(3.105)'te yaptığım limit hesapları *W. F. Sheppard*'da olduğu gibi "*Babil Algoritmasından Modern Kök Algoritmalarına Doğru 4000 Yıllık Bir Yolculuk*" adlı tezim için 2006'daki antrenmanlarımı hatırlattı bana. Yani bu tür hesapları Babillilerin $\sqrt{2}$ için ve *Arşimet*'in $\sqrt{3}$ için verdiği yaklaşıklıkları iteratif algoritmalarla daha o saatte buluyordum!

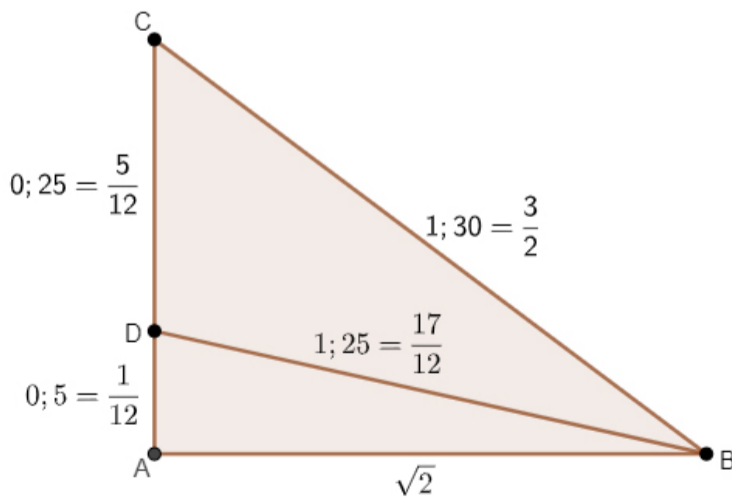
Şimdi *Robson*'un ilk prosedürde (3.99)'dan elde ettiği yaklaşıklıklar için (3.100) denklemini

$$(3.108) \quad \sqrt{2}^2 + \left(\frac{1}{b_n}\right)^2 = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2$$

ya da *Robson*'un prosedürüne göre

$$(3.109) \quad \sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 - \left(\frac{1}{b_n}\right)^2} \approx \frac{a_n}{b_n} - \frac{1}{2a_nb_n}$$

şeklinde ele alır ve $n = 0,1$ için hesap yaparsak (3.103)&(3.104)'ten $(a_0, b_0) = (3,2)$ ve $(a_1, b_1) = (17,12)$ çözümlerini elde ederiz ve bunların şekildeki gösterimi aşağıdaki gibi olur.



Buna göre ilkin $(a_0, b_0) = (3,2)$ çözümlerini (3.109)'da göz önüne alırsak,

$$(3.110) \quad \begin{aligned} \sqrt{2} &= \sqrt{\left(\frac{a_0}{b_0}\right)^2 - \left(\frac{1}{b_0}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1;30^2 - 0;30^2} (= \sqrt{1;30^2 - 0;15}) \\ &\approx \frac{a_0}{b_0} - \frac{1}{2a_0b_0} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3 \times 2} = 1;30 - \frac{5}{60} = 1;30 - 0;5 = 1;25 \end{aligned}$$

şeklinde bir ilk yaklaşıklık elde ederiz. Bu, *Robson*'un ilk prosedürle bulduğu ilk yaklaşıklıktır!

İkinci olarak (3.109)'da $(a_1, b_1) = (17,12)$ çözümlerini göz önüne alırsak,

$$(3.111) \quad \begin{aligned} \sqrt{2} &= \sqrt{\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{b_1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{17}{12}\right)^2 - \left(\frac{1}{12}\right)^2} = \sqrt{1;25^2 - 0;5^2} (= \sqrt{1;25^2 - 0;00,25}) \approx \frac{a_1}{b_1} - \frac{1}{2a_1b_1} \\ &= \frac{17}{12} - \frac{1}{2 \times 17 \times 12} < \frac{17}{12} - \frac{1}{2 \times 18 \times 12} \end{aligned}$$

şeklinde bir ikinci yaklaşıklık elde ederiz ki *Robson*, 17'nin tersini alarak (ki M 10'da daha kötü bir şekilde verildiğini gördüğümüz halde) 1; 24,51,10,35,17 ... yaklaşıklık-lığını verir!

Peki **Robson**'a göre aynı prosedüre devam etseydik, 3. çözümde hangi yaklaşıklıkla ulaşacaktık?

$(a_2, b_2) = (577, 408)$ için (3.109)'dan şu yaklaşıklıkla bulacaktık:

$$(3.112) \quad \sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{b_2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{577}{408}\right)^2 - \left(\frac{1}{408}\right)^2} \approx \frac{a_2}{b_2} - \frac{1}{2a_2b_2} = \frac{577}{408} - \frac{1}{2 \times 577 \times 408} < \frac{577}{405} - \frac{1}{2 \times 576 \times 405} = 1; 25, 28, 52, 52, 13, 20$$

Yani daha iyi bir yaklaşıklık bulacağımıza, 2.'sinden bile daha kötü bir yaklaşıklık elde etmiş olurduk!

Şimdi **Robson**'un aradığı şey için bir 3. prosedür verebilirim.

3. Prosedür. (3.108)'e göre

$$\sqrt{2}^2 - \left(\frac{1}{b_n}\right)^2 < \sqrt{2}^2 < \sqrt{2}^2 + \left(\frac{1}{b_n}\right)^2 = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2$$

eşitsizliklerinden hareketle $\sqrt{2}$ 'nin aralığını şu şekilde verebiliriz:

$$(3.113) \quad \frac{a_n^2 - 2}{a_n - \frac{2}{2a_n - \frac{2}{\vdots}}} \cdot \frac{1}{b_n} < \frac{\sqrt{a_n^2 - 2}}{b_n} = \sqrt{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{b_n}\right)^2} = \sqrt{2 - \left(\frac{1}{b_n}\right)^2} < \sqrt{2} < \sqrt{2 + \left(\frac{1}{b_n}\right)^2} = \frac{a_n}{b_n}$$

Buna göre $(a_0, b_0) = (3, 2)$ için

$$(3.114) \quad 1; 18, 45 = \frac{7}{2} \cdot \frac{48}{128} < \frac{7}{2} \cdot \frac{48}{127} = \frac{7}{127} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3^2 - 2}{2 \times 3 - \frac{2}{2 \times 3}} \times 0; 30 < 0; 30\sqrt{3^2 - 2} = \sqrt{1; 30^2 - 2 \times 0; 30^2} = \sqrt{2 - 0; 30^2} = \sqrt{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \left(\frac{1}{b_0}\right)^2} < \sqrt{2} < \sqrt{2 + \left(\frac{1}{b_0}\right)^2} = \sqrt{2 + 0; 30^2} = \sqrt{2 + 0; 15} = \sqrt{2; 15} = 1; 30$$

sınırlarının aritmetik ortalamasından

$$(3.115) \quad 1; 24, 22, 30 = \frac{2; 48, 45}{2} = \frac{1; 18, 45 + 1; 30}{2} < \sqrt{2}$$

yaklaşıklıkla elde ederiz. Bu yaklaşıklık (3.95)'te geçmişti!

İkinci olarak $(a_1, b_1) = (17, 12)$ için

$$(3.116) \quad 1; 24, 42, 17, 30 = \frac{4879}{3456} = \frac{2810304}{165888} \cdot \frac{1}{12} < \frac{2810304}{165887} \cdot \frac{5}{60} = \frac{17^2 - 2}{2 \times 17 - \frac{2}{2 \times 17}} \times 0; 30 < 0; 5\sqrt{17^2 - 2} = \sqrt{1; 25^2 - 2 \times 0; 5^2} = \sqrt{2 - 0; 5^2} = \sqrt{2 - \left(\frac{1}{12}\right)^2} = \sqrt{2 - \left(\frac{1}{b_1}\right)^2} < \sqrt{2} < \sqrt{2 + \left(\frac{1}{b_1}\right)^2} = \sqrt{2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2} = \sqrt{2 + 0; 5^2} = \sqrt{2 + 0; 0,25} = \sqrt{2; 0,25} = 1; 25$$

sınırlarının aritmetik ortalamasından (3.115)'tekinden daha iyi bir yaklaşıklık elde ederiz:

$$(3.117) \quad 1; 24, 51, 8, 45 = \frac{2; 49, 42, 17, 30}{2} = \frac{1; 24, 42, 17, 30 + 1; 25}{2} < \sqrt{2}$$

Bu yaklaşıklık (3.98)'dekinden daha iyidir ama YBC 7289'daki için yeterli değildir!

Üçüncü olarak $(a_2, b_2) = (577, 408)$ için

$$(3.118) \quad \frac{a_2^2 - 2}{a_2 - \frac{2}{2a_2 - \frac{2}{\vdots}}} \cdot \frac{1}{b_2} < \frac{\sqrt{a_2^2 - 2}}{b_2} = \sqrt{\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{b_2}\right)^2} = \sqrt{2 - \left(\frac{1}{b_2}\right)^2} < \sqrt{2} < \sqrt{2 + \left(\frac{1}{b_2}\right)^2} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{577}{408} < \frac{577}{405} = 1; 25, 28, 53, 20$$

Ekler

sınırlarından üst sınır kötü bir yaklaşıklık olduğundan alt sınırı hesaplamaya gerek kalmaz! (Y.N. Buradaki alt sınır yaklaşım formülü, Resim 3.1'deki tezimde geçen Babilonya Algoritması'nın genelleştirilmesi sırasında 2007'deyken elde ettiğim bir yaklaşım formülüydü!)

Fakat eğer (3.98)'den (3.113)'e göre işleme devam etseydik, $1; 24,51,15^2 - 2 = 0; 00,28,45^2$ için (ki (3.97)&(3.98)'den $1; 24,51,15 - 0; 00,28,45 = 1; 24,22,30$ olduğu açıktır)

$$(3.119) \quad 1; 24,51,05,15,31,21,50,09,22,30 = 1,7,52; 52,12,25,05,28,07,30 \times 0; 00,01,15 = \frac{4073^2 - 2 \times 23^2}{4073 - \frac{2 \times 23^2}{2 \times 4073}} \times 0; 00,01,15 < \\ \sqrt{1,7,53^2 - 2 \times 23^2} \times 0; 00,01,15 = \sqrt{1; 24,51,15^2 - 2 \times 0; 00,28,45^2} = \sqrt{2 - 0; 00,28,45^2} < \sqrt{2} < \\ \sqrt{2 + 0; 00,28,45^2} = 1; 24,51,15$$

sınırlarının aritmetik ortalamasından YBC 7289 no'lu tabletteki yaklaşıklıkla şöyle bulmuş olacaktık (Bkz. [14.09.2021, 17:04:43](#)):

$$(3.120) \quad \frac{1; 24,51,10}{\text{YBC 7289}} < 1; 24,51,10,07,45,40,55,04,41,15 = \frac{2; 49,42,20,15,31,21,50,09,22,30}{2} = \frac{1; 24,51,05,15,31,21,50,09,22,30 + 1; 24,51,15}{2} < \sqrt{2}.$$

Ve fakat, kapağı Resim 3.1'de görülen tezime göre kâtibin bu son sonucu onaylaması gerekiyordu, yani bir sonraki hesapta tekrar aynı sonuca ulaşması gerekiyordu. Bu ise YBC 7289'da $\sqrt{2}$ için verilen $1; 24,51,10$ yaklaşıklıkla bulunmasının yöntemden çok, hesaplanış şeklinde ortaya çıktığını gösterir bize. Öyle ya, kâtip [Rawlinson](#) gibi bu sonucun doğru olduğunu nereden bilebilecekti? Tabletteki $1; 24,51,10$ 'un Asur Kralı [1. Tiglath-Pilaser](#)'in stelasındaki gibi onaylanması gerekmiyor muydu? (Bkz. "[Tanrılar, Mezarlar ve Bilginler](#)". Kitap için [suraya](#) bakınız. Tarihçimiz [Cengiz Özakıncı](#)'nın okuduğu sayfalar Şubat 2015'teki 10. baskısında 178-179. sayfalar olarak görülür. Fakat bu yeni basımda [Cengiz Özakıncı](#)'nın da dikkat çektiği gibi parantez içindeki hata düzeltilmiştir (ki bu hatanın kasıtlı olarak yapılmış olduğuna inanıyorum): "Fakat 1857'de Londra'da 'Asur Kralı Tiglath-Pileser'in Rawlinson, Talbot, Dr. Hincks ve Oppert'ce çevrilen bir yazıtı' yayınlanabildi. Bu, bilimin hedeflerine, bütün zorluklara karşın, ayrı ayrı yollardan fakat bütünüyle birbirine uygun olarak varılabileceğinin en parlak ve inandırıcı (1986 basımında 'kandırıcı') kanıtıydı"). Buna göre hangi yöntemi kullanırsanız kullanın, $1; 24,51,10$ 'u bulduktan sonra bunun tüm basamaklarının doğru olduğunu bir sonraki yaklaşımda da onaylamanız gerekir!

Araştırması nedeniyle şehrimizi şereflendiren Dr. [Mansfield](#)'e saygılarımızla.



Resim 3.4. İstanbul Arkeoloji Müzesi'ndeki [Si.427 no'lu tablet](#) için [2019 Haziran](#)'ında İstanbul'a gelen Dr. [Daniel Mansfield](#).

D. PAMUKTULAM