



1. Albüm: *Arşimet'in Metodu MV-Türk & Yunan Metodu Versiyon 1.0, Mathquake, 2001-2004*

14. Derya PAMUKTULUM, 1000'lerce Yıllık Tecrübe Işığında

Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

&

ONAYLANDI

Derya PAMUKTULUM 01:52, 16.7.23

ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

- Resim <http://mathquake.wtcsites.com> sitesindeki **A New Version: Problem solving with ATA formula according to Cayley-Menger determinants for tetrahedrons in the mini album: ATA formulas for the area of a simple polygon in a multidimensional space, 2004 & the 2'nd album: ATA Polygons, 2005 by Mathquake, 12.05.2004** çalışmasından alınmıştır.
- MathQuake logosu Büyük Piramit'teki π 'yi veren çalışmadan elde edilmiştir.

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Önsöz

1000'lerce Yıllık Tarihin Derinliğinden Gelen Ses



“Tarih yazmak, tarih yapmak kadar önemlidir. Yazan yapana sadık kalmazsa değişmeyen hakikat, insanlığı şaşkırtacak bir mahiyet alır”

M. Kemal ATATÜRK, 1931.

*“Büyük Giza Piramiti'ndeki π gizemini araştırırken ATA'nın Tarih hakkındaki sözü çalışmayı şekillendirdi diyebilirim. Çünkü **'olaylar daima bize gösterildiği gibi değildir, her olayın gerçek bir görüntüsü vardır. Önemli olan bir olayın gerçek görüntüsü ne ise, onu ortaya çıkarmaktır'** düşüncesinden hareketle uyanıklığım sayesinde π gizemini çözdüm ve aynı düşünceyle imkânsız gibi görünen bir şeyin içinde π 'yi sorgulayarak çalışmayı tamamladım. Bu ise adeta **'Ölümden sonra yaşam var mı?'** diye sormak gibidir. Ölünce anlarsınız.”*

Mathquake, 27.09.2004 04:23.

D. PAMUKTULUM

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Büyük Piramit'teki π İçin Görüşler

Büyük Giza Piramidi, yapısında var olan ilginç bir ilişkiye sahiptir: Bir kenarının uzunluğunun yüksekliğine oranı $11/7$ 'dir. Eski Mısır uygarlığını araştıranlar ve mistik görünüşü benimseyenler yüzyıllar boyu bunun anlamını ve neden böyle olduğunu varsaydılar; çünkü bu yaklaşıklık, eski Mısırlıların bildiği anlaşılabilir π değerinden önemli ölçüde daha iyi idi. Ne var ki, *Herodot*, piramidin her yanal yüzey alanının, bir kenarının uzunluğu, piramidin yüksekliği kadar olan bir karenin alanına eşit olacak şekilde yapıldığını yazmıştı. Bu esaslara göre yapılacak her piramidin otomatik olarak π 'ye yaklaşacağı gösterilebilir.

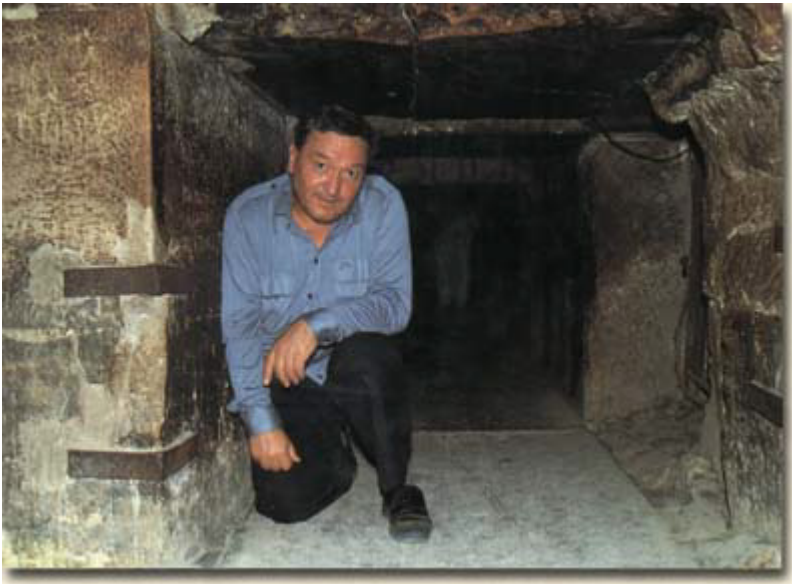
David Blatner, [Pi Coşkusu](#), Pi'nin Tarihi: Erken Dönem, Sayfa 13.

David Blatner'in son cümlesi *Mathquake'den Tarihi Bir Restorasyon Çalışması Daha: Piramitlerdeki Pi Sayısının Sırrı*, Mathquake, 08.07.2004 22:09 Giriş Çalışması'nda da olduğu gibi bir gerçeğin altını çizmektedir. Çünkü dünyadaki bütün piramitler incelenirse, π ile ilişkilendirilmiş birçok piramit olduğunu görürüz ki bu, gizem olmaktan çok matematikle ilgilidir. Bu tür piramitlerin (π Piramitleri) başında *Büyük Giza Piramidi* gelmektedir.

Mathquake Büyük Giza Piramidi'ndeki π İçin Uzun Yürüşte

5 Temmuz 2004'te *Gıyasüddin Cemşid Mesut El-Kaşi*'nin "*Risate fi Muhit-ül Daire (Treatise on the Circumference of the Circle, Daire Çevresi Üzerine Bilimsel İnceleme), Temmuz-1424*" çalışmasının 580. yılı nedeniyle İstanbul'da el yazmaları olan bazı kütüphaneleri aradım. Çünkü yabancı kaynaklara göre de bu çalışmanın İstanbul'daki bazı kütüphanelerde olduğu belirtiliyordu. Bu çalışma için daha önceden "*Pi Kronolojisi'ne Giren İlk ve Tek Türk Matematikçi Gıyasüddin Cemşid Mesut El-Kaşi'yi Çalışmasının 579. yıldönümünde Anıyoruz, 13 Temmuz 2003 01:48*"de bir yayın yapmıştım ama bu sefer *el Kaşi*'nin çalışmasını *Arşimet*'inki gibi bugünkü neslin anlayabileceği şekilde ve mümkünse daha iyi bir sunumla tanıtmaktı.

Maalesef *el Kaşi*'nin çalışmasını tüm aramalarım rağmen bulamadım, ama yine de ümidimi kesmeyerek son bir kez internette derin bir taramayla aradım. Tabii ki internette π ile ilgili bir arama yaptığım için konuyla ilgili olmayan kaynaklar da giriyordu araya. Bunlardan biri de *Erich von Däniken*'in sitesiydi: <http://www.daeniken.com>.



Bu sitenin girişinde "*Erich von Däniken on Expedition (Khufu Pyramid, Giza, Egypt)*" başlığı ve bu başlığın üstündeki (yandaki) resim oldukça dikkatimi çekmişti. Çünkü bu resim *Erich von Däniken*'i şimdiki haline göre çok daha genç gösteriyordu ve ilk kitabı *Tanrıların Arabaları (Chariots of the Gods, 1968)*'dan bu yana 26 kitabındaki teorilerini kanıtlamak için yaşam kadar za-

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Büyük Piramit'teki π İçin Görüşler

man harcamıştı!

Gizemlerin ustası **Erich von Däniken** Büyük Piramit'teki matematiksel gizemler hakkındaki görüşleri ve bulgularını espirili bir şekilde şöyle dile getirir: “*Rastlantı mı? Öyle olsa gerek. Aksi halde, eski Mısırlıların, ekvatordaki devir hızını bildiklerini ve hesaplarına saniyeyi ölçü olarak aldıklarını varsaymamız lazım gelir. İşin asıl şaşırtıcı yanı, rastlantıların tek tek karşımıza çıkmayıp dev bir küll oluşturmalarıdır. Matematik konusunda çok usta bir tanıdığım (ünlü piromitolog Charles Piazzi Smyth), Büyük Piramit ile ilgili tartışmalı verileri bir broşürde (Dur Inheritance in the Great Pyramid (Büyük Piramit'teki Mirasımız), 1864) yayınlamıştı. Şöyle ki:*

1. Taban çevresinin, yüksekliğinin 2 katına bölünmesinin $\pi = 3.14$ sayısını vermesi bir rastlantı mıdır?

Erich von Däniken, [Tanruların Arabaları \(Chariots of the Gods\)](#), 1968, 70. Baskı, Bölüm 7: Piramitler neden bugün durdukları yerde inşa edildi?, Sayfa: 82.

Teorem 1: Kare tabanlı Büyük piramitin tabanına ait bir kenarının uzunluğunun 2 katının yüksekliğine oranı $\pi = 3.14$.

2. Giza'nın 3 piramiti aralarında bir Pisagor üçgeni oluşturacak biçimde düzenlenmişlerdir. Bu üçgenin kenarlarının birbirlerine göre orantısı 3:4:5'dir.

Erich von Däniken, [Sfenks'in Gözleri \(Die Augender Sphinx\), Nil'in kıyısındaki eski ülkeye yöneltilmiş yeni sorular](#), 1989, 2. Baskı, Bölüm 3: Adı Olmayan Dünya Harikası, Raslantılar Daima İşin İçinde, Sayfa: 152.

Teorem 2: Giza piramitleri (3,4,5) Pisagor üçgeni düzenindedir.

3. Piramitin yüksekliğiyle çevresi arasındaki oran bir dairenin yarıçapıyla çevresi arasındaki oranın dengidir. Dört kenarlar dünyanın en büyük ve en çarpıcı üçgenleridir.

Erich von Däniken, [Sfenks'in Gözleri \(Die Augender Sphinx\), Nil'in kıyısındaki eski ülkeye yöneltilmiş yeni sorular](#), 1989, 2. Baskı, Bölüm 3: Adı Olmayan Dünya Harikası, Raslantılar Daima İşin İçinde, Sayfa: 152.

Teorem 3: Piramitin çevresi ve yüksekliği arasındaki oran, dairenin çevresi ve yarıçapı arasındaki orana eşittir.

π 'nin Büyük piramitin inşasında bir rol oynadığına inanıyorsanız, piramitin tabanının çevresinin yarısı ve yüksekliği arasındaki oran dairenin çevresinin çapına oranına eşittir. Bu yüzden tabanın çevresi ve yüksekliği arasındaki oran dairenin çevresi ve yarıçapı arasındaki ilişkiyi göstermeli. Orada sır yok veya...?

4. Piramitle hem kürenin hacmi hem de dairenin yüzeyi hesaplanabiliyor.

Erich von Däniken, [Sfenks'in Gözleri \(Die Augender Sphinx\), Nil'in kıyısındaki eski ülkeye yöneltilmiş yeni sorular](#), 1989, 2. Baskı, Bölüm 3: Adı Olmayan Dünya Harikası, Raslantılar Daima İşin İçinde, Sayfa: 152.

Teorem 4: Büyük Piramit'in alanı ve hacmi sırasıyla dairenin alanı ve kürenin hacmi ile orantılıdır.

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Büyük Piramit'teki π İçin Görüşler

5. Piramitin herbir yanal yüzünün yüzölçümü piramit yüksekliğinin karesine eşittir (M.Ö. 450 civarında, Herodotus).

Erich von Däniken, [Sfenks'in Gözleri \(Die Augender Sphinx\), Nil'in kıyısındaki eski ülkeye yöneltilmiş yeni sorular](#), 1989, 2. Baskı, Bölüm 3: Adı Olmayan Dünya Harikası, Raslantılar Daima İşin İçinde, Sayfa: 152.

Teorem 5: Büyük piramitin herbir yanal yüzünün alanı, yüksekliği üzerindeki karenin alanına yaklaşıktır.

Bu matematik ve geometrik raslantılar sıralaması alabildiğince uzatılabilir. Keskin zekalı düşünürler bu konuda kalın ciltler kaleme almışlar, bunlar, aynı derecede keskin zekalı başkaları tarafından çürütülmüştür. Piramitlerde (ya da başka antik eserlerde) matematik denklik arayanlar bundan sonsuz sayıda örnekler bulacaklardır. Şimdi başında oturduğum yazı masasıyla kozmik mikyaslar arasında şöyle ya da böyle bir bağlantı vardır. Keops piramitinden garip sayılar çıkaran rakam sihirbazları ve matematikçiler bu yüzden ciddiye alınmayacaklar mı?"

Bu konuda bir yandan 2002 Ağustos'unda yaklaşık 1 ay süren *Arşimet*'in "**Daire Çevresi Ölçmesi, Önerme 3**" (D. PAMUK TULUM, **Daire Çevresi Ölçmesi, Önerme 3: Türk-Yunan Dostluğu 2002 için Yeni Bir Versiyon, 1. Albüm: Arşimet'in Metodu MV-Türk-Yunan Metodu Ver. 1.0, The Mathquake, 31.08.2002**)" çalışmasını orijinalliğini muhafaza ederek yeniden yorumlarken, diğer yandan da bu problemin yanıtı için kafamda gizli bir antreman yapıyormuşum da farkında değilmişim. Bu gerçeğe ancak 8 Temmuz 2004, 13:00'da ulaştım. Bunun için

Mathquake'den Tarihi Bir Restorasyon Çalışması Daha: Piramitlerdeki Pi Sayısının Sırrı, (<http://mathquake.wtcsites.com/index.htm>), 08.07.2004 22:09

Giriş Çalışması'nı yaptıktan sonra

Bir Matematikçinin Savunması (<http://mathquake.wtcsites.com/arsiv/1/index.html>), 13 Temmuz 2004 13:00

Açılış Çalışması'nda bu gerçeği açıkladım. Böylece nasıl ki M.Ö. 550 civarında Yahudiler tarafından derlenen İncil'in Eski Ahit'in Krallar Bölümü 7:23 suresinde π 'nin değeri 3 olarak geçmesi İncil'in sahte olduğunu gösteriyorsa, bu çalışma da bize şimdiye hiç farkedilmemiş bir gerçeği göstermektedir.

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Hemon'un Başyapıtı (Büyük Piramit) ve π Sayısı

“Bilinmeyeni çözmeye çalışmak evrensel bir tutkudur”

Erich von Däniken, *Sfenks'in Gözleri (Die Augender Sphinx), Nil'in kıyısındaki eski ülkeye yöneltilmiş yeni sorular*, 1989, 2. Baskı, Bölüm 3: Adı Olmayan Dünya Harikası, Büyük Suskunluk, Sayfa: 157.

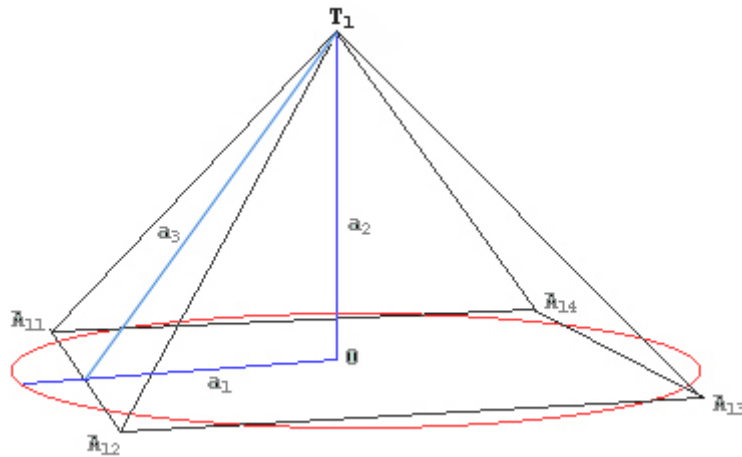
Baş (Büyük) firavun **Khufu** (M.Ö. 2589 – 2566, Eski İmparatorluk, 4. Sülale), daha çok Yunanca **Keops** ismiyle tanınan **Sneferu**'nun oğlu ve halefi, mimar **Hemon**'a (**Hamon**, **Hemiu-nu**) (**Sneferu**'nun torunu oğlu, **Khufu**'nun kuzeni) yeni bir piramit planlamak için sordu. Sözü edilen bu yapı **Hemon**'un başyapıtı idi: **Khufu**'nun (**Keops**) **Piramiti (Büyük Piramit)**.

Hemon'un kare tabanlı Büyük Piramit için bulduğu çözüm şu:



Boyutlar	Eski Mısır Ölçüleri	Günümüzdeki Ölçüler
Taban	$2a_1 = 440$ RC (Royal Cubit)	230.38 M (Metre)
Yükseklik	$a_2 = 280$ RC	146.6 M
Yanal yüzeydeki tabana ait yükseklik	$a_3 \cong 356$ RC	186.4 M
Köşe	$\sqrt{a_1^2 + a_3^2} \cong 418$ RC	218.86 M
Eğim	$\text{Seked}(\alpha_2) = 7 \cdot \frac{a_1}{a_2} = 5 \frac{1}{2}$	$\alpha_2 \cong 51^\circ 50' 34''$

İşte bu verilere göre,



BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Hemon'un Başyapıtı (Büyük Piramit) ve π Sayısı

$$\pi \cong \frac{4a_1}{a_2} = \frac{4 \times 220}{280} = \frac{22}{7} = 3,14(2857142857)$$

sonucuna derhal ulaşılması günümüz bilim adamlarını şaşkına çevirmiştir. Çünkü Eski Mısırlılar π için bu derecedeki yaklaşık bir değeri deneysel bir yolla ya da kaba tahminlerle bulmuş olamazlardı! Aslında dairenin çevresinin karenin çevresine çok yakın olması bunu açık bir şekilde ifade etmektedir. Fakat bu soru şimdiye kadar hep yanıtız kalmıştı. Çünkü bu konuda herhangi bir aydınlatıcı ipucu ile karşılaşılmamıştı!

Şu bulgunun elimizdeki tek ipucu olduğu söylenebilir:

Bulgu: 52 derecelik açı piramit inşaatçıları için dairenin kare haline getirilmesine ilişkin “*Kutsal Geometri*” probleminin çözümünü sağlayan bir unsur olmuştur. Bu eğimde, yani 51 derece 50 dakikalık bir açıda yapılmış bir piramitin yüksekliği ile tabandaki çevre uzunluğu arasındaki oran, bir dairenin yarıçapı ile çevresi arasındaki orana yaklaşıktır. Bu sonuçla Büyük Giza piramitinin inşasında $\pi = \frac{22}{7}$ değerinin kullanılmış olması günümüz bilim adamlarının şaşırtıcı bulduğu bir gerçektir.

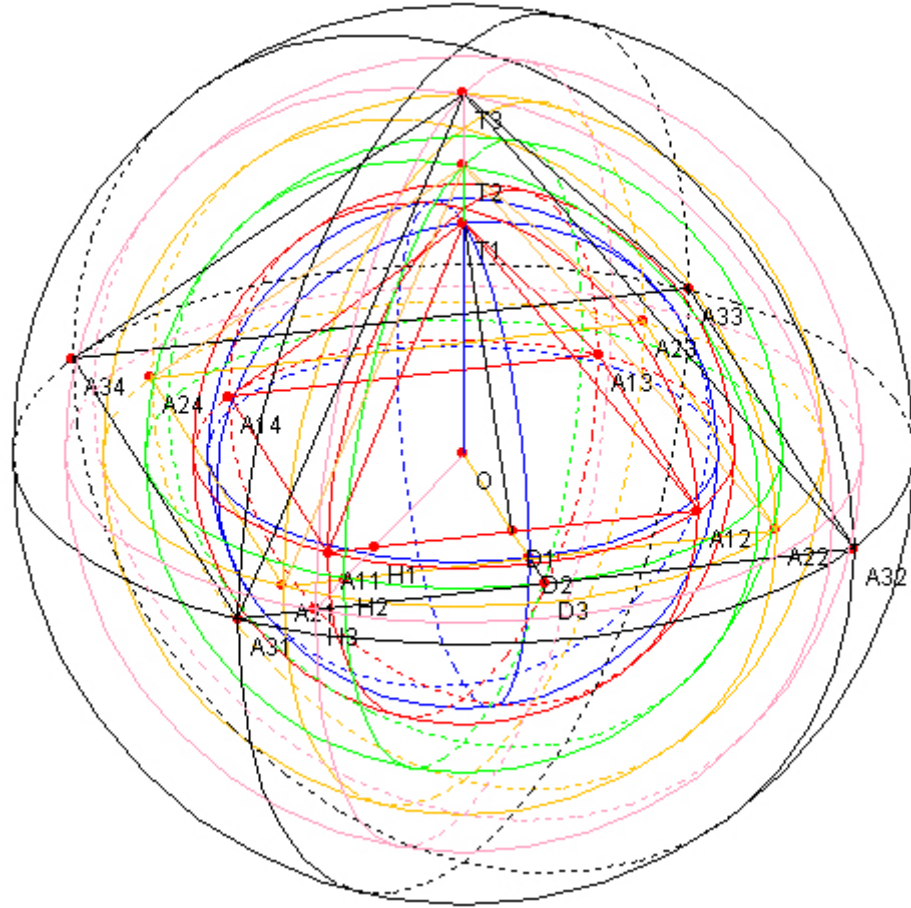
Gerçekten de bu sonuç tıpkı **Fermat'ın Son Teoremi**'ndeki gibi görünüşte basit ve derhal çözüme ulaşılmasına rağmen matematiksel olarak pek ikna edici değil. Onun için bu sonucu en doğru bir şekilde açıklayabilmek, ancak derin matematiksel düşünceleri ortaya koyabilmekle mümkün olur ama ne yazık ki Eski Metotlar da bilinmediği için şu anda bu mümkün görünmemektedir!

Şimdi **Bölüm 1**'de Büyük Giza piramitindeki günümüz bilim adamlarını şaşkına çeviren bu sonucu ilk defa 1586'da Alman matematikçi **Ludolph van Ceulen**'nin dairenin çevresini karenin çevresine eşit alarak π için bulduğu değeri de veren yepyeni bir geometrik çalışma içinde bulacaksınız. Ayrıca bu çalışmadan hareketle genel olarak tabanı düzgün n-kenarlı bir çokgen olan piramit için π sayısını araştırılabilirsiniz!

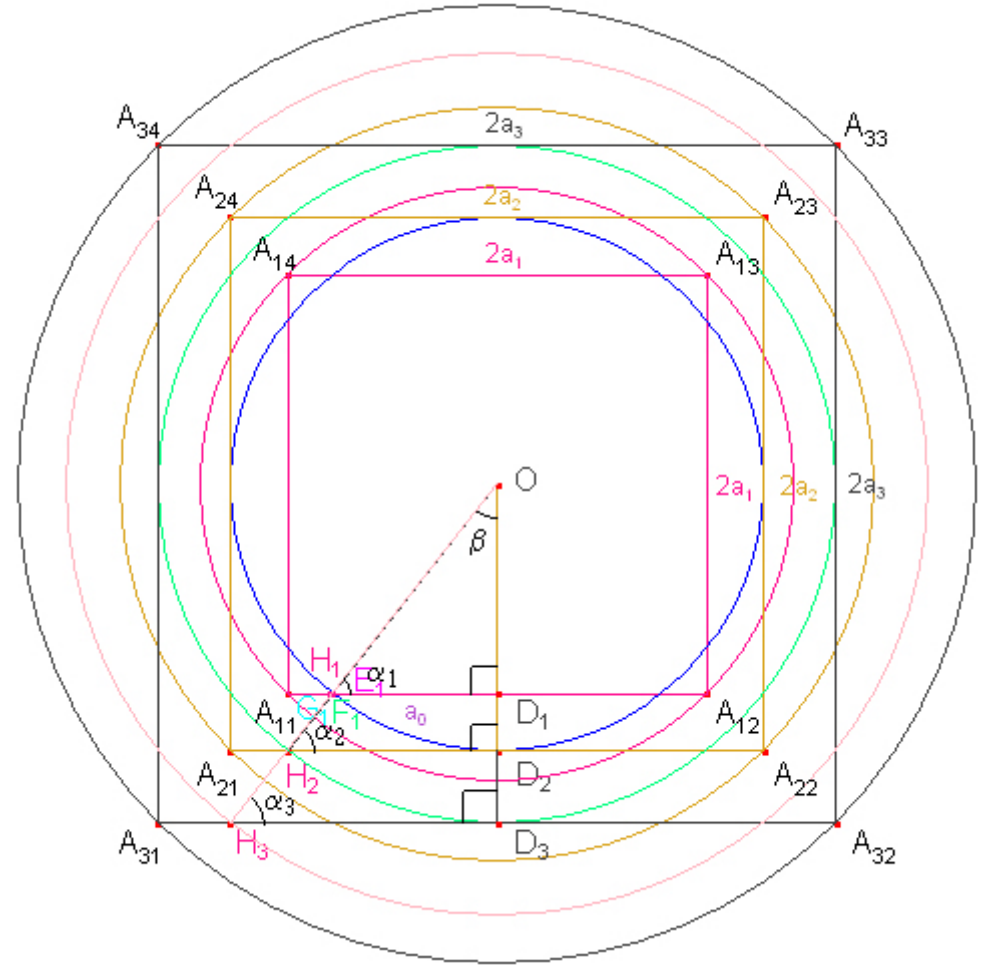
BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Hemon'un Genelleştirilmiş Metodu

Büyük Piramit'ten Altın Piramit'e Doğru



Şekil 1



Şekil 2

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu

Şekil 2'ye (Şekil 1) göre $A_{11}A_{14} \cap A_{21}A_{22} = \{H_2\}$ noktasının O noktasıyla birleştirilmesiyle $A_{11}D_1 \cap OH_2 = \{E_1\}$ (Pembe renkli nokta), $[OH_2] \cap \{\text{Mavi Renkli Çember}\} = \{F_1\}$ (Açık Yeşil renkli nokta) ve $\{\text{Mavi Renkli Çember}\} \cap [A_{11}D_1] = \{G_1\}$ (Açık Deniz Mavisini renkli nokta) noktaları birbirine çok yakın olduğu olduğundan bu 3 noktaya yakın öyle bir H_1 noktası vardır ki,

$$|D_1H_1| \cong |D_1E_1| = a_0, |OH_1| \cong |OF_1| = a_2 = |OG_1|$$

yaklaşımları geçerli olur.

Bu kez $A_{21}A_{24} \cap A_{31}A_{32} = \{H_3\}$ noktası O noktasıyla birleştirildiğinde $A_{11}D_1 \cap OH_3 = \{E_1^{(1)}\}$ ve $[OH_3] \cap \{\text{Mavi Renkli Çember}\} = \{F_1^{(1)}\}$ noktalarının birbirine çok yakın olması nedeniyle

$$|D_1H_1| \cong |D_1E_1^{(1)}| = a_0, |OH_1| \cong |OF_1^{(1)}| = a_2$$

ve $A_{21}D_2 \cap OH_3 = \{E_2\}$, $[OH_3] \cap \{\text{Yeşil Renkli Çember}\} = \{F_2\}$, $\{\text{Yeşil Renkli Çember}\} \cap [A_{21}D_2] = \{G_2\}$ noktaları da birbirine çok yakın olduğu olduğundan

$$|D_2H_2| \cong |D_2E_2| = a_1, |OH_2| \cong |OF_2| = a_3 = |OG_2|$$

yaklaşımları geçerli olur.

Sonuçta metot bu şekilde devam ettirildiği takdirde öyle bir H_n noktası vardır ki, $m = 0, 1, \dots, n$ için

$$\begin{aligned} &|OH_{m-1}| \cong |OF_{m-1}| \cong \dots \cong |OF_{m-1}^{(n-m)}| \cong |OG_{m-1}| \cong \dots \cong |OG_{m-1}^{(n-m)}| = a_m \\ &= |D_{m+1}H_{m+1}| \cong |D_{m+1}E_{m+1}| \cong \dots \cong |D_{m+1}E_{m+1}^{(n-m-2)}| \end{aligned}$$

yaklaşımları mevcut olur. Burada $E_{n-1}^{(0)} = E_{n-1}, F_{n-1}^{(0)} = F_{n-1}, G_{n-1}^{(0)} = G_{n-1}$ 'dir.

Not 1 ($E_m^{(n-m-1)}, F_m^{(n-m-1)}, G_m^{(n-m-1)}, H_m$ noktaları hakkında): 2. şekilde Büyük piramitin tabanı olan $A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}$ karesini CM'de 1:4188.8 (RC (Royal Cubits)'de 1:80) ölçeğinde *Cabri Geometry II Plus PC, Version 1.2.5, Cabrilog, 2001-2004* programıyla düzleme aktardığımda, elde edilen şeklin çözünürlüğünü maksimum seviyeye çıkarmama rağmen E_1, F_1, G_1, H_1 noktaları tek nokta olarak görülmüştü ki, bu durum E_1, F_1, G_1, H_1 noktalarının birbirine çok yakın olmasından kaynaklanıyordu!

Gerçekten de gerekli hesaplar yapılırsa E_1, F_1, G_1 noktaları arasındaki uzaklıklar Büyük piramitte

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu

$$|E_1F_1| = 280 - \frac{110}{7}\sqrt{317} RC = 0.2150971965...RC = 11.2624892115...CM$$

$$|F_1G_1| = 280\sqrt{\frac{4438 - 154\sqrt{317} - 55\sqrt{951}}{2219}} RC = 0.2735899839...RC = 14.3251715618...CM$$

$$|G_1E_1| = -\frac{1210}{7} + 100\sqrt{3} RC = 0.3479378997...RC = 18.2180284306...CM$$

ve 2. şekilde

$$|E_1F_1| = 0.0026887149...CM$$

$$|F_1G_1| = 0.0034198747...CM$$

$$|G_1E_1| = 0.0043492237...CM$$

dir.

Benzer şekilde $E_m^{(n-m-1)}, F_m^{(n-m-1)}, G_m^{(n-m-1)}, H_m$ noktaları arasındaki uzaklıklar da hesaplanırsa n değeri arttıkça sıfıra, dolayısıyla birbirlerine yaklaşırlar. O halde biz bu noktaların varlığını aralarındaki uzaklıklar nedeniyle nümerik olarak biliyoruz ama geometrik olarak da görebilmek için çok küçük boyutlarda çalışan geometri programlarına (Cabri Geometry ve diğer bütün geometri programların bu çalışma için yetersiz kaldığı açıktır) ihtiyaç olduğu bir gerçektir.

Sonuçta M.Ö. 450 civarında “*Keops piramitinin her bir yanal yüzünün alanı ile yüksekliği üzerindeki karenin alanı aynıdır*” sözüyle tarihi bir gerçeğe ışık tutan **Herodot**'un sayesinde E_1, F_1, G_1 noktalarını tek bir noktada, H_1 noktasını görürüz. Bu nedenle $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ noktalarına “**Hemon noktaları**” denilebileceği gibi “**Herodot noktaları**” olarak da anabiliriz.

Şu halde $E_m^{(n-m-1)}, F_m^{(n-m-1)}, G_m^{(n-m-1)}$ noktaları arasındaki uzaklıklar nedeniyle H_m noktaları için $\overset{\Delta}{OD}_1H_1 \sim \overset{\Delta}{OD}_2H_2 \sim \overset{\Delta}{OD}_3H_3 \sim \dots \sim \overset{\Delta}{OD}_nH_n$ olduğundan

$$(1) \frac{a_{n-1}}{a_n} \cong \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cong \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

yaklaşımları geçerli olur ve buradan derhal

$$(2) a_{n-2} \cong \frac{a_{n-1}^2}{a_n}, \frac{a_{n-1}a_n}{a_{n+1}}$$

elde edilir ki, a_{n-1}, a_n, a_{n+1} sayıları arasında

$$(3) a_n \cong \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$$

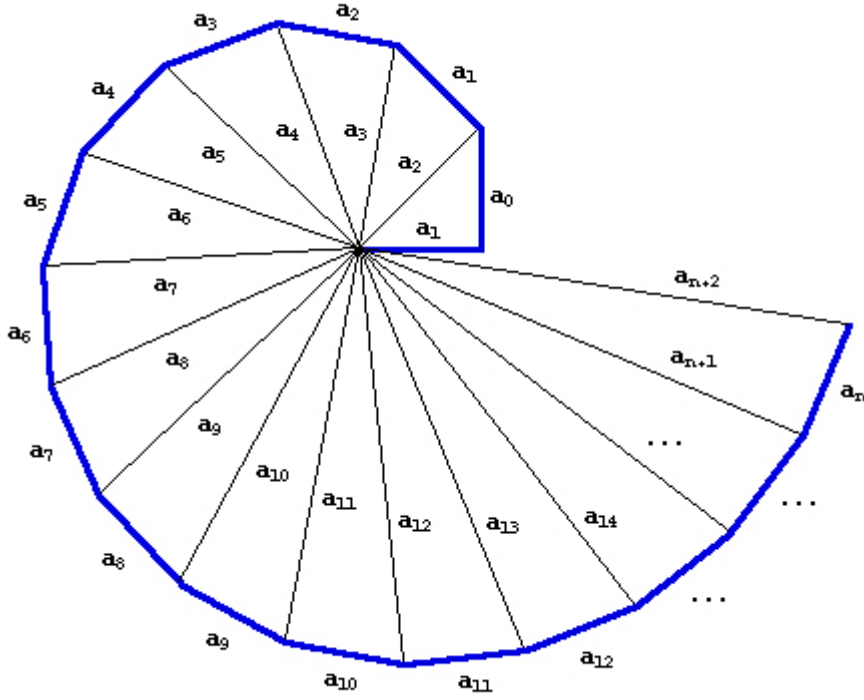
BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu

ilişkisi vardır. Bu ilişkiye göre a_n , a_{n-1} ile a_{n+1} 'in geometrik ortalamasına yaklaşıktır demektir. *Herodot*'un verdiği bilginin tam karşılığı ise bu yaklaşımın eşitlik halidir ki, bu ise ancak n sonsuz için geçerli olur. Bu durumda da *Öklit*'in "*Yükseklik Bağıntısı*" ortaya çıkar.

Hemon'un Dizisi ve Spirali (Tekerleği)

Her n tam sayısı için $OD_n H_n$ dik üçgenindeki Pisagor bağıntısından



$$(4) a_{n-1}^2 + a_n^2 = a_{n+1}^2$$

veya

$$(5) H_n = H_{n-1} + H_{n-2} \quad (H_0 = a_0^2, H_1 = a_1^2, H_n = a_n^2)$$

dizisi (serisi) elde edilir ki, bu dizi *Hemon'un Dizisi* olup *Genelleştirilmiş Fibonacci Dizisi*'nin özel bir halidir. O halde genelleştirilmiş Fibonacci dizisinde geçerli olan bütün özellikler Hemon dizisinde de geçerli olup aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuçlar

Sonuç 1 (Hemon dizisinde başlangıç değerlerinin değiştirilmesi): m ve n tam sayısı için

$$(6) H_n(H_m, H_{m+1}) = H_{n+m}(H_0, H_1)$$

olduğundan

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu

$$(7) a_{n+m}^2 = H_{n+m}(a_0^2, a_1^2) = H_n(a_m^2, a_{m+1}^2)$$

eşitlikleri nedeniyle başlangıç değerleri değiştirilebilir.

Sonuç 2: n tam sayısı için

$$(8) a_{n+1} - a_{n-1} \cong a_{n-3}, a_{n+1} + a_{n-1} \cong a_{n+3}$$

yaklaşımları vardır.

İspat: Bu yaklaşımlar

$$\begin{aligned} (a_{n+1} - a_{n-1})^2 &= a_{n+1}^2 - 2a_{n+1}a_{n-1} + a_{n-1}^2 \stackrel{(3)}{\cong} a_{n+1}^2 - 2a_n^2 + a_{n-1}^2 = (a_{n+1}^2 - a_n^2) - (a_n^2 - a_{n-1}^2) \\ &\stackrel{(4)}{=} a_{n-1}^2 - a_{n-2}^2 \stackrel{(4)}{=} a_{n-3}^2 \Rightarrow a_{n+1} - a_{n-1} \cong a_{n-3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (a_{n+1} + a_{n-1})^2 &= a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}a_{n-1} + a_{n-1}^2 \stackrel{(3)}{\cong} a_{n+1}^2 + 2a_n^2 + a_{n-1}^2 = (a_{n+1}^2 + a_n^2) + (a_n^2 + a_{n-1}^2) \\ &\stackrel{(4)}{=} a_{n+2}^2 + a_{n+1}^2 \stackrel{(4)}{=} a_{n+3}^2 \Rightarrow a_{n+1} + a_{n-1} \cong a_{n+3} \end{aligned}$$

eşitliklerinden kolaylıkla bulunur.

Sonuç 3 (Hemon dizisinde ortalamalar): m ve n tam sayısı için a_{n-3} ile a_{n+3} 'ün genel ortalama formülü

$$(9) g_m(a_{n-3}, a_{n+3}) = \sqrt[m]{\frac{a_{n-3}^m + a_{n+3}^m}{2}}$$

şeklindedir. Bunlardan bazılarına ait yaklaşımlar

$$\begin{aligned} (10) g_{-2}(a_{n-3}, a_{n+3}) &\cong \frac{a_{n-2}^2}{\sqrt{2a_{n+1}^2 - a_{n-2}^2}}, g_{-1}(a_{n-3}, a_{n+3}) \cong \frac{a_{n-2}^2}{a_{n+1}}, g_0(a_{n-3}, a_{n+3}) \cong a_{n-2}, \\ g_1(a_{n-3}, a_{n+3}) &\cong a_{n+1}, (g_1(a_{n-3}, -a_{n+3}) \cong a_{n-1}), g_2(a_{n-3}, a_{n+3}) \cong \sqrt{2a_{n+1}^2 - a_{n-2}^2} \end{aligned}$$

şeklinde verilebilir. Burada g_{-2} 'ye **kareli ters ortalama**, g_{-1} 'e **harmonik ortalama**, g_0 'a **geometrik ortalama**, g_1 'e **aritmetik ortalama** ve g_2 'ye **kareli ortalama** denilmektedir ve genel ortalamaya ait yaklaşım da **Waring özdeşliği**ne göre z_1 ve z_2 herhangi iki karmaşık sayı olmak üzere

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu

$$(11) \quad z_1^m + z_2^m = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^k d_{k,m} (z_1 z_2)^k (z_1 + z_2)^{m-2k}$$
$$d_{k,m} = \binom{m-k}{k} + \binom{m-k-1}{k-1}$$

olduğundan

$$(12) \quad g_m(a_{n-3}, a_{n+3}) \cong \sqrt[m]{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^k 2^{m-2k-1} d_{k,m} a_{n-2}^{2k} a_{n+1}^{m-2k}}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuçta bu ortalamalar arasında

$$(13) \quad a_{n-3} \leq \dots \leq g_{-2} \leq g_{-1} \leq g_0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq a_{n+3}$$

eşitsizlikleri geçerli olur.

Sonuç 4 (Hemon dizisinin indirgeme formülü ve çözüm formülü): Genelleştirilmiş Fibonacci dizisinde geçerli olan bütün özellikler Hemon dizisinde de geçerli olduğundan (5)'teki diziyeye ait indirgeme formülü

$$(14) \quad a_n^2 = F_{n-1} a_0^2 + F_n a_1^2$$

ve genel çözüm formülü de

$$(15) \quad a_n^2 = \frac{\phi^{n-1} (a_0^2 + \phi a_1^2) - (-\phi)^{-(n-1)} (a_0^2 - \phi^{-1} a_1^2)}{\sqrt{5}}$$

şeklindedir. Burada ϕ sayısı altın oranı temsil etmektedir, yani

$$(16) \quad \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Sonuç 5 (Altın oranla ilgili Hemon spiralinde yaklaşımlar ve limitler): Altın oran için Hemon spiralinde

$$a_n^2 \cong a_{n-1} a_{n+1} \Rightarrow a_n^4 \cong a_{n-1}^2 a_{n+1}^2 \stackrel{(4)}{=} a_{n-1}^2 (a_{n-1}^2 + a_n^2) = a_{n-1}^4 + a_{n-1}^2 a_n^2$$

olduğundan

$$(17) \quad a_n^4 - a_{n-1}^2 a_n^2 - a_{n-1}^4 \cong 0$$

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu

yaklaşımı elde edilir.

Benzer şekilde

$$a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 \stackrel{(4)}{=} a_n^2 \cong a_{n-1} a_{n+1}$$

olduğundan

$$(18) \quad a_{n+1}^2 - a_{n-1} a_{n+1} - a_{n-1}^2 \cong 0$$

bir ikinci yaklaşım daha mevcut olur.

Şu halde (17)&(18)'den

$$(19) \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \cong \sqrt{\phi}, \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} \cong \phi$$

sonuçları ortaya çıkar ve n sonsuz için limite geçilirse (15)'ten

$$(20) \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\phi}, \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi$$

ve genel olarak da i ve j tam sayıları için

$$(21) \quad \frac{a_{n+i}}{a_{n+j}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\phi}^{i-j}$$

sonucu ortaya çıkar.

Öte yandan Hemon spiralinin uzunluğu ve bu spiralle oluşan kapalı şeklin çevresi ve alanı

$$(22) \quad U_n = a_1 + \sum_{k=0}^n a_k, C_n = U_n + a_{n+2}, A_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k a_{k+1}}{2}$$

için

$$(23) \quad \frac{U_{n+i}}{a_{n+j}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1 + \sqrt{\phi}) \sqrt{\phi}^{i-j+3}, \frac{C_{n+i}}{a_{n+j}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1 + \phi \sqrt{\phi}) \sqrt{\phi}^{i-j+3}, \frac{A_{n+i}}{a_{n+j} a_{n+j+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi^{i-j+2}$$

ve

$$(24) \quad \frac{U_{n+i}}{U_{n+j}}, \frac{C_{n+i}}{C_{n+j}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\phi}^{i-j}, \frac{A_{n+i}}{A_{n+j}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi^{i-j}$$

limitleri vardır.

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu

Sonuç 6 (Pi ve altın oran arasındaki ilişki): Şekil 2'den de görüldüğü üzere her n doğal sayısı için

$$(25) \quad 2\pi a_n \cong 4.2a_{n-1}$$

ilişkisi dairenin çevresinin karenin çevresine yaklaşık olduğunu göstermektedir. Bu bilginin ilk olarak Büyük piramitte verildiği sanılmaktadır, ancak bilimsel olarak açıklanamadığı için π kronolojisinde yer almaz. Çünkü Büyük piramitin tabanına ait bir kenarın uzunluğunun yarısı $a_1 = 220RC$ ve yüksekliği $a_2 = 280RC$ için

$$2\pi a_2 \cong 4.2a_1 \Rightarrow \pi \cong \frac{4a_1}{a_2} = \frac{4 \times 220}{280} = \frac{22}{7}$$

eşitliklerinden

$$(26) \quad \pi \cong \frac{22}{7}$$

sonucuna derhal ulaşılmasını günümüz bilim adamları henüz açıklayabilmiş değiller! Oysa M.Ö. 250 civarında *Siraküzlü Arşimet*, "*Daire Çevresini Ölçmesi*" çalışmasında birim çaplı dairenin içine ve dışına düzgün 6-genler çizerek, kenar sayıları 2'ye bölünen poligonlar ile dairenin çevresini düzgün 6-gen, 12-gen, 24-gen, 48-gen, 96-genler ile ölçmeye çalışmış ve en sonunda dairenin çevresi için

$$(27) \quad \frac{223}{71} = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

çifte eşitsizliğini vermiştir.

Arşimet'in çalışması π için yapılan ilk teorik ispat olup günümüze kadar birçok matematikçinin elinden geçtiğinden metodu ve (27) dışında orijinalliğini kaybetmiştir. Ayrıca aynı şeyin bu çalışmada da geçerli olduğu görülmektedir. Yani günümüz bilim adamlarının bu çalışmada açıklayamadığı bir nokta var: *Arşimet*, "*3'ün karekökünün 265/153'ten büyük, ama 1351/780'den küçük*" olduğunu söyler!

Öte yandan bu konuda kaynaklara bakıldığında, Eski Mısırlıların π için (26)'daki yaklaşımı verdiklerine pek inanılmamaktadır. Çünkü bu derecedeki yaklaşık bir değer empirik (deneysel) bir yolla ya da kaba tahminlerle bulunmuş olamazdı. Dolayısıyla bu soru şimdiye kadar yanıtız kalmış ve herhangi bir aydınlatıcı ipucu ile karşılaşılmamıştır. Fakat bu problemin çözümü için çok zayıf da olsa iyi yaklaşımlar mevcuttur. Bu konuda **Fermat'ın Son Teoremi**'ni kanıtlayan **Andrew WILES**'a **NOVA** tarafından "*Kanıtlan ne kastediyorsunuz?*" sorusuna karşılık "*Matematiksel bir kanıtta birsürü, ama birsürü, neredeyse doğruluğu kuşku götürmeyen adımdan oluşan mantıksal bir zincir vardır. Eger yazdığınız kanıt gerçekten doğruysa kimse hiçbir zaman onun tersini kanıtlayamaz. Eski Yunanlılar zamanında yapılmış ve bugün hala geçerli olan kanıtlar var*" yanıtını vermiştir.

Şimdi Eski Mısırlıların piramitlerin inşasında kullandıkları **Seked (Eğim) Teorisi** ile bu problemin çözümüne geçebiliriz.

Öncelikle (20)'den b_{n-1}, b_n, b_{n+1} 'ler Hemon dizisinin elemanları olmak üzere

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu

$$(28) \frac{b_n}{b_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\phi}, \frac{b_{n+1}}{b_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi$$

için

$$(29) \frac{c_{n+1}}{c_{n-1}} =: \frac{b_n^2}{b_{n-1}^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi$$

olacak şekilde Hemon dizisine haiz c_{n-1}, c_n, c_{n+1} 'ler vardır. Öyleyse bu bağıntıya göre b_{n-1}^2 ve b_n^2 , c_{n-1}, c_n, c_{n+1} 'in doğuranları olmak üzere

$$(30) c_{n-1} = b_{n-1}^2, c_{n+1} = b_n^2$$

olarak alınabilir ve bu elemanlar arasında (3)&(4)'ten

$$(31) c_n^2 \cong c_{n-1}c_{n+1}$$

ve

$$(32) c_{n-1}^2 + c_n^2 = c_{n+1}^2$$

bağıntıları geçerli olur.

Şu halde (14)'ten b_{n-1}^2 ve b_n^2 'in indirgeme formülleri

$$(33) b_{n-1}^2 = F_{n-2}b_0^2 + F_{n-1}b_1^2, b_n^2 = F_{n-1}b_0^2 + F_n b_1^2$$

şeklindedir. Burada Büyük piramit için $c_{n-1} = b_{n-1}^2 = 55, c_{n+1} = b_n^2 = 89$ değerleri söz konusu olduğundan b_0^2 ve b_1^2 başlangıç değerleri (33)'deki denklem sisteminin çözümünden

$$(34) b_0^2 = \frac{89F_{n-1} - 55F_n}{F_{n-1}^2 - F_{n-2}F_n}, b_1^2 = -\frac{89F_{n-2} - 55F_{n-1}}{F_{n-1}^2 - F_{n-2}F_n}$$

bulunur ve bu sonuçlarda gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa istenen elde edilir.

Buna göre her m ve n tam sayıları olmak üzere

$$(35) F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = (-1)^n F_{m-n}$$

ve

$$(36) F_n^2 - F_{n-m} F_{n+m} = (-1)^{n-m} F_m^2$$

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu

formülleri (34)'te kullanılırsa,

$$89F_{n-1} - 55F_n = F_{11}F_{n-1} - F_{10}F_n \stackrel{(35)}{=} -(-1)^{n-1} F_{10-(n-1)} = (-1)^{n-2} F_{11-n}$$

$$89F_{n-2} - 55F_{n-1} \stackrel{(35)}{=} -(-1)^{n-2} F_{10-(n-2)} = (-1)^{n-3} F_{12-n}$$

ve

$$F_{n-1}^2 - F_{n-2}F_n \stackrel{(36)}{=} (-1)^{(n-1)-1} F_1^2 = (-1)^{n-2}$$

eşitlikleri geçerli olur. Buradan (34)'teki başlangıç değerleri

$$b_0^2 = \frac{(-1)^{n-2} F_{11-n}}{(-1)^{n-2}} = F_{11-n}, b_1^2 = -\frac{(-1)^{n-3} F_{12-n}}{(-1)^{n-2}} = F_{12-n}$$

nedeniyle

$$(37) \quad b_0^2 = F_{11-n}, b_1^2 = F_{12-n}$$

olarak bulunur. Bu ise istenendir!

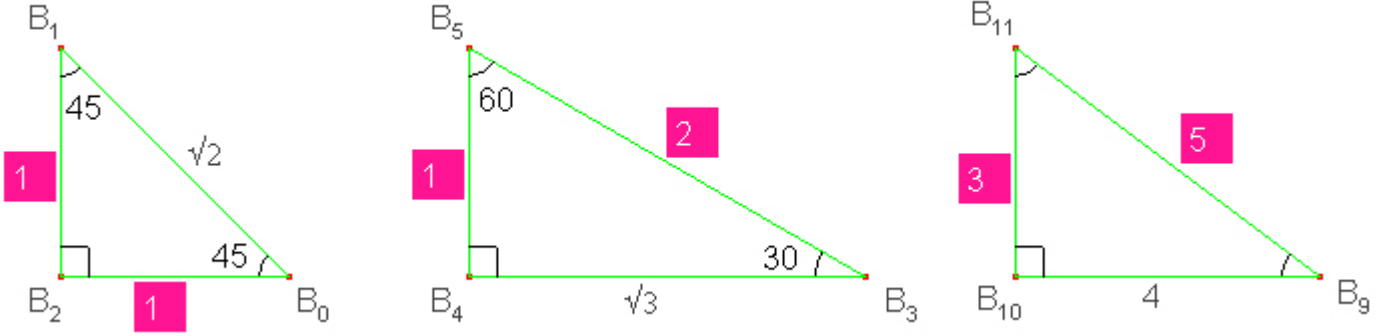
Şimdi b_0^2 ve b_1^2 başlangıç değerlerinin tablosunu şöyle verebiliriz:

n	$b_0^2 = F_{11-n}$	$b_1^2 = F_{12-n}$
⋮	⋮	⋮
-2	233	377
-1	144	233
0	89	144
1	55	89
2	34	55
3	21	34
4	13	21
5	8	13
6	5	8
7	3	5
8	2	3
9	1	2
10	1	1

İşte bu başlangıç değerlerine göre şu dik üçgenler söz konusu olur:

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu



Burada başlangıç değerleri olarak **Hemon**'un hangi dik üçgenle başladığını Büyük piramitteki bulgulara göre değerlendirebiliriz. Örneğin, $(1, 2, \sqrt{5})$ ve $(3, 4, 5)$ dik üçgeni **Khufu**'nun odasında vardır (ki ilk dik üçgene göre $\frac{6}{10}(1, 2, \sqrt{5})$ üçgeninin $\zeta = \frac{6}{10}(1 + 2 + \sqrt{5}) = \frac{3}{5}(3 + \sqrt{5}) = \frac{6}{5}\phi^2$ çevresiyle **Khufu**'nun odasındaki π bulunmaktadır ki bu π değeri piramittekinden daha iyidir) ama bunlar içinde en kolay olanı $(1, 1, \sqrt{2})$ dik üçgenidir. Çünkü bu dik üçgen bir kenar uzunluğu 1 br olan bir karenin bir köşegeni boyunca 2'ye bölünmesiyle derhal elde edilir. O halde başlangıç değerleri $n = 10$ için

$$(38) \quad b_0^2 = F_1 = 1 = F_2 = b_1^2$$

olarak alınabilir. Bu durumda (33)'ten

$$b_{n-1}^2 = F_{n-2} + F_{n-1} = F_n, \quad b_n^2 = F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$$

olduğundan $n = 10$ için

$$(39) \quad c_9 (= b_9^2 = F_{10}) = 55, \quad c_{11} (= b_{10}^2 = F_{11}) = 89$$

değerleri bulunur ki (31)'den

$$c_{10}^2 \cong c_9 c_{11} = F_{10} F_{11} = 55 \times 89 = 4895 \Rightarrow c_{10} \cong \sqrt{4895}$$

ve (32)'den

$$\begin{aligned} c_9^2 + c_{10}^2 = c_{11}^2 &\Rightarrow c_{10}^2 = c_{11}^2 - c_9^2 = F_{11}^2 - F_9^2 = (F_{11} - F_9)(F_{11} + F_9) (= F_9 F_{12}) \\ &= (89 - 55)(89 + 55) = 34 \times 144 (= 4896) \Rightarrow c_{10} = 12\sqrt{34} \end{aligned}$$

olur ve genelde de $m = 1, 2, \dots, 20$ için

$$(40) \quad c_{10} \cong \sqrt{F_m F_{21-m}}$$

yaklaşımları söz konusu olur.

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu

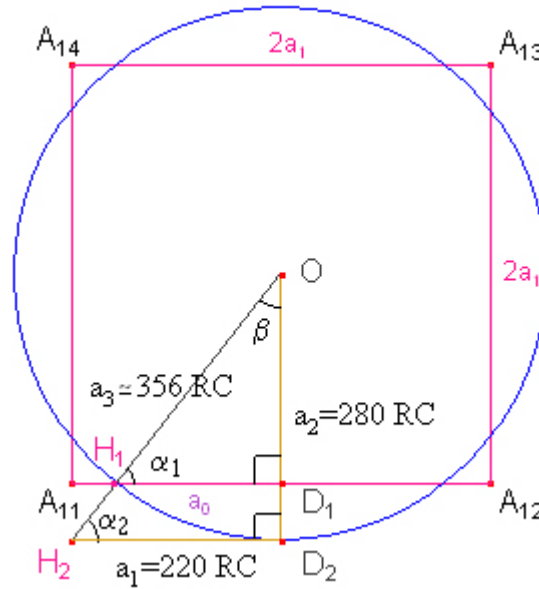
Bu yaklaşımlara göre tablo aşağıya çıkarılmıştır:

m	$F_m F_{21-m}$	$\sqrt{F_m F_{21-m}}$
1	6765	82.249620059912738785...
2	4181	64.660652641308841030...
3	5168	71.888803022445713830...
4	4791	69.217049922688846130...
5	4935	70.249555158733923473...
6	4880	69.856996786291922585...
7	4901	70.007142492748552406...
8	4893	69.949982130090640932...
9	4896	69.971422738143605650...
10	4895	69.964276598847214837...

Sonuçta bu yaklaşımlardan da görüleceği üzere

$$(41) c_{10} \cong 70$$

yaklaşımı geçerli olur ve Büyük piramitteki



dik üçgenin kenar uzunlukları

$$(42) a_1 = 4c_9 = 220 \text{ RC}, a_2 = 4 \times 70 (\cong 4c_{10}) = 280 \text{ RC}, a_3 \cong 4c_{11} = 356 \text{ RC}$$

olarak elde edilir. Şimdi bu sonuçla birlikte (25)'ten (26)'ya nasıl geçildiği çok açık bir şekilde görülmektedir.

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu

Not 2: Eski Mısırlıların piramitlerin inşaatlarında kullandıkları eğim için **Seked Teorisi** yukarıdaki çalışmadan başka bir şekilde matematiksel olarak açıklanamamıştır. Çünkü $\frac{1}{\sqrt{\phi}}$ sürekli kesirler kullanılmadan

dan tam (rasyonel) sayılar dizisiyle elde edilemez. Ancak Fibonacci, Tribonacci, Tetranacci ve m. mertebeden Fibonacci dizileri **generating function** ile tam katsayılı sonsuz bir serinin katsayıları olarak üretilebilirler. Benzer ama daha karmaşık şekilde $\sqrt{3}$ sayısına da tam katsayılı sonsuz serilerin katsayılarının oranlarıyla rasyonel yaklaşımlarda bulunabilir. Bunun için

26. **MatriX'te Arşimet'in Keşfi ve Hades'in Dönüşü: Arşimet'in 3'ün Kareköküne Rasyonel Yaklaşımları için Modern Bir Yaklaşım** (<http://dpamuktulum.tripod.com/archives/26/15012003.htm>), Mathquake, 15.01.2003

çalışmasındaki $\sqrt{3}$ için

2.1. İki Özel Serinin Katsayılarının Oranları ile $\sqrt{3}$ için Rasyonel Yaklaşımlar

Tamm: $|x| < \sqrt{2-\sqrt{3}}$ için

$$\tan^{-1} \frac{x^2 - 2x}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2\sqrt{3}x - \sqrt{3}x^2}{2-2x+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n}$$

serilerinin katsayıları için

$$\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{3}.$$

olduğunu göstermiştim.

Sonuçta (25)'te limit alma işlemi geçerse,

$$2\pi a_n \cong 4.2a_{n-1} \Rightarrow \pi \cong 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} \stackrel{(19)}{=} \frac{4}{\sqrt{\phi}}$$

nedeniyle

$$(43) \quad \pi \cong \frac{4}{\sqrt{\phi}}$$

olarak bulunur ki, bu sonuç ancak Altın Piramit'te ortaya çıkar.

1586'da Alman matematikçi **Ludolph van Ceulen** "**Daire-Çap İlişkileri**" üzerine yaptığı bir çalışmada π için

$$(44) \quad \pi = \sqrt{\sqrt{320} - 8}$$

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu

değerini bulmuştur ki, bu sonuç (43) ile aynıdır. *Ludolph van Ceulen* bu değere ulaşmak için ispatta dairenin çevresini karenin çevresine eşit almıştır!

Yine daire-çap ilişkisi üzerine çalışma yapan Fransız matematikçisi *Vieta* da 1593'te π için

$$(45) \pi = \frac{18 + \sqrt{180}}{10} \left(= \frac{6}{5} \phi^2 \right)$$

değerini bulmuştur. *Vieta* da *Ceulen* gibi dairenin çevresini karenin çevresine eşit almıştır. Bu değer de firavun *Khufu*'nun odasında olduğu söylenir!

Yapılan araştırmalardan görülüyor ki, bir dairede "**Daire-Çap İlişkileri**" üzerinde ilk medeniyetlerden bugüne kadar birçok çalışmalarda bulunanlar olmuştur. Bu çalışmalar devamlı olumlu yöne doğru gelişme göstermiştir!

Son olarak bu sonucu aşağıdaki güzel Baş ile kapatalım.

Pi ve Altın Oran Arasındaki İlişki İçin Güzel Bir Baş: Aşağıdaki **Baş**'ta (**Sözsüz Kanıt**) d_0, d_1, \dots, d_n Hemon dizisinin elemanları olmak üzere

$$(46) C_{\text{Daire}} \cong C_{\text{DEFG Karesi}}$$

ilişkisinden (43)'ün bulunması son derece kolaydır ve genelde aynı ilişki

$$(47) \pi d_n \cong 4d_{n-1}$$

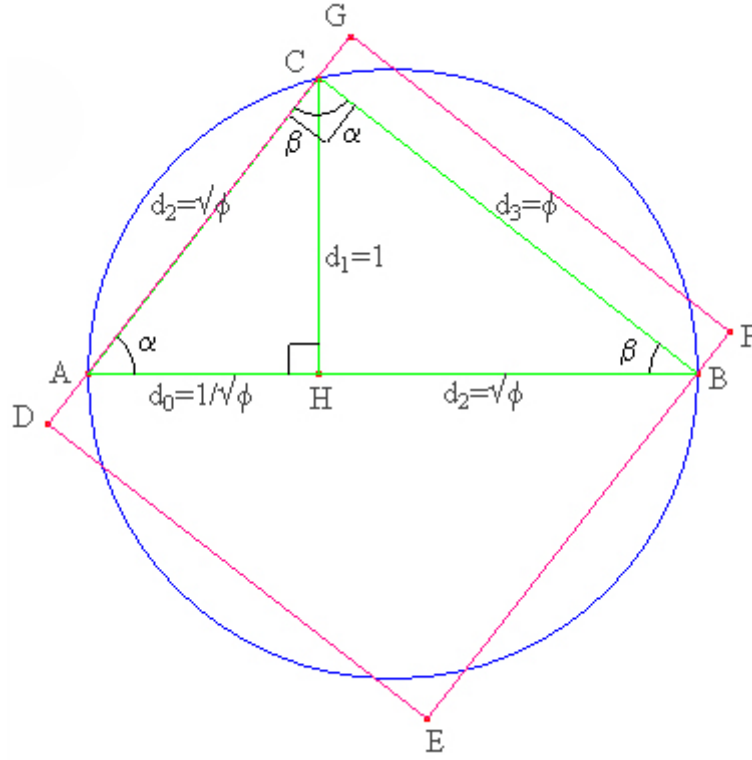
için de geçerlidir. Çünkü her bir dik üçgenin kenar uzunlukları için

$$(48) (d_{n-2}, d_{n-1}, d_n) = \sqrt{\phi^{n-2}} (d_0, d_1, d_2) = \left(\sqrt{\phi^{n-3}}, \sqrt{\phi^{n-2}}, \sqrt{\phi^{n-1}} \right)$$

sıralı üçlüleri mevcuttur.

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu



Sonuçlar:

1. Dairenin yarıçap uzunluğu $r = \frac{d_4}{2}$ olmak üzere α için

$$(49) \sqrt{d_0 r} < \alpha < \frac{d_0 + r}{2}$$

çifte eşitsizliği vardır. Buna göre

$$(50) \sqrt{\frac{\phi}{2}} < \tan^{-1} \sqrt{\phi} < \frac{\phi^2 + 2}{4\sqrt{\phi}}$$

elde edilir ve (50)'de

$$(51) \tan^{-1} \sqrt{\phi} = 2 \tan^{-1} \frac{1}{\phi \sqrt{\phi}}$$

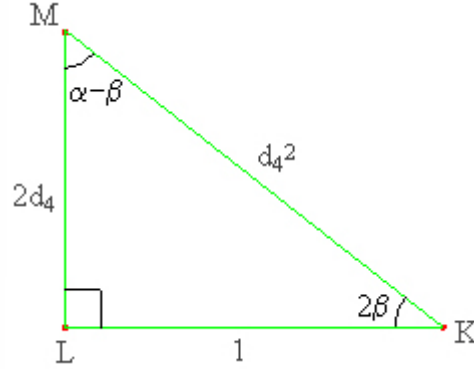
özdeşliği kullanılırsa

$$(52) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\phi}{2}} < \tan^{-1} \frac{1}{d_4} < \frac{\phi^2 + 2}{8\sqrt{\phi}}$$

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu

bulunur ki, dairenin çapı d_4 için aşağıdaki dik üçgen söz konusu olur (ki bu dik üçgenin M köşesi dairenin merkezi olarak gözönüne alınabilir):



2. π için diğer metotlar da kullanılırsa son derece dikkat çeken şu yaklaşımlar verilebilir:

$$(53) \pi < 64 \tan \frac{\pi}{64} < \frac{4 + \phi\sqrt{2}}{2} < 10\sqrt{\frac{\phi\sqrt{\phi}}{2}} - 7 < \frac{4}{\sqrt{\phi}}$$

Çünkü bu yaklaşımların ondalık açılımlarına bakılırsa, birbirine oldukça yaklaşık oldukları görülür:

$$\begin{aligned} 64 \tan \frac{\pi}{64} &= 3.1441183852459042627\dots \\ \frac{4 + \phi\sqrt{2}}{2} &= 3.1441228056353685952\dots \\ 10\sqrt{\frac{\phi\sqrt{\phi}}{2}} - 7 &= 3.1443852136822275010\dots \\ \frac{4}{\sqrt{\phi}} &= 3.1446055110296931442\dots \end{aligned}$$

Sonuç 7 (Pi ve altın oran arasındaki ilişkinin altın piramitteki iç açılarla bulunması): $OD_n H_n$ dik üçgeninde

$$\text{Cot} \alpha_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} \stackrel{(1)}{\cong} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \text{Sin} \alpha_n$$

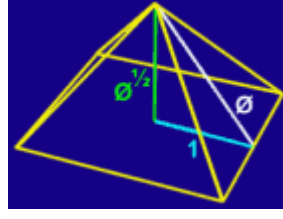
yaklaşımı geçerli olduğundan $\alpha_n = \alpha, \beta_n = \beta$ için

$$(54) \text{Cot} \alpha \cong \text{Sin} \alpha \Leftrightarrow \text{Tan} \beta \cong \text{Cos} \beta$$

olur. Bu yaklaşım *Herodot*'un verdiği bilgi dışında Büyük piramitin eğimi, yani sekedi hakkında da bilgi vermektedir.

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu



Şu halde n sonsuz için yani **Altın Piramit**'te α ve β açıları için

$$\frac{\pi}{2} = \alpha + \beta = \tan^{-1} \sqrt{\phi} + \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\phi}} = 2 \tan^{-1} \frac{1}{\phi \sqrt{\phi}} + \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\phi}}$$

nedeniyle

$$(55) \quad \frac{\pi}{2} = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\phi}} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{\phi \sqrt{\phi}}$$

özdeşliği geçerli olur. Bu özdeşlik 1996'da **Wetherfield** tarafından

$$\frac{\pi}{2} = 2 \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} + \tan^{-1} \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

şeklinde verilen özdeşliğe çok benzemektedir.

Şimdi (55)'te ters tanjant için **Gregory**'nin serisini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\phi}} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{\phi \sqrt{\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\phi}^{2n+1}} + \frac{2}{(\phi \sqrt{\phi})^{2n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\phi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{\phi^n} + \frac{2}{\phi^{3n+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[(2F_{3n+1} - F_n) \phi - (2F_{3n+2} - F_{n+1}) \right] \cong \frac{2}{\sqrt{\phi}} \end{aligned}$$

için

$$\pi \cong \frac{4}{\sqrt{\phi}}$$

yine aynı sonuç yani (43) elde edilir.

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu

M. Mertebeden Hemon Dizisi

Başlangıç değerleri $a_0^2, a_1^2, \dots, a_{m-1}^2$ reel sayılar için

$$(56) H_n(a_0^2, a_1^2, \dots, a_{m-1}^2) = \sum_{k=1}^m H_{n-k}(a_0^2, a_1^2, \dots, a_{m-1}^2)$$

dizisine “**m. mertebeden Hemon dizisi**” denir. Daha açık bir şekilde, bu dizi $k = 0, 1, \dots, m$ için $H_{n-k}(a_0^2, a_1^2, \dots, a_{m-1}^2) = a_{n-k}^2$ olduğundan

$$(57) a_n^2 = \sum_{k=1}^m a_{n-k}^2$$

şeklindedir ve bu dizi m. mertebeden genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin özel bir hali olduğundan, m. mertebeden genelleştirilmiş Fibonacci dizisinde geçerli olan bütün özellikler m. mertebeden Hemon dizisinde de geçerli olur.

Şu halde (56) dizisinin ardışık iki terimi için

$$(58) \frac{H_n(a_0^2, a_1^2, \dots, a_{m-1}^2)}{H_{n-1}(a_0^2, a_1^2, \dots, a_{m-1}^2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_m$$

olacak şekilde öyle bir $x_m = x$ pozitif reel sayısı vardır ki,

$$x^n = \sum_{k=1}^m x^{n-k}$$

karakteristik denklemin her iki yanını x^{m-n} ile çarpılırsa

$$(59) x^m = \sum_{k=1}^m x^{m-k}$$

halini alır ve bu denklem de kısaca

$$(60) x^{m+1} - 2x^m + 1 = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin her m pozitif tam sayısı için yalancı $x = 1$ kökü hariç $1 \leq x \leq 2$ olacak şekilde daima pozitif bir reel kökü vardır. Buna göre (60) denkleminin $x_{m+1} = 1$ kökü hariç (56)'nın genel çözüm formülü $n = 0, 1, \dots, m-1$ için

$$(61) H_n(a_0^2, a_1^2, \dots, a_{m-1}^2) = \sum_{k=1}^m b_k x_k^{n-1}$$

denklem sistemindeki b_1, b_2, \dots, b_m katsayıları bulunarak aynı denklemde yerine konmasıyla elde edilir.

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu

Burada (59) denkleminde $m = 1, 2, 3, 4$ için pozitif reel kökler

$$(62) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_3 = \frac{1 + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}}{3} \\ 4x_4 - 1 = \sqrt{\frac{11 + 4\sqrt[3]{\frac{-65 + 3\sqrt{1689}}{2}} - 4\sqrt[3]{\frac{65 + 3\sqrt{1689}}{2}}}{3}} + \\ \sqrt{\frac{22 - 4\sqrt[3]{\frac{-65 + 3\sqrt{1689}}{2}} + 4\sqrt[3]{\frac{65 + 3\sqrt{1689}}{2}}}{3}} + \sqrt{\frac{26}{11 + 4\sqrt[3]{\frac{-65 + 3\sqrt{1689}}{2}} - 4\sqrt[3]{\frac{65 + 3\sqrt{1689}}{2}}}} \end{array} \right.$$

olarak bulunur. Bu değerlerin tam olarak bilinmesi (58)'deki limit için son derece önemlidir.

Öte yandan diğer m 'ler için (59) denkleminin cebirsel çözümü mevcut değildir, dolayısıyla köklerin yaklaşım metotlarından biriyle bulunması gerekir. O halde bu köklerden bazılarının ondalık açılımlarını aşağıda bir tablo halinde verebiliriz:

m	x_m
1	1
2	1.618033988749894848...
3	1.8392867552141611325...
4	1.9275619754829253042...
5	1.9659482366454853371...
6	1.9835828434243263303...
7	1.9919641966050350211...
8	1.9960311797354145898...
9	1.9980294702622866986...
10	1.9990186327101011386...
11	1.9995104019782854914...
12	1.9997555009373175367...
13	1.9998778327115455400...
\vdots	\vdots

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu

İndirgeme Formülü: Başlangıç değerleri F_0, F_1, \dots, F_{m-1} Fibonacci sayılarıyla

$$(63) H_0(F_0, F_1, \dots, F_{m-1}) = F_0 = 0, H_1(F_0, F_1, \dots, F_{m-1}) = F_1 = 1, \dots, H_{m-1}(F_0, F_1, \dots, F_{m-1}) = F_{m-1}$$

ve

$$(64) H_0(H_0, H_1, \dots, H_{m-1}) = H_0 = a_0^2, H_1(H_0, H_1, \dots, H_{m-1}) = H_1 = a_1^2, \dots, H_{m-1}(H_0, H_1, \dots, H_{m-1}) = H_{m-1} = a_{m-1}^2$$

için (56)'ya göre

$$(65) H_n(F_0, F_1, \dots, F_{m-1}) = \sum_{k=1}^m H_{n-k}(F_0, F_1, \dots, F_{m-1})$$

ve

$$(66) H_n(H_0, H_1, \dots, H_{m-1}) = \sum_{k=1}^m H_{n-k}(H_0, H_1, \dots, H_{m-1})$$

$H_n(a_0^2, a_1^2, \dots, a_{m-1}^2)$ 'nin $a_0^2, a_1^2, \dots, a_{m-1}^2$ 'nin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabildiğine “**İndirgeme Formülü (Bağıntısı)**” denir. O halde bu indirgeme formülü

$$(67) a_n^2 = \sum_{k=0}^{m-1} c_k a_k^2$$

formunda olmak üzere katsayılar aşağıdaki tablo yardımıyla son derece kolay bir şekilde bulunur. Bu tabloda $k = 0, 1, \dots, m-1$ için $H_{n-(m-1+k)}$ 'lar (65)'ten elde edilen elemanlardır.

	a_{m-1}^2	a_{m-2}^2	...	a_2^2	a_1^2	a_0^2
$H_{n-(m-1)}$	1	1	...	1	1	1
$H_{n-(m-1+1)}$	1	1	...	1	1	0
$H_{n-(m-1+2)}$	1	1	...	1	0	0
	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	\vdots
$H_{n-(m-1+m-1)}$	1	0	...	0	0	0

Bu tablodan $k = 0, 1, \dots, m-1$ için c_k katsayısı $H_{n-(m-1+k)}$ 'lar ile a_k^2 'nin bulunduğu sütunlardaki elemanların karşılıklı çarpımlarının toplamı olduğundan

$$(68) c_k = \sum_{i=0}^k H_{n-(m-1+i)}$$

elde edilir ve bu formülden kolaylıkla şu iki sonuç elde edilir:

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Genelleştirilmiş Hemon'un Metodu

$$c_{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} H_{n-(m-1+i)} = \sum_{i=1}^m H_{n-m+2-i} \stackrel{(65)}{=} H_{n-m+2}$$

olduğundan

$$(69) \quad c_{m-1} = H_{n-m+2}$$

ve

$$c_k = \sum_{i=0}^k H_{n-(m-1+i)} = \sum_{i=0}^{k-1} H_{n-(m-1+i)} + H_{n-(m-1+k)} = c_{k-1} + H_{n-m-k+1}$$

olduğundan

$$(70) \quad c_k - c_{k-1} = H_{n-m-k+1}$$

bulunur.

Not 3: (65) dizisine $m=2$ için “**Fibonacci dizisi**”, $m=3$ için “**Tribonacci dizisi**”, $m=4$ için “**Tetranacci dizisi**” ve genel olarak m için olanına da “**m. mertebeden Fibonacci dizisi**” denir.

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Hemon'un Başyapıtı'ndaki (Büyük Piramit) π (22/7) İçin Unutulmuş Metot (Arşimet'in Daire Çevresi Ölçmesi, Önerme 1&2 (Genişletilmiş Versiyon))

“Arşimet'in Metodu” olarak da bilinen Arşimet'in “Daire Çevresi Ölçmesi”ndeki önermeleri aşağıdadır:

Önerme 1: Dairenin alanı, dik üçgenin alanına eşittir ki, bu dik üçgenin dik kenarlarından biri dairenin yarıçapına ve diğeri de çevresine eşittir.

Önerme 2: Dairenin alanının karenin alanına oranı ki, karenin dairenin çapına eşit kenarıyla 11:14'e yaklaşıktır (ki bu tabii ki “ π , 22/7 kesrine yaklaşıktır” demektir).

Önerme 3: Dairenin çevresi çapının $3\frac{10}{71}$ 'inden büyük ama $3\frac{1}{7}\left(=3\frac{10}{70}\right)$ 'sinden küçüktür. Arşimet bu eşitsizlikleri birim çaplı daire üzerinde düzgün 96 kenarlı kirisler çokgeni ve teğetler çokgeninin çevresini yaklaşık olarak hesaplayarak elde etti!

Arşimet'in bu önermedeki açık ifadesi şöyledir: “Herhangi bir dairenin çevresinin çapına oranı $3\frac{10}{71}$ 'inden büyük ama $3\frac{1}{7}$ 'sinden küçüktür”

Önerme 2'nin Ekleri:

- 1) Dairenin çevresinin karenin çevresine oranı ki, karenin dairenin çapına eşit kenarıyla 11:14'e yaklaşıktır.
- 2) Dik dairesel koninin hacminin piramitin hacmine oranı ki, yükseklikleri aynı olan koni ve piramitin tabanlarında karenin dairenin çapına eşit kenarıyla 11:14'e yaklaşıktır.

Tabii ki bu son iki önermede de “ π , 22/7 kesrine yaklaşıktır” sonucu geçerli olmaktadır.

Not 4: Önerme 3'ün kanıtını “[Daire Çevresi Ölçmesi, Önerme 3: Türk-Yunan Dostluğu 2002 için Yeni Bir Versiyon, 1. Albüm: Arşimet'in Metodu MV-Türk-Yunan Metodu Ver. 1.0, The Mathquake, 31.08.2002](#)” çalışmasında göstermişim.

Öte yandan bu 3 önermenin kanıtları “[Thomas L. Heath: Archimedes' On The Measurement Of The Circle, Cambridge University Press, 1897](#)” kaynağında verilmektedir. Bu kaynağın 93. sayfasında **Önerme 2** için şu bilgi verilir:

Proposition 2. The area of a circle is to the square on its diameter as 11 to 14.

[The text of this proposition is not satisfactory, and Archimedes cannot have placed it before Proposition 3, as the approximation depends upon the result of that proposition.]

Burada dikkat edilirse **Önerme 2 Önerme 3**'ten önce verilmeliydi. Çünkü önermelerin veriliş şekline göre **Önerme 2 Önerme 3**'ten sonra verilmeliydi; **Önerme 2**'nin içindeki bilgi buna hükmediyor yani. Zaten **Önerme 2**'nin hemen altındaki *Heat*'in açıklaması da bunu açıkça dile getirmektedir!

İşte 2002 Ağustos'unda hiçbir açıklama getiremediğim bu çelişki “[Daire Çevresi Ölçmesi, Önerme 3: Türk-Yunan Dostluğu 2002 için Yeni Bir Versiyon, 1. Albüm: Arşimet'in Metodu MV-Türk-Yunan Metodu Ver. 1.0, The Mathquake, 31.08.2002](#)” çalışmasını yaparken dikkatimi çekmişti. Hatta “*Pi Kronolojisi'ne*

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Hemon'un Başyapıtı'ndaki (Büyük Piramit) π (22/7) İçin Unutulmuş Metot (Arşimet'in Daire Çevresi Ölçmesi, Önerme 1&2 (Genişletilmiş Versiyon))

Giren İlk ve Tek Türk Matematikçi Gıyasüddin Cemşid Mesut El-Kaşi'yi Çalışmasının 579. yıldönümünde Anıyoruz, 13 Temmuz 2003 01:48” çalışmasında bu yönde şüphelerim olduğunu bildirmiştim. Son olarak *Erich von Däniken*'in sitesinin girişinde yer alan “*Erich von Däniken on Expedition (Khufu Pyramid, Giza, Egypt)*” başlığının üstündeki resmine bakarken bu çelişki tekrar kafamda canlandı ve Büyük piramitteki **Pi Gizemi**'nin *Arşimet*'in “*Daire Çevresi Ölçmesi*”ndeki **Önerme 1&2**'yi kullanarak açıklanabildiğini 8 Temmuz 2004, 13:00'da gördüm ve o günden beri orijinal metodu yani **Hemon'un Metodu**'nu aramaya başladım. Ancak bu konudaki gerçekler ne olursa olsun *Arşimet*'in kendi zamanına kadar gelen bu ve benzeri çalışmaları toplayarak, çalışmasında sistematik olarak incelediği gerçeğini de unutmamak gerekir. Bu nokta da *Arşimet* amcaya desteğim tamdır, ama büyük bir birikimi de kasıtlı veya kasıtsız olarak bir kişiye mal etmek en başta [insanlığa sığmaz!](#)

Şu halde **Önerme 1**, **Önerme 2** ve **eklerinde** geçen 11:14 kesrini doğru kabul edip Büyük piramitteki **Pi Gizemi**'ni tam olarak açıklayabiliriz. Ancak burada dikkat edilmesi gereken bir nokta vardır: Büyük piramitin yapımında kullanılan $\pi = \frac{22}{7}$ değeri aşağıda her elde edilmişinde farklı bir numaraya tabii tutulacaktır. Çünkü aşağıdaki her ispat toplu olarak bir bütün içinde değerlendirilebileceği gibi, ayrı ayrı olarak da değerlendirilebilir. Aynı şey sonuçlar için de geçerlidir.

1) Alan Hesabıyla: Şekil 2'ye göre Keops piramitin tabanı olan $A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}$ karesinin köşelerinden bir daire (kırmızı renkli daire) geçtiği düşünülürse, *Arşimet*'in **Metodu**'na göre kirişler dörtgeni olan $A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}$ karesi ile kırmızı renkli dairenin ve ondan çok daha yakın olan **mavi renkli dairenin** çevreleri ve teğetler dörtgeni olan $A_{21}A_{22}A_{23}A_{24}$ karesi ile mavi renkli dairenin alanları birbirine yakın olur.

Şu halde **Önerme 1**'e göre mavi renkli dairenin alanı, bir dik üçgenin alanına eşittir ki, bu dik üçgenin dik kenarlarından biri dairenin a_2 br yarıçapına ve diğeri de $A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}$ karesinin çevresi $4 \times 2a_1$ br'ye eşit olduğundan

$$(71) \quad C_{\text{Mavi Renkli Daire}} \cong C_{A_{11}A_{12}A_{13}A_{14} \text{ Karesi}} \Rightarrow 2\pi a_2 \cong 4 \times 2a_1 \Rightarrow \pi \cong \frac{4a_1}{a_2} = \frac{4 \times 220}{280} = \frac{22}{7}$$

nedeniyle

$$(72) \quad \pi \cong \frac{22}{7}$$

bulunur. Bu sonuç, bize π sayısı için kare kullanılarak çevre hesabıyla *Arşimet*'in metodunun değişik bir versiyonunu göstermektedir. Fakat (71) ile elde edilen (72)'deki sonuca bakılırsa, bu yeni yaklaşım metodunun *Arşimet*'in metodundan çok daha iyi olduğu görülmektedir. Çünkü *Arşimet*'in metoduyla aynı sonuca ulaşabilmek için mavi renkli daireye ait düzgün 96 kenarlı teğetler çokgeniyle yaklaşmak gerekir. Ancak mimarlığının yanında aynı zamanda bir matematik dehası olan **Hemon** bunun yerine kendi metoduyla aynı sonuca daha çabuk ulaşmaktadır!

Şu halde bu sonuçla **Önerme 1**'e göre

$$A_{\text{Mavi Renkli Daire}} = A_{\text{Dik Üçgen}} = \frac{a_2 \times C_{\text{Mavi Renkli Daire}}}{2} \stackrel{(70)}{\cong} \frac{a_2 \times C_{A_{11}A_{12}A_{13}A_{14} \text{ Karesi}}}{2} = 4a_1a_2$$

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Hemon'un Başyapıtı'ndaki (Büyük Piramit) π (22/7) İçin Unutulmuş Metot (Arşimet'in Daire Çevresi Ölçmesi, Önerme 1&2 (Genişletilmiş Versiyon))

olduğundan

$$(73) A_{\text{MaviRenkliDaire}} \cong 4a_1a_2$$

elde edilir. Buradan **Önerme 2**'ye göre

$$\frac{A_{\text{MaviRenkliDaire}}}{A_{A_{21}A_{22}A_{23}A_{24} \text{ Karesi}}} \stackrel{(73)}{\cong} \frac{4a_1a_2}{(2a_2)^2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{220}{280} = \frac{11}{14}$$

için

$$(74) \frac{A_{\text{MaviRenkliDaire}}}{A_{A_{21}A_{22}A_{23}A_{24} \text{ Karesi}}} \cong \frac{11}{14}$$

sonucu elde edilir.

İşte *Arşimet*'in **Önerme 2**'si de bu gerçeği dile getirmektedir. Şimdi burada "*Arşimet acaba Önerme 3'ü kanıtladıktan sonra mı bu sonucu Önerme 2'de kullandı, yoksa ampirik (deneysel) yolla elde edilmesi oldukça zor olan bu sonucu daha önceden mi biliyordu? Örneğin Keops piramitinden*" sorusunu düşünmenin tam zamanıdır. Çünkü bu konuda **Önerme 3**'ün son kanıtını verdiğimden beri bazı kuşkularım vardı ve bu çalışmayla artık bu kuşkulara son vermek istiyorum. Eğer bu kanıtın derin bir şekilde analizini yaparsanız neden bazı kuşkulara sahip olduğumu rahatlıkla görebilirsiniz!

Sonuçta (74)'ten kolaylıkla

$$\frac{\pi}{4} = \frac{A_{\text{MaviRenkliDaire}}}{A_{A_{21}A_{22}A_{23}A_{24} \text{ Karesi}}} \cong \frac{11}{14}$$

nedeniyle

$$(75) \pi \cong \frac{22}{7}$$

yine aynı sonuç bulunur.

Alternatif Çözüm: İkinci çözüm için dairenin alan formülünden yararlanırsak,

$$A_{\text{MaviRenkliDaire}} \stackrel{(73)}{\cong} 4a_1a_2 \Rightarrow \pi a_2^2 \cong 4a_1a_2 \Rightarrow \pi \cong \frac{4a_1}{a_2} = \frac{4 \times 220}{280} = \frac{22}{7}$$

nedeniyle şu yaklaşım elde edilir:

$$(76) \pi \cong \frac{22}{7}.$$

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Hemon'un Başyapıtı'ndaki (Büyük Piramit) π (22/7) İçin Unutulmuş Metot (Arşimet'in Daire Çevresi Ölçmesi, Önerme 1&2 (Genişletilmiş Versiyon))

Sonuç 8: Genel olarak

$$(77) \quad \zeta_{\text{Daire}(O,a_n)} \cong \zeta_{A_{(n-1)1}A_{(n-1)2}A_{(n-1)3}A_{(n-1)4} \text{ Karesi}} \Rightarrow 2\pi a_n \cong 4 \times 2a_{n-1} \Rightarrow$$

$$\pi \cong \frac{4a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow \pi \cong 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} \stackrel{(19)}{=} \frac{4}{\sqrt{\phi}}$$

nedeniyle

$$(78) \quad \pi \cong \frac{4}{\sqrt{\phi}}$$

bulunur. O halde bu sonuçla **Önerme 1**'e göre

$$A_{\text{Daire}(O,a_n)} = A_{\text{Dik Üçgen}} = \frac{a_n \times \zeta_{\text{Daire}(O,a_n)}}{2} \stackrel{(77)}{\cong} \frac{a_n \times \zeta_{A_{(n-1)1}A_{(n-1)2}A_{(n-1)3}A_{(n-1)4} \text{ Karesi}}}{2} = 4a_{n-1}a_n$$

olduğundan

$$(79) \quad A_{\text{Daire}(O,a_n)} \cong 4a_{n-1}a_n$$

elde edilir. Buradan da **Önerme 2**'ye göre

$$\frac{A_{\text{Daire}(O,a_n)}}{A_{A_{n1}A_{n2}A_{n3}A_{n4} \text{ Karesi}}} \stackrel{(79)}{\cong} \frac{4a_{n-1}a_n}{(2a_n)^2} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{\text{Daire}(O,a_n)}}{A_{A_{n1}A_{n2}A_{n3}A_{n4} \text{ Karesi}}} \cong \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} \stackrel{(19)}{=} \frac{1}{\sqrt{\phi}}$$

için

$$(80) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{\text{Daire}(O,a_n)}}{A_{A_{n1}A_{n2}A_{n3}A_{n4} \text{ Karesi}}} \cong \frac{1}{\sqrt{\phi}}$$

sonucu elde edilir.

Sonuçta (80)'den kolaylıkla

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{\text{Daire}(O,a_n)}}{A_{A_{n1}A_{n2}A_{n3}A_{n4} \text{ Karesi}}} \cong \frac{1}{\sqrt{\phi}}$$

nedeniyle

$$(81) \quad \pi \cong \frac{4}{\sqrt{\phi}}$$

yine aynı sonuç bulunur.

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Hemon'un Başyapıtı'ndaki (Büyük Piramit) π (22/7) İçin Unutulmuş Metot (Arşimet'in Daire Çevresi Ölçmesi, Önerme 1&2 (Genişletilmiş Versiyon))

Alternatif Çözüm: İkinci çözüm için dairenin alan formülünden yararlanırsak,

$$A_{\text{Daire}(O,a_n)} \stackrel{(79)}{\cong} 4a_{n-1}a_n \Rightarrow \pi a_n^2 \cong 4a_{n-1}a_n \Rightarrow \pi \cong \frac{4a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow \pi \cong 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} \stackrel{(19)}{=} \frac{4}{\sqrt{\phi}}$$

nedeniyle

$$(82) \quad \pi \cong \frac{4}{\sqrt{\phi}}$$

bulunur.

2) Çevre Hesabıyla: Aynı hesabı çevreler için de yaparsak **Önerme 2'nin 1. ekine** göre

$$\frac{C_{\text{Mavi Renkli Daire}}}{C_{A_{21}A_{22}A_{23}A_{24} \text{ Karesi}}} \stackrel{(71)}{\cong} \frac{C_{A_{11}A_{12}A_{13}A_{14} \text{ Karesi}}}{C_{A_{21}A_{22}A_{23}A_{24} \text{ Karesi}}} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{220}{280} = \frac{11}{14}$$

olduğundan

$$(83) \quad \frac{C_{\text{Mavi Renkli Daire}}}{C_{A_{21}A_{22}A_{23}A_{24} \text{ Karesi}}} \cong \frac{11}{14}$$

elde edilir ki, bu sefer *Arşimet*'in **Önerme 2'sini** çevre hesabıyla bulduk. Yine buradan kolaylıkla

$$\frac{\pi}{4} = \frac{C_{\text{Mavi Renkli Daire}}}{C_{A_{21}A_{22}A_{23}A_{24} \text{ Karesi}}} \cong \frac{11}{14}$$

için

$$(84) \quad \pi \cong \frac{22}{7}$$

bulunur.

Not 5: Çevre hesabıyla **Alternatif Çözüm** (71)&(72)'de gösterilmiştir.

Sonuç 9: Genel olarak

$$\frac{C_{\text{Daire}(O,a_n)}}{C_{A_{n1}A_{n2}A_{n3}A_{n4} \text{ Karesi}}} \stackrel{(77)}{\cong} \frac{C_{A_{(n-1)1}A_{(n-1)2}A_{(n-1)3}A_{(n-1)4} \text{ Karesi}}}{C_{A_{n1}A_{n2}A_{n3}A_{n4} \text{ Karesi}}} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

olduğundan

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Hemon'un Başyapıtı'ndaki (Büyük Piramit) π (22/7) İçin Unutulmuş Metot (Arşimet'in Daire Çevresi Ölçmesi, Önerme 1&2 (Genişletilmiş Versiyon))

$$(85) \frac{C_{\text{Daire}(O,a_n)}}{C_{A_{n1}A_{n2}A_{n3}A_{n4} \text{ Karesi}}} \cong \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

elde edilir ki yine *Arşimet*'in **Önerme 2**'sini çevre hesabıyla bulmuş oluruz. Yine buradan kolaylıkla

$$\frac{\pi}{4} = \frac{C_{\text{Daire}(O,a_n)}}{C_{A_{n1}A_{n2}A_{n3}A_{n4} \text{ Karesi}}} \cong \frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow \pi \cong 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} \stackrel{(19)}{=} \frac{4}{\sqrt{\phi}}$$

için

$$(86) \pi \cong \frac{4}{\sqrt{\phi}}$$

bulunur.

Not 6: Genel olarak çevre hesabıyla **Alternatif Çözüm** (77)&(78)'de gösterilmiştir.

3) Hacim Hesabıyla: Yarım bir kürenin içine tam oturtulmuş dik dairesel bir koni gözönüne alınırsa, koninin hacmi yarım kürenin hacminin yarısı, dolayısıyla (tam) kürenin hacminin 4'te 1'i olur. *Arşimet* de aynı düşünceyle dik bir silindir içine tam oturtulmuş küreyi gözönüne alarak kürenin hacminin silindirin hacminin 3'te 2'si olduğu düşüncesiyle kürenin hacmini hesaplamıştı.

Şimdi benzer ama biraz daha karmaşık bir ilişkiyi **Önerme 2'nin 2. eki** için gösterelim.

Koni(T_n, O, a_2) konisi (tepe noktası T_n ve tabanı Daire(O, a_2) dairesi) ile $T_n A_{21} A_{22} A_{23} A_{24}$ piramitinin (tepe noktası T_n ve tabanı $A_{21} A_{22} A_{23} A_{24}$ karesi) yükseklikleri aynı olduğundan hacimlerinin oranı alanlarının oranına eşittir. Buna göre

$$\frac{H_{\text{Koni}(T_n, O, a_2)}}{H_{T_n A_{21} A_{22} A_{23} A_{24} \text{ Piramiti}}} = \frac{A_{\text{Daire}(O, a_2)}}{A_{A_{21} A_{22} A_{23} A_{24} \text{ Karesi}}} \stackrel{(74)}{\cong} \frac{11}{14}$$

nedeniyle

$$(87) \frac{H_{\text{Koni}(T_n, O, a_2)}}{H_{T_n A_{21} A_{22} A_{23} A_{24} \text{ Piramiti}}} \cong \frac{11}{14}$$

elde edilir ve sonuçta

$$\frac{\pi}{4} = \frac{H_{\text{Koni}(T_n, O, a_2)}}{H_{T_n A_{21} A_{22} A_{23} A_{24} \text{ Piramiti}}} \cong \frac{11}{14}$$

olduğundan

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Hemon'un Başyapıtı'ndaki (Büyük Piramit) π (22/7) İçin Unutulmuş Metot (Arşimet'in Daire Çevresi Ölçmesi, Önerme 1&2 (Genişletilmiş Versiyon))

$$(88) \quad \pi \cong \frac{22}{7}$$

bulunur.

Not 7: Aynı ilişki $T_n A_{11} A_{12} A_{13} A_{14}$ piramiti ile $\text{Koni}(T_n, O, a_2)$ konisinin hacimleri için de geçerlidir:

$$\frac{H_{T_n A_{11} A_{12} A_{13} A_{14} \text{ Piramiti}}}{H_{\text{Koni}(T_n, O, a_2)}} = \frac{A_{A_{11} A_{12} A_{13} A_{14} \text{ Karesi}}}{A_{\text{Daire}(O, a_2)}} \stackrel{(73)}{\cong} \frac{(2a_1)^2}{4a_1 a_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{220}{280} = \frac{11}{14}$$

nedeniyle

$$(89) \quad \frac{H_{T_n A_{11} A_{12} A_{13} A_{14} \text{ Piramiti}}}{H_{\text{Koni}(T_n, O, a_2)}} \cong \frac{11}{14}.$$

Dolayısıyla bu ilişkiden π için yine aynı sonuç elde edilir.

Sonuç 10: Genel olarak $\text{Koni}(T_m, O, a_n)$ konisi ile $T_m A_{n1} A_{n2} A_{n3} A_{n4}$ piramitinin yükseklikleri aynı olduğundan hacimlerinin oranı alanlarının oranına eşittir. Buna göre

$$\frac{H_{\text{Koni}(T_m, O, a_n)}}{H_{T_m A_{n1} A_{n2} A_{n3} A_{n4} \text{ Piramiti}}} = \frac{A_{\text{Daire}(O, a_n)}}{A_{A_{n1} A_{n2} A_{n3} A_{n4} \text{ Karesi}}} \stackrel{(79)}{\cong} \frac{4a_{n-1} a_n}{(2a_n)^2} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

nedeniyle

$$(90) \quad \frac{H_{\text{Koni}(T_m, O, a_n)}}{H_{T_m A_{n1} A_{n2} A_{n3} A_{n4} \text{ Piramiti}}} \cong \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

elde edilir ve sonuçta

$$\frac{\pi}{4} = \frac{H_{\text{Koni}(T_m, O, a_n)}}{H_{T_m A_{n1} A_{n2} A_{n3} A_{n4} \text{ Piramiti}}} \cong \frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \cong \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} \stackrel{(19)}{=} \frac{1}{\sqrt{\phi}}$$

olduğundan

$$(91) \quad \pi \cong \frac{4}{\sqrt{\phi}}$$

bulunur.

Öte yandan aynı ilişki $T_m A_{(n-1)1} A_{(n-1)2} A_{(n-1)3} A_{(n-1)4}$ piramiti ile $\text{Koni}(T_m, O, a_n)$ konisinin hacimleri için de geçerlidir:

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Hemon'un Başyapıtı'ndaki (Büyük Piramit) π (22/7) İçin Unutulmuş Metot (Arşimet'in Daire Çevresi Ölçmesi, Önerme 1&2 (Genişletilmiş Versiyon))

$$\frac{H_{T_m A_{(n-1)}! A_{(n-1)}^2 A_{(n-1)}^3 A_{(n-1)}^4 \text{Piramiti}}}{H_{\text{Koni}(T_m, O, a_n)}} = \frac{A_{A_{(n-1)}! A_{(n-1)}^2 A_{(n-1)}^3 A_{(n-1)}^4 \text{Karesi}}}{A_{\text{Daire}(O, a_n)}} \stackrel{(79)}{\cong} \frac{(2a_{n-1})^2}{4a_{n-1}a_n} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

nedeniyle

$$(92) \quad \frac{H_{T_m A_{(n-1)}! A_{(n-1)}^2 A_{(n-1)}^3 A_{(n-1)}^4 \text{Piramiti}}}{H_{\text{Koni}(T_m, O, a_n)}} \cong \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

elde edilir ve sonuçta

$$\frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^2 = \frac{H_{T_m A_{(n-1)}! A_{(n-1)}^2 A_{(n-1)}^3 A_{(n-1)}^4 \text{Piramiti}}}{H_{\text{Koni}(T_m, O, a_n)}} \cong \frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \cong \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} \stackrel{(19)}{=} \frac{1}{\sqrt{\phi}}$$

olduğundan

$$(93) \quad \pi \cong \frac{4}{\sqrt{\phi}}$$

bulunur.

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Piramitlerin Alanları ve Hacimleri Arasındaki İlişkiler

Bu bölümde de 2. mertebeden Hemon dizisindeki özelliklerle piramitlerin alan ve hacimleri arasındaki ilişkileri sonuçlar halinde verelim. Bu ilişkileri incelerken tarihçi **Herodot** tarafından verilen yaklaşımı da kullanacağız.

Not 8: Aşağıdaki sonuçlarda geçen **TA:** Piramitin Taban Alanı, **YA:** Piramitin Yanal Alanı, **BA:** Piramitin Bütün Alanı ve **H:** Piramitin Hacmi demektir.

Sonuç 11: $T_{n-1}A_{(n-1)1}A_{(n-1)2}A_{(n-1)3}A_{(n-1)4}$ piramitinin taban alanı $(2a_{n-1})^2$ olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n TA_{T_k A_{k1} A_{k2} A_{k3} A_{k4} \text{ Piramiti}} &= \sum_{k=1}^n (2a_k)^2 = 4 \sum_{k=1}^n a_k^2 = 4 \sum_{k=1}^n H_k = 4(H_{n+2} - H_2) = (2a_{n+2})^2 - (2a_2)^2 \\ &= TA_{T_{n+2} A_{(n+2)1} A_{(n+2)2} A_{(n+2)3} A_{(n+2)4} \text{ Piramiti}} - TA_{T_2 A_{21} A_{22} A_{23} A_{24} \text{ Piramiti}}\end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$(94) \quad \sum_{k=1}^n TA_{T_k A_{k1} A_{k2} A_{k3} A_{k4} \text{ Piramiti}} = TA_{T_{n+2} A_{(n+2)1} A_{(n+2)2} A_{(n+2)3} A_{(n+2)4} \text{ Piramiti}} - TA_{T_2 A_{21} A_{22} A_{23} A_{24} \text{ Piramiti}}$$

elde edilir.

Sonuç 12:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n TA_{T_{2k-1} A_{(2k-1)1} A_{(2k-1)2} A_{(2k-1)3} A_{(2k-1)4} \text{ Piramiti}} &= \sum_{k=1}^n (2a_{2k-1})^2 = 4 \sum_{k=1}^n a_{2k-1}^2 = 4 \sum_{k=1}^n H_{2k-1} = 4(H_{2n} - H_0) = (2a_{2n})^2 - (2a_0)^2 \\ &= TA_{T_{2n} A_{(2n)1} A_{(2n)2} A_{(2n)3} A_{(2n)4} \text{ Piramiti}} - TA_{T_0 A_{01} A_{02} A_{03} A_{04} \text{ Piramiti}}\end{aligned}$$

olduğundan

$$(95) \quad \sum_{k=1}^n TA_{T_{2k-1} A_{(2k-1)1} A_{(2k-1)2} A_{(2k-1)3} A_{(2k-1)4} \text{ Piramiti}} = TA_{T_{2n} A_{(2n)1} A_{(2n)2} A_{(2n)3} A_{(2n)4} \text{ Piramiti}} - TA_{T_0 A_{01} A_{02} A_{03} A_{04} \text{ Piramiti}}$$

elde edilir.

Sonuç 13:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n TA_{T_{2k} A_{(2k)1} A_{(2k)2} A_{(2k)3} A_{(2k)4} \text{ Piramiti}} &= \sum_{k=1}^n (2a_{2k})^2 = 4 \sum_{k=1}^n a_{2k}^2 = 4 \sum_{k=1}^n H_{2k} = 4(H_{2n+1} - H_1) = (2a_{2n+1})^2 - (2a_1)^2 \\ &= TA_{T_{2n+1} A_{(2n+1)1} A_{(2n+1)2} A_{(2n+1)3} A_{(2n+1)4} \text{ Piramiti}} - TA_{T_1 A_{11} A_{12} A_{13} A_{14} \text{ Piramiti}}\end{aligned}$$

olduğundan

$$(96) \quad \sum_{k=1}^n TA_{T_{2k} A_{(2k)1} A_{(2k)2} A_{(2k)3} A_{(2k)4} \text{ Piramiti}} = TA_{T_{2n+1} A_{(2n+1)1} A_{(2n+1)2} A_{(2n+1)3} A_{(2n+1)4} \text{ Piramiti}} - TA_{T_1 A_{11} A_{12} A_{13} A_{14} \text{ Piramiti}}$$

elde edilir.

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Piramitlerin Alanları ve Hacimleri Arasındaki İlişkiler

Sonuç 14:

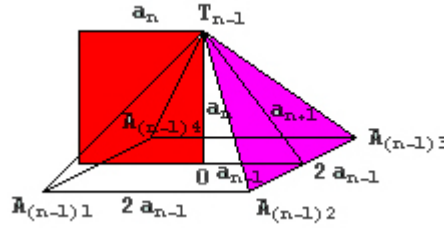
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n TA_{T_k A_{k1} A_{k2} A_{k3} A_{k4}}^2 \text{Piramiti} &= \sum_{k=1}^n (2a_k)^4 = 16 \sum_{k=1}^n a_k^4 = 16 \sum_{k=1}^n H_k^2 = 16(H_n H_{n+1} - H_0 H_1) \\ &= (2a_n)^2 (2a_{n+1})^2 - (2a_0)^2 (2a_1)^2 \\ &= TA_{T_n A_{n1} A_{n2} A_{n3} A_{n4}} \text{Piramiti} TA_{T_{n+1} A_{(n+1)1} A_{(n+1)2} A_{(n+1)3} A_{(n+1)4}} \text{Piramiti} - TA_{T_0 A_{01} A_{02} A_{03} A_{04}} \text{Piramiti} TA_{T_1 A_{11} A_{12} A_{13} A_{14}} \text{Piramiti} \end{aligned}$$

olduğundan

$$(97) \sum_{k=1}^n TA_{T_k A_{k1} A_{k2} A_{k3} A_{k4}}^2 \text{Piramiti} = TA_{T_n A_{n1} A_{n2} A_{n3} A_{n4}} \text{Piramiti} TA_{T_{n+1} A_{(n+1)1} A_{(n+1)2} A_{(n+1)3} A_{(n+1)4}} \text{Piramiti} - TA_{T_0 A_{01} A_{02} A_{03} A_{04}} \text{Piramiti} TA_{T_1 A_{11} A_{12} A_{13} A_{14}} \text{Piramiti}$$

elde edilir.

M.Ö. 450 civarında **Herodot**, “Keops piramitinin her bir yanal yüzünün alanı ile yüksekliği üzerindeki karenin alanı aynıdır” (bkz. “[Tarih](#)”, S. 143, Keops-Piramitler, 124. “beher (yanal) yüzü 800 yüz Plethron boyundadır, kare biçimindedir, yüksekliği de aynıdır”) sözyle



şekildeki mor renkli ikizkenar üçgeninin alanı ile kırmızı renkli karenin alanının aynı söylemiştir; daha doğrusu yaklaşıktır.

Şimdi bu yaklaşımdan hareketle piramitleri alan ve hacimleri arasındaki ilişkileri inceleyelim.

Sonuç 15:

$$YA_{T_{n-1} A_{(n-1)1} A_{(n-1)2} A_{(n-1)3} A_{(n-1)4}} \text{Piramiti} = 4a_{n-1} a_{n+1} \stackrel{(3)}{\cong} (2a_n)^2 = TA_{T_n A_{n1} A_{n2} A_{n3} A_{n4}} \text{Piramiti}$$

nedeniyle şu yaklaşım geçerli olur:

$$(98) YA_{T_{n-1} A_{(n-1)1} A_{(n-1)2} A_{(n-1)3} A_{(n-1)4}} \text{Piramiti} \cong TA_{T_n A_{n1} A_{n2} A_{n3} A_{n4}} \text{Piramiti} .$$

Sonuç 16:

$$BA_{T_{n-1} A_{(n-1)1} A_{(n-1)2} A_{(n-1)3} A_{(n-1)4}} \text{Piramiti} = (2a_{n-1})^2 + 4a_{n-1} a_{n+1} \stackrel{(3)}{\cong} (2a_{n-1})^2 + (2a_n)^2 \stackrel{(4)}{=} (2a_{n+1})^2 = TA_{T_{n+1} A_{(n+1)1} A_{(n+1)2} A_{(n+1)3} A_{(n+1)4}} \text{Piramiti}$$

nedeniyle

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Piramitlerin Alanları ve Hacimleri Arasındaki İlişkiler

$$(99) \text{BA}_{T_{n-1}A_{(n-1)1}A_{(n-1)2}A_{(n-1)3}A_{(n-1)4}} \text{Piramiti} \cong \text{TA}_{T_{n+1}A_{(n+1)1}A_{(n+1)2}A_{(n+1)3}A_{(n+1)4}} \text{Piramiti}$$

elde edilir.

Sonuç 17:

$$H_{T_{n-1}A_{(n-1)1}A_{(n-1)2}A_{(n-1)3}A_{(n-1)4}} \text{Piramiti} = \frac{4}{3} a_{n-1}^2 a_n \stackrel{(3)}{\cong} \frac{4}{3} a_n^2 a_{n-2} = H_{T_{n-3}A_{n1}A_{n2}A_{n3}A_{n4}} \text{Piramiti}$$

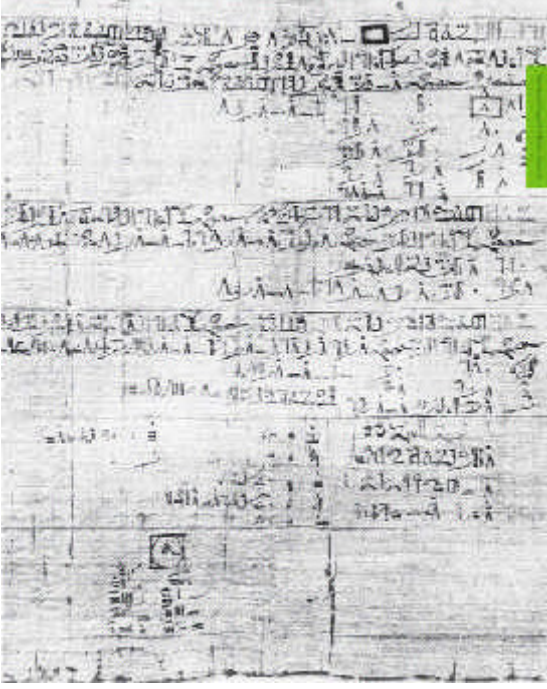
nedeniyle

$$(100) H_{T_{n-1}A_{(n-1)1}A_{(n-1)2}A_{(n-1)3}A_{(n-1)4}} \text{Piramiti} \cong H_{T_{n-3}A_{n1}A_{n2}A_{n3}A_{n4}} \text{Piramiti}$$

elde edilir.

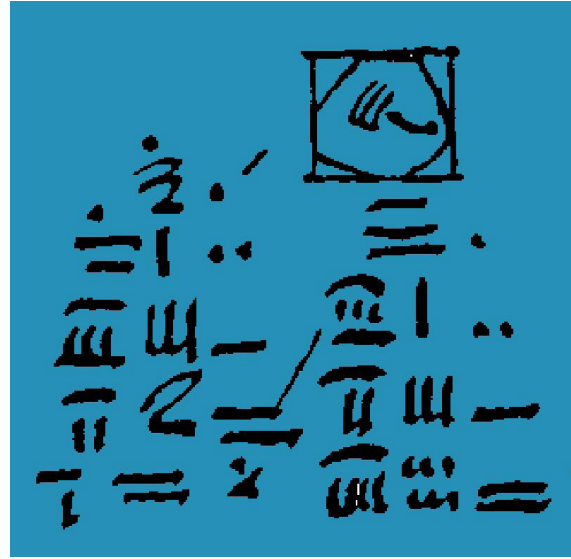
BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Ahmes Papirüsü'ndeki π 'nin Sırrı



En eski matematiksel metinlerden biri olan *Rhind Papirüsü*'ne (ki Rhind Papirüsü'nün adı, 1858'de Luksor'da bu dökümanı satın alan Mısır dil bilimcisi İskoçyalı hukukçu ve antikacı koleksiyoner *Alexander Henry Rhind (1833-1863)*'in adından gelmektedir), M.Ö. 1650 civarında kâtip *Ahmes (M.Ö. 1680- 1620)* 85 matematiksel problemi kopya etti. Yandaki yeşil bantlı bölümde dairesel bir tarlanın alanını açık bir şekilde ifade etmeksizin bir kural verir.

48. problemin metni şu şekildedir:



Mısır dilinin hiyeratik formunda yazılan bu problemin çevirisi şöyledir: “Çapın $1/9$ 'unu götür (yani çaptan $1/9$ 'unu çıkart.) ve kalanın karesini al”.

Modern notasyonla bu işlem aşağıdaki sonucu verir (A: Tarlanın alanı, d: Tarlanın çapı):

$$(101) A_{\text{Daire}} = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2.$$

Burada tarlanın alanı için $A = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$ formülü kullanılırsa,

$$(102) \pi \cong \left(\frac{4}{3}\right)^4 = 3.1(6049382\dots)$$

sonucu elde edilir ki, bu doğruluk o zamanlar için oldukça şaşırtıcıdır ve aynı dairenin alan formülü, Moskova papirüsününün 10. probleminde uygulamalı olarak tekrar karşımıza çıkmaktadır. Bu ise açıkça Büyük Piramit'ten sonra Rhind Papirüsü ve Moskova Papirüsü'nde π için verilen rasyonel yaklaşıklıklar nedeniyle Eski Mısır Matematikinin tartışma götürmez parlak bir başarısıdır.

Burada sorulması gereken soru şudur: “Eski Mısırlılar bu formülü nasıl bulmuşlardı?” Dolayısıyla Eski Mısırlılar'ın bu π değerini (ki M.Ö. 2550 civarında Büyük Piramit'te 2 farklı π değeri daha verilmiştir)

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Ahmes Papirüsü'ndeki π 'nin Sırrı

nasıl bir yoldan bulmuş olduklarıdır. Çünkü bu derecedeki yaklaşık bir değer mutlaka büyük bir çalışmanın ürünü olsa gerek.

Şimdi bu problemin çözümü için de aynı metodu kullanalım.

Metot (Arşimet'in Daire Çevresi Ölçmesi, Önerme 1&2 (Genişletilmiş Versiyon)): Bu metoda göre $a_n = e_n^2$ alınırsa, (4)'ten

$$(103) \quad e_{n-1}^4 + e_n^4 = e_{n+1}^4$$

yine bir Hemon dizisi sözkonusu olur ve Seked Teoremi'ne göre öyle bir m doğal sayısı vardır ki, $e_{m-1} = 8$ ve $e_m = 9$ için $e_{m+1} \cong \sqrt{104}$ olarak alınabilir ve genel olarak sıfırdan farklı herhangi bir k reel sayısı için $(ke_{m-1}, ke_m, ke_{m+1})$ genel yaklaşımı gözönüne alınabilir.

1) Alan Hesabıyla: Önerme 1'e göre dairenin alanı öyle bir dik üçgenin alanına eşittir ki, bu dik üçgenin dik kenarlarından biri dairenin e_m^2 br yarıçapına ve diğeri de çevresine yakın olan ABCD karesinin çevresi $4 \times 2e_{m-1}^2$ br'ye eşit olduğundan

$$(104) \quad C_{\text{Daire}} \cong C_{\text{ABCDKaresi}} \Rightarrow 2\pi e_m^2 \cong 4 \times 2e_{m-1}^2 \Rightarrow \pi \cong \left(\frac{2e_{m-1}}{e_m} \right)^2$$

nedeniyle

$$(105) \quad \pi \cong \left(\frac{16}{9} \right)^2 = \left(\frac{4}{3} \right)^4$$

bulunur. O halde bu sonuçla **Önerme 1'e** göre

$$A_{\text{Daire}} = A_{\text{Dik Üçgen}} = \frac{e_m^2 \times C_{\text{Daire}}}{2} \stackrel{(104)}{\cong} \frac{e_m^2 \times C_{\text{ABCDKaresi}}}{2} = (2e_{m-1}e_m)^2$$

olduğundan

$$(106) \quad A_{\text{Daire}} \cong (2e_{m-1}e_m)^2$$

elde edilir. Buradan **Önerme 2'ye** göre

$$\frac{A_{\text{Daire}}}{A_{\text{EFGHKaresi}}} \stackrel{(106)}{\cong} \frac{(2e_{m-1}e_m)^2}{(2e_m^2)^2} = \left(\frac{e_{m-1}}{e_m} \right)^2 = \left(\frac{8}{9} \right)^2$$

için

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Ahmes Papirüsü'ndeki π 'nin Sırrı

$$(107) \frac{A_{\text{Daire}}}{A_{\text{EFGHKaresi}}} \cong \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

sonucu elde edilir.

Şu halde

$$\frac{\pi}{4} = \frac{A_{\text{Daire}}}{A_{\text{EFGHKaresi}}} \cong \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

nedeniyle

$$(108) \pi \cong \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

yine aynı sonuç bulunur.

Alternatif Çözüm: İkinci çözüm için dairenin alan formülünden yararlanırsak,

$$A_{\text{Daire}} \stackrel{(106)}{\cong} (2e_{m-1}e_m)^2 \Rightarrow \pi e_m^4 \cong (2e_{m-1}e_m)^2 \Rightarrow \pi \cong \left(\frac{2e_{m-1}}{e_m}\right)^2 = \left(\frac{2 \times 8}{9}\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

nedeniyle

$$(109) \pi \cong \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

bulunur.

2) Çevre Hesabıyla: Aynı hesabı çevreler için de yaparsak **Önerme 2'nin 1. ekine** göre

$$\frac{C_{\text{Daire}}}{C_{\text{EFGHKaresi}}} \stackrel{(104)}{\cong} \frac{C_{\text{ABCDKaresi}}}{C_{\text{EFGHKaresi}}} = \left(\frac{e_{m-1}}{e_m}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

olduğundan

$$(110) \frac{C_{\text{Daire}}}{C_{\text{EFGHKaresi}}} \cong \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

elde edilir ki, yine buradan kolaylıkla

$$\frac{\pi}{4} = \frac{C_{\text{Daire}}}{C_{\text{EFGHKaresi}}} \cong \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Ahmes Papirüsü'ndeki π 'nin Sırrı

için

$$(111) \pi \cong \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

bulunur.

Not 9: Çevre hesabıyla **Alternatif Çözüm** (104)&(105)'te gösterilmiştir.

3) Hacim Hesabıyla: Önerme 2'nin 2. eki'ne göre Koni(T, M, e_m^2) (tepe noktası T ve tabanı Daire(M, e_m^2) dairesi) konisi ile TEF_{GH} (tepe noktası T ve tabanı EFGH karesi) piramitinin yükseklikleri aynı olduğundan hacimlerinin oranı alanlarının oranına eşittir. Buna göre

$$\frac{H_{\text{Koni}(T, M, e_m^2)}}{H_{\text{TEFGH Piramiti}}} = \frac{A_{\text{Daire}(M, e_m^2)}}{A_{\text{EFGH Karesi}}} \stackrel{(107)}{\cong} \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

nedeniyle

$$(112) \frac{H_{\text{Koni}(T, M, e_m^2)}}{H_{\text{TEFGH Piramiti}}} \cong \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

elde edilir ve sonuçta

$$\frac{\pi}{4} = \frac{H_{\text{Koni}(T, M, e_m^2)}}{H_{\text{TEFGH Piramiti}}} \cong \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

olduğundan

$$(113) \pi \cong \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

bulunur.

Öte yandan aynı ilişki KABCD piramiti ile Koni(K, M, e_m^2) konisinin hacimleri için de geçerlidir:

$$\frac{H_{\text{KABCD Piramiti}}}{H_{\text{Koni}(K, M, e_m^2)}} = \frac{A_{\text{ABCD Karesi}}}{A_{\text{Daire}(M, e_m^2)}} \stackrel{(106)}{\cong} \frac{(2e_{m-1})^2}{(2e_{m-1}e_m)^2} = \left(\frac{e_{m-1}}{e_m}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

nedeniyle

BÖLÜM 1: Büyük Piramit'teki π 'nin Sırrı

Ahmes Papirüsü'ndeki π 'nin Sırrı

$$(114) \frac{H_{\text{KABCDPiramiti}}}{H_{\text{Koni}(K,M,e_m^2)}} \cong \left(\frac{8}{9}\right)^2.$$

Dolayısıyla bu ilişkiden π için yine aynı sonuç elde edilir, yani

$$\frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^4 = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{e_{m-1}}{e_m}\right)^4 = \frac{H_{\text{KABCDPiramiti}}}{H_{\text{Koni}(K,M,e_m^2)}} \cong \left(\frac{8}{9}\right)^2 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \cong \left(\frac{16}{9}\right)^2$$

olduğundan

$$(115) \pi \cong \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

bulunur.

D. PAMUKTULUM

BÖLÜM 2: ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

m. Mertebeden Hemon Dizisi'ndeki x_m 'nin (m-1)-inci Dereceden Polinomlarının Terslerinin Ters Tanjantları İçin Ters Tanjant Özdeşlikleriyle π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

Temel Form: $m, n \in \mathbb{Z}^+, k (\neq 0), a_{i,j}, b_i \in \mathbb{Z}$ için

$$(1) P_{m-1}(x_m) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j} x_m^j$$

polinomuyla

$$(2) \frac{k\pi}{4} = \sum_{i=1}^n b_i \text{Tan}^{-1} \frac{1}{P_{m-1}(x_m)}$$

özdeşliklerinin var olup olmadıklarını araştıralım.

1. $x_1 = 1$ ise: Bu kök için yalnızca

$$(3) \frac{\pi}{4} = \text{Tan}^{-1} 1$$

özdeşliği vardır.

2. $x_2 = \phi$ ise: Bu kök için derhal

$$(4) P_1(\phi) = \sum_{j=0}^1 a_{i,j} \phi^j = a_{i,1} \phi + a_{i,0} = F_i \phi + F_{i-1} = \phi^i$$

polinomuyla

$$(5) \frac{k\pi}{4} = \sum_{i=1}^n b_i \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^i}$$

özdeşliklerinin varolduğu gösterilebilir ve bunları bulabilmek için ilkin $x = \phi^p, y = \phi^q$ ($p, q \in \mathbb{Z}^+$) için

$$(6) \text{Tan}^{-1} \frac{1}{x} + \text{Tan}^{-1} \frac{1}{y} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{z}$$

olacak şekilde z tam (rasyonel) sayısını veren temel özdeşliğinden yararlanabiliriz ve **Machin türü özdeşlikleri**yle istenildiği kadar (5) türünde özdeşlikler verilebilir.

Tad'ın Metodu

Bunun için akla gelen en kolay metot **Tadaaki Ohno (Tokyo Üniversitesi, Temmuz 1999)** tarafından

$$(7) (x-z)(y-z) = z^2 + 1$$

BÖLÜM 2: ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

şeklinde verilen çözüm formülüdür. *Hwang Chien-lih* bu metodun *Lewis Carroll* tarafından daha önceden bilindiğini bildirmektedir (Bkz. *C.L. Dodgson*).

Bu metot (6) türündeki özdeşliklerin onaylanması bakımından son derece yararlıdır, ancak (2), dolayısıyla (5) türündeki özdeşliklerin bulunması için çok zaman ve çalışma ister. Örneğin (5) türündeki bir özdeşlik ilk olarak *Oberg (2000)* tarafından

$$(8) \quad \tan^{-1} \frac{1}{\phi} + \tan^{-1} \frac{1}{\phi^3} = \frac{\pi}{4}$$

şeklinde verilen özdeşliği bu metotla onaylamak son derece kolaydır. Çünkü $z = 1$ için (7)'den

$$(x-1)(y-1) = 1^2 + 1 = 2 = 2 \times 1 = 2(\phi^2 - \phi) = 2\phi(\phi-1)$$

eşitliğinde

$$x-1 = \phi-1, y-1 = 2\phi$$

seçimleri yapılırsa

$$x-1 = \phi-1 \Rightarrow x = \phi$$

$$y-1 = 2\phi \Rightarrow y = 2\phi+1 = \phi^3$$

elde edilir ki x, y, z (6)'da yerine konulursa (8) bulunur.

Şu halde bu metotla (5) türünde (8) özdeşliği gibi yeni özdeşlikler bulunabilir. Ancak bunun için çok zaman ve çok çalışma gerekir. Bunun yerine aşağıdaki metotla (5) türünde istenildiği kadar, hem de daha kolay bir şekilde özdeşlikler bulunabilir. Ama burada da aynı şeyin geçerli olduğunu unutmayalım.

ATA'nın Metodu (*Derya PAMUKTULUM, 22 Temmuz 2004 Perşembe 00:49:54*)

Kronolojik sıralamasına bakılırsa, (5) türündeki özdeşliklerden ilkinin *Oberg* verdikten sonra 2002'nin sonlarında 11 tane örnek ve 2003'ün başında da 2 tane genel formül vermiştim. Şimdi bu alanda esaslı bir çalışma için aşağıda yepyeni bir metot vererek, (5) türündeki formüllerin nasıl elde edildiğini örnekleriyle birlikte göstereceğim. Bu metot genel olarak (5) tipindeki gibi (2) için de geçerlidir.

Not 1: Bu metoda "*ATA'nın Metodu*" adını verdim. Çünkü nasıl ki *Rudolf Gantenbrink*'in hayali çocukluğundan beri büyük ilgi duyduğu Giza piramitlerini, özellikle de "*Büyük Piramit*" olarak bilinen Khufu piramitini incelemek idiyse, benim de matematiği esaslı bir şekilde bir bilim olarak algıladığım üniversiteden beri bir hayalim vardı: Gerçi o zamanlar öğretim üyelerimiz matematikte yaratıcılık döneminin geride kaldığını ve bu nedenle artık keşfedilecek bir şey kalmadığını bize hep söylediler. Bu ifade net olmamakla birlikte eğer elimde yeni bir metot veya teorem geçerse *ATA*'nın adını vermeye söz vermiştim. Kaldı ki, buradaki metot, genel bir metot olması nedeniyle, son derece önemlidir.

2 Terim İçin Toplam Formülü: Bu toplam formülü $p, q \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{Q}$ için

$$(9) \quad \tan^{-1} \frac{1}{\phi^p} + \tan^{-1} \frac{1}{\phi^q} = \tan^{-1} \frac{1}{z_{p,q}}$$

BÖLÜM 2: ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

formunda olup özdeşliğin her iki yanının tanjantı alınırsa,

$$(10) z_{p,q} = \frac{\phi^{p+q} - 1}{\phi^p + \phi^q} = \frac{F_{p+q}\phi + F_{p+q-1} - 1}{(F_p + F_q)\phi + F_{p-1} + F_{q-1}}$$

elde edilir. O halde burada pozitif p ve q tam sayıları için z tam (rasyonel) sayısını aradığımızdan ϕ için polinomlardaki özdeşlikten

$$(11) z_{p,q} = \frac{F_{p+q}}{F_p + F_q}, \frac{F_{p+q-1} - 1}{F_{p-1} + F_{q-1}}$$

eşitlikleri elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned} \frac{F_{p+q}}{F_p + F_q} &= \frac{F_{p+q-1} - 1}{F_{p-1} + F_{q-1}} \Rightarrow F_p + F_q = (F_{p+q-1}F_p - F_{p+q}F_{p-1}) + (F_{p+q-1}F_q - F_{p+q}F_{q-1}) \\ &= (-1)^{p-1}F_q + (-1)^{q-1}F_p \Rightarrow \frac{F_p}{F_q} = -\frac{1 + (-1)^p}{1 + (-1)^q} \end{aligned}$$

eşitlikleri nedeniyle

$$(12) \frac{F_p}{F_q} = -\frac{1 + (-1)^p}{1 + (-1)^q}$$

sonucu bulunur.

Şu halde toplam formülündeki $z_{p,q}$ için aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar:

Sonuçlar

Sonuç 1: p tek ise q tektir. Tersine q tek ise p tektir.

Sonuç 2: p ve q tek ise z bir rasyonel sayıdır.

Sonuç 3 (Simetri Özelliği):

$$(13) z_{p,q} = z_{q,p}$$

simetri (değişme) özelliği vardır.

Sonuç 4 (Tek Fonksiyon Özelliği):

$$(14) z_{-p,-q} = -z_{p,q}$$

tek fonksiyon olma özelliği vardır.

BÖLÜM 2: ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

Sonuç 5: $p+q=0$ için $z_{p,q} = 0$ olduğundan

$$(15) \quad z_{r,-r} = 0 = z_{-r,r}$$

elde edilir.

Sonuç 6 ($z_{p,q}$ 'lar ile Lucas Sayıları ve Fibonacci Sayıları Arasındaki İlişkiler): a tam sayı ve $\phi^{-b} + 1 \neq 0$ olacak şekilde b herhangi bir sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} z_{a,a-b} + z_{a,a+b} &= \frac{\phi^{2a-b} - 1}{\phi^a + \phi^{a-b}} + \frac{\phi^{2a+b} - 1}{\phi^a + \phi^{a+b}} = \frac{\phi^{2a-b} - 1 + \phi^{2a} - \phi^{-b}}{\phi^a + \phi^{a-b}} = \frac{\phi^{2a}(\phi^{-b} + 1) - (\phi^{-b} + 1)}{\phi^a(\phi^{-b} + 1)} \\ &= \frac{(\phi^{2a} - 1)(\phi^{-b} + 1)}{\phi^a(\phi^{-b} + 1)} = \frac{\phi^{2a} - 1}{\phi^a} = \phi^a - \phi^{-a} = \begin{cases} \phi^a + (-\phi)^{-a} = L_a, & a \text{ tek tam sayı ise} \\ \phi^a - \phi^{-a} = F_a \sqrt{5}, & a \text{ çift tam sayı ise} \end{cases} \end{aligned}$$

olduğundan

$$(16) \quad z_{a,a-b} + z_{a,a+b} = \begin{cases} L_a, & a \text{ tek tam sayı ise} \\ F_a \sqrt{5}, & a \text{ çift tam sayı ise} \end{cases}$$

formülü bulunur.

Sonuç 7: r tek tam sayı olmak üzere $a = 3r, b = 0$ için (16)'dan

$$z_{3r,3r} + z_{3r,3r} = L_{3r}$$

olduğundan

$$(17) \quad z_{3r,3r} = \frac{L_{3r}}{2}$$

bulunur ki her r tek tam sayısı için $z_{3r,3r}$ bir tam sayıdır.

Sonuç 8: r tek tam sayı olmak üzere

1. $a = r, b = 2r$ için

$$z_{r,-r} + z_{r,3r} = L_r$$

(16)'dan

$$(18) \quad z_{r,3r} = L_r$$

elde edilir. Aynı sonuç $a = r, b = -2r$ için de elde edilir.

BÖLÜM 2: ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

2. $a = -r, b = -2r$ için

$$z_{-r,r} + z_{-r,-3r} = L_{-r}$$

(16)'dan

$$(19) z_{-r,-3r} = L_{-r}$$

elde edilir. Aynı sonuç $a = -r, b = 2r$ için de elde edilir.

Sonuç 9 (İndirgeme Formülü): r tek tam sayı olmak üzere $z_{3r,r} \stackrel{(13)}{=} z_{r,3r} = L_r$ için (16)'dan

$$z_{3r,r} + z_{3r,5r} = L_{3r} \Rightarrow z_{3r,5r} = L_{3r} - z_{3r,r} = L_{3r} - L_r$$

olduğundan

$$(20) z_{3r,5r} = L_{3r} - L_r$$

elde edilir.

Bu sonuçla eğer $z_{5r,3r} \stackrel{(13)}{=} z_{3r,5r} = L_{5r}$ bağıntısını alırsak (16)'dan

$$z_{5r,3r} + z_{5r,7r} = L_{5r} \Rightarrow z_{5r,7r} = L_{5r} - z_{5r,3r} = L_{5r} - L_{3r} + L_r$$

olduğundan

$$(21) z_{5r,7r} = L_{5r} - L_{3r} + L_r$$

elde edilir.

Sonuçta bu işlem bu şekilde devam ettirilirse r ve s tek tam sayısı için

$$(22) z_{sr,(s+2)r} = \sum_{k=0}^{\frac{s-1}{2}} (-1)^k L_{(s-2k)r}$$

şeklindeki genel formülü bulmuş oluruz!

Sonuç 10: (22)'ye göre

$$2F_{s+1} = \sum_{k=0}^s (-1)^k L_{s-2k} = z_{s,s+2} - z_{-s,-(s+2)} \stackrel{(14)}{=} 2z_{s,s+2}$$

olduğundan

BÖLÜM 2: ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

$$(23) z_{s,s+2} = F_{s+1}$$

bulunur.

Sonuç 11: (23)'ten

$$\begin{aligned} \tan^{-1} \frac{1}{\phi^{s-2}} + \tan^{-1} \frac{1}{\phi^s} &= \tan^{-1} \frac{1}{F_{s-1}} \\ \tan^{-1} \frac{1}{\phi^s} + \tan^{-1} \frac{1}{\phi^{s+2}} &= \tan^{-1} \frac{1}{F_{s+1}} \\ \hline \tan^{-1} \frac{1}{\phi^{s-2}} - \tan^{-1} \frac{1}{\phi^{s+2}} &= \tan^{-1} \frac{1}{F_{s-1}} - \tan^{-1} \frac{1}{F_{s+1}} = \tan^{-1} \frac{1}{F_s} \end{aligned}$$

olduğundan

$$(24) \tan^{-1} \frac{1}{\phi^{s-2}} - \tan^{-1} \frac{1}{\phi^{s+2}} = \tan^{-1} \frac{1}{F_s}$$

özdeşliği bulunur.

2 Terim İçin Fark Formülü: Bu fark formülü de $p, q \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Q}$ için

$$(25) \tan^{-1} \frac{1}{\phi^p} - \tan^{-1} \frac{1}{\phi^q} = \tan^{-1} \frac{1}{t_{p,q}}$$

formunda olup özdeşliğin her iki yanının tanjantı alınır,

$$(26) t_{p,q} = \frac{\phi^{p+q} + 1}{-\phi^p + \phi^q} = \frac{F_{p+q}\phi + F_{p+q-1} + 1}{(-F_p + F_q)\phi - F_{p-1} + F_{q-1}}$$

elde edilir. O halde burada da pozitif p ve q tam sayıları için t tam (rasyonel) sayısını aradığımızdan ϕ için polinomlardaki özdeşlikten

$$(27) t_{p,q} = \frac{F_{p+q}}{-F_p + F_q}, \frac{F_{p+q-1} + 1}{-F_{p-1} + F_{q-1}}$$

eşitlikleri elde edilir ve buradan da

$$\begin{aligned} \frac{F_{p+q}}{-F_p + F_q} &= \frac{F_{p+q-1} + 1}{-F_{p-1} + F_{q-1}} \Rightarrow -F_p + F_q = (F_{p+q-1}F_p - F_{p+q}F_{p-1}) - (F_{p+q-1}F_q - F_{p+q}F_{q-1}) \\ &= (-1)^{p-1}F_q - (-1)^{q-1}F_p \Rightarrow \frac{F_p}{F_q} = \frac{1 + (-1)^p}{1 + (-1)^q} \end{aligned}$$

eşitlikleri nedeniyle

BÖLÜM 2: ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

$$(28) \frac{F_p}{F_q} = \frac{1+(-1)^p}{1+(-1)^q}$$

sonucu bulunur. Burada da **Sonuç 1&2** geçerli olmak üzere $t_{p,q}$ için aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar:

Sonuçlar

Sonuç 12 (Ters Simetri Özelliği):

$$(29) t_{p,q} = -t_{q,p}$$

ters simetri özelliği vardır.

Sonuç 13 (Tek Fonksiyon Özelliği):

$$(30) t_{-p,-q} = -t_{p,q}$$

tek fonksiyon olma özelliği vardır.

Sonuç 14 ($t_{p,q}$ 'lar ile Lucas Sayıları ve Fibonacci Sayıları Arasındaki İlişkiler): a tam sayı ve $\phi^{-b} - 1 \neq 0$ olacak şekilde b herhangi bir sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} t_{a,a-b} + t_{a,a+b} &= \frac{\phi^{2a-b} + 1}{-\phi^a + \phi^{a-b}} + \frac{\phi^{2a+b} + 1}{-\phi^a + \phi^{a+b}} = \frac{\phi^{2a-b} + 1 - \phi^{2a} - \phi^{-b}}{-\phi^a + \phi^{a-b}} = \frac{\phi^{2a}(\phi^{-b} - 1) - (\phi^{-b} - 1)}{\phi^a(\phi^{-b} - 1)} \\ &= \frac{(\phi^{2a} - 1)(\phi^{-b} - 1)}{\phi^a(\phi^{-b} - 1)} = \frac{\phi^{2a} - 1}{\phi^a} = \phi^a - \phi^{-a} = \begin{cases} \phi^a + (-\phi)^{-a} = L_a, & a \text{ tek tam sayı ise} \\ \phi^a - \phi^{-a} = F_a \sqrt{5}, & a \text{ çift tam sayı ise} \end{cases} \end{aligned}$$

olduğundan

$$(31) t_{a,a-b} + t_{a,a+b} = \begin{cases} L_a, & a \text{ tek tam sayı ise} \\ F_a \sqrt{5}, & a \text{ çift tam sayı ise} \end{cases}$$

formülasyonu bulunur.

Sonuç 15: s tam sayısı için

$$\begin{aligned} t_{s,s+2} &= \frac{\phi^{2s+2} + 1}{-\phi^s + \phi^{s+2}} = \frac{\phi^{2s+2} + 1}{\phi^s(\phi^2 - 1)} = \frac{\phi^{2s+2} + 1}{\phi^{s+1}} = \phi^{s+1} + \phi^{-(s+1)} \\ &= \phi^{s+1} + (-\phi)^{-(s+1)} = \begin{cases} \phi^{s+1} + (-\phi)^{-(s+1)} = L_{s+1}, & s \text{ tek tam sayı ise} \\ \phi^{s+1} - (-\phi)^{-(s+1)} = F_{s+1} \sqrt{5}, & s \text{ çift tam sayı ise} \end{cases} \end{aligned}$$

olduğundan

BÖLÜM 2: ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

$$(32) \quad t_{s,s+2} = \begin{cases} L_{s+1}, & s \text{ tek tam sayı ise} \\ F_{s+1}\sqrt{5}, & s \text{ çift tam sayı ise} \end{cases}$$

elde edilir.

Sonuç 16: s tam sayısı için

$$\begin{aligned} t_{s-2,s+2} &= \frac{\phi^{2s} + 1}{-\phi^{s-2} + \phi^{s+2}} = \frac{\phi^{2s} + 1}{\phi^{s-2}(\phi^4 - 1)} = \frac{\phi^{2s} + 1}{\phi^{s-2}(\phi^2 - 1)(\phi^2 + 1)} = \frac{\phi^{2s} + 1}{\phi^{s-2}\phi\sqrt{5}} \\ &= \frac{\phi^s + \phi^{-s}}{\sqrt{5}} = \begin{cases} \frac{\phi^s - (-\phi)^{-s}}{\sqrt{5}} = F_s, & s \text{ tek tam sayı ise} \\ \frac{\phi^s + (-\phi)^{-s}}{\sqrt{5}} = \frac{L_s}{\sqrt{5}}, & s \text{ çift tam sayı ise} \end{cases} \end{aligned}$$

olduğundan

$$(33) \quad t_{s-2,s+2} = \begin{cases} F_s, & s \text{ tek tam sayı ise} \\ \frac{L_s}{\sqrt{5}}, & s \text{ çift tam sayı ise} \end{cases}$$

elde edilir. Bu sonuçtaki ilk eşitlik **Sonuç 11**'de bulunmuştu!

Sonuç 17: s tek tam sayısı için

$$\begin{aligned} t_{s,s-2} + t_{s,s+2} &\stackrel{(31)}{=} L_s \Rightarrow t_{s,s-2} = L_s - t_{s,s+2} \stackrel{(32)}{=} L_s - L_{s+1} = L_s - L_s - L_{s-1} = -L_{s-1} \\ &\stackrel{(29)}{\Rightarrow} -t_{s-2,s} = t_{s,s-2} = -L_{s-1} \Rightarrow t_{s-2,s} = L_{s-1} \end{aligned}$$

olduğundan

$$(34) \quad t_{s-2,s} = L_{s-1}$$

elde edilir. Bu sonuç **Sonuç 15**'te bulunmuştu!

Sonuç 18: s tek tam sayısı için

$$\begin{aligned} t_{s-2,s-6} + t_{s-2,s+2} &\stackrel{(31)}{=} L_{s-2} \Rightarrow t_{s-2,s-6} = L_{s-2} - t_{s-2,s+2} \stackrel{(33)}{=} L_{s-2} - F_s = -F_{s-4} \\ &\stackrel{(29)}{\Rightarrow} -t_{s-6,s-2} = t_{s-2,s-6} = -F_{s-4} \Rightarrow t_{s-6,s-2} = F_{s-4} \end{aligned}$$

olduğundan

$$(35) \quad t_{s-6,s-2} = F_{s-4}$$

BÖLÜM 2: ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

elde edilir. Bu sonuç da **Sonuç 16**'da bulunmuştu!

Not 2: Bu yöntemle elde edilen diğer $t_{p,q}$ 'lar da aynı sonuçları üretirler.

Sonuç 19: s tek tam sayısı için

$$\begin{aligned}\tan^{-1} \frac{1}{\phi^{s-2}} - \tan^{-1} \frac{1}{\phi^s} &= \tan^{-1} \frac{1}{L_{s-1}} \\ \tan^{-1} \frac{1}{\phi^s} - \tan^{-1} \frac{1}{\phi^{s+2}} &= \tan^{-1} \frac{1}{L_{s+1}} \\ \hline \tan^{-1} \frac{1}{\phi^{s-2}} - \tan^{-1} \frac{1}{\phi^{s+2}} &= \tan^{-1} \frac{1}{L_{s-1}} + \tan^{-1} \frac{1}{L_{s+1}} = \tan^{-1} \frac{1}{F_s}\end{aligned}$$

olduğundan

$$(36) \tan^{-1} \frac{1}{\phi^{s-2}} - \tan^{-1} \frac{1}{\phi^{s+2}} = \tan^{-1} \frac{1}{F_s}$$

yine **Sonuç 11**'deki (24) özdeşliği bulunur.

Örnekler

Örnek 1 (Oberg, 2000):

$$(37) \frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1$$

formülünde

$$\tan^{-1} 1 \stackrel{(18)}{=} \tan^{-1} \frac{1}{L_1} = \tan^{-1} \frac{1}{\phi} + \tan^{-1} \frac{1}{\phi^3}$$

olduğundan

$$(38) \frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{1}{\phi} + \tan^{-1} \frac{1}{\phi^3}$$

şeklinde **Oberg**'in formülü elde edilir.

Not 3: Bu formülü **Ed Oberg** ve **Jay A. Johnson**'un "[The Pi-Phi Product](#)" makalesinde bulabilirsiniz.

Örnek 2 (Derya PAMUKTULUM, 03.09.2004 02:00): 1738'de **Euler** tarafından verilen

$$(39) \frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}$$

formülünde

BÖLÜM 2: ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

$$\begin{aligned}\text{Tan}^{-1} \frac{1}{2} &\stackrel{(33)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{F_3} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5} \\ \text{Tan}^{-1} \frac{1}{3} &\stackrel{(23)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{F_4} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3} + \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5}\end{aligned}$$

olduğundan yine (38)'deki formül bulunur.

Ya da burada

$$\text{Tan}^{-1} \frac{1}{3} \stackrel{(34)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{L_2} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3}$$

olduğundan

$$(40) \quad \frac{\pi}{4} = 2\text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5}$$

formülü bulunur.

Örnek 3 (*Derya PAMUKTULUM, 30.12.2002 21:20*): 1706'da **Hermann** tarafından verilen

$$(41) \quad \frac{\pi}{4} = 2\text{Tan}^{-1} \frac{1}{2} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{7}$$

formülünde

$$\begin{aligned}\text{Tan}^{-1} \frac{1}{2} &\stackrel{(33)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{F_3} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5} \\ \text{Tan}^{-1} \frac{1}{7} &\stackrel{(34)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{L_4} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5}\end{aligned}$$

olduğundan yine (40)'daki formül bulunur.

Ya da

$$\text{Tan}^{-1} \frac{1}{2} \stackrel{(34)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{L_0} = \text{Tan}^{-1} \phi - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi} = \frac{\pi}{2} - 2\text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi}$$

olduğundan

$$(42) \quad \frac{3\pi}{4} = 4\text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi} + \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5}$$

formülü bulunur.

BÖLÜM 2: ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

Örnek 4 (Derya PAMUKTULUM, 30.12.2002 21:30): 1776'da **Hutton** tarafından verilen

$$(43) \frac{\pi}{4} = 2\text{Tan}^{-1} \frac{1}{3} + \text{Tan}^{-1} \frac{1}{7}$$

formülünde

$$\text{Tan}^{-1} \frac{1}{3} \stackrel{(23)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{F_4} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3} + \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5}$$

$$\text{Tan}^{-1} \frac{1}{3} \stackrel{(34)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{L_2} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3}$$

$$\text{Tan}^{-1} \frac{1}{7} \stackrel{(34)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{L_4} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5}$$

olduğundan

$$(44) \frac{\pi}{4} = 3\text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3} + \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5}$$

formülü yani (40)'daki formül bulunur.

Örnek 5 (Derya PAMUKTULUM, 31.12.2002 22:00): 1896'da **Störmer** tarafından verilen

$$(45) \frac{\pi}{4} = 2\text{Tan}^{-1} \frac{1}{2} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{5} + \text{Tan}^{-1} \frac{1}{18}$$

formülünde

$$\text{Tan}^{-1} \frac{1}{2} \stackrel{(33)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{F_3} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5}$$

$$\text{Tan}^{-1} \frac{1}{5} \stackrel{(33)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{F_5} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^7}$$

$$\text{Tan}^{-1} \frac{1}{18} \stackrel{(32)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{L_6} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^7}$$

olduğundan yine (40)'daki formül bulunur.

Örnek 6 (Derya PAMUKTULUM, 31.12.2002 22:15): Yine 1896'da **Störmer** tarafından verilen

$$(46) \frac{\pi}{4} = 2\text{Tan}^{-1} \frac{1}{3} + \text{Tan}^{-1} \frac{1}{5} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{18}$$

formülünde

BÖLÜM 2: ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

$$\begin{aligned}\text{Tan}^{-1} \frac{1}{3} &\stackrel{(23)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{F_4} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3} + \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5} \\ \text{Tan}^{-1} \frac{1}{3} &\stackrel{(34)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{L_2} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3} \\ \text{Tan}^{-1} \frac{1}{5} &\stackrel{(33)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{F_5} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^7} \\ \text{Tan}^{-1} \frac{1}{18} &\stackrel{(32)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{L_6} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^7}\end{aligned}$$

olduğundan (40) ve (44)'deki formüller bulunur.

Veya

$$(47) \quad \frac{\pi}{4} = 3\text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi} - 3\text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3} - 2\text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5}$$

formülü bulunur.

Örnek 7 (Derya PAMUKTULUM, 31.12.2002 22:42):

$$(48) \quad \frac{\pi}{4} = 3\text{Tan}^{-1} \frac{1}{7} + 4\text{Tan}^{-1} \frac{1}{13} + 2\text{Tan}^{-1} \frac{1}{55} + 2\text{Tan}^{-1} \frac{1}{123}$$

formülünden

$$(49) \quad \frac{\pi}{4} = -4\text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi} + 11\text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3} + 5\text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5}$$

formülü bulunur.

Örnek 8 (Derya PAMUKTULUM, 30.12.2002 02:35): Genel olarak her x reel sayısı için

$$(50) \quad \pi = \frac{4x+3}{x+1} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi} + \frac{4x+6}{x+1} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3} + \frac{1}{x+1} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5}$$

formülü vardır.

İspat (Derya PAMUKTULUM, 03.09.2004 22:00): Her x ve y reel sayısı için

$$(51) \quad \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} = \frac{1}{2i} \text{Ln} \frac{x+yi}{x-yi}$$

ve p tek tam sayısı için

$$(52) \quad \frac{\phi^p + i}{\phi^p - i} = \frac{L_p + 2i}{F_p \sqrt{5}}$$

olduğundan (50) özdeşliği

BÖLÜM 2: ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

$$\frac{\pi}{4} = \text{Tan}^{-1}1 = \frac{1}{2i} \text{Ln} \frac{1+i}{1-i}$$

için

$$\frac{4}{2i} \text{Ln} \frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{2i} \frac{4x+3}{x+1} \text{Ln} \frac{\phi+i}{\phi-i} + \frac{1}{2i} \frac{4x+6}{x+1} \text{Ln} \frac{\phi^3+i}{\phi^3-i} + \frac{1}{2i} \frac{1}{x+1} \text{Ln} \frac{\phi^5+i}{\phi^5-i}$$

şeklinde yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} 4(x+1) \text{Ln} \frac{1+i}{1-i} &= (4x+3) \text{Ln} \frac{\phi+i}{\phi-i} + (4x+6) \text{Ln} \frac{\phi^3+i}{\phi^3-i} + \text{Ln} \frac{\phi^5+i}{\phi^5-i} \Rightarrow \\ \text{Ln} \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{4(x+1)} &= \text{Ln} \left(\frac{\phi+i}{\phi-i} \right)^{4x+3} + \text{Ln} \left(\frac{\phi^3+i}{\phi^3-i} \right)^{4x+6} + \text{Ln} \frac{\phi^5+i}{\phi^5-i} \\ &= \text{Ln} \left[\left(\frac{\phi+i}{\phi-i} \right)^{4x+3} \left(\frac{\phi^3+i}{\phi^3-i} \right)^{4x+6} \left(\frac{\phi^5+i}{\phi^5-i} \right) \right] \end{aligned}$$

nedeniyle

$$\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{4(x+1)} = \left(\frac{\phi+i}{\phi-i} \right)^{4x+3} \left(\frac{\phi^3+i}{\phi^3-i} \right)^{4x+6} \left(\frac{\phi^5+i}{\phi^5-i} \right)$$

özdeşliği elde edilir. Bu özdeşlikte (52) bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (1=i)^{4(x+1)} &= \left(\frac{L_1+2i}{F_1\sqrt{5}} \right)^{4x+3} \left(\frac{L_3+2i}{F_3\sqrt{5}} \right)^{4x+6} \left(\frac{L_5+2i}{F_5\sqrt{5}} \right) = \left(\frac{1+2i}{\sqrt{5}} \right)^{4x+3} \left(\frac{4+2i}{2\sqrt{5}} \right)^{4x+6} \left(\frac{11+2i}{5\sqrt{5}} \right) \\ &= \frac{(1+2i)^{4x+3} (2+i)^{4x+6} (11+2i)}{5^{4x+6}} = - \frac{(1+2i)^{4x+6} (2+i)^{4x+6}}{5^{4x+6}} = \frac{(2-i)^{4x+6} (2+i)^{4x+6}}{5^{4x+6}} \\ &= \frac{((2-i)(2+i))^{4x+6}}{5^{4x+6}} = \frac{5^{4x+6}}{5^{4x+6}} = 1 \end{aligned}$$

eşitliklerinden (50) özdeşliğinin doğru olduğu sonucu çıkar.

Sonuç 20: Örnek 8'den hareketle hangi k tam sayısı ve a, b, c reel sayıları için

$$(53) \frac{k\pi}{4} = a \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi} + b \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3} + c \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5}$$

formülünün var olduğunu araştırabiliriz.

Bu sefer π için

$$(54) \pi = -2i \text{Ln} i$$

BÖLÜM 2: ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

formülünü kullanırsak,

$$\frac{k\pi}{4} = \frac{k}{2i} \text{Lni}$$

eşitliğini derhal yazabiliriz. O halde (53) özdeşliği

$$\frac{k}{2i} \text{Lni} = \frac{a}{2i} \text{Ln} \frac{\phi+i}{\phi-i} + \frac{b}{2i} \text{Ln} \frac{\phi^3+i}{\phi^3-i} + \frac{c}{2i} \text{Ln} \frac{\phi^5+i}{\phi^5-i}$$

şeklinde yazılabildiğinden

$$\begin{aligned} k\text{Lni} &= a\text{Ln} \frac{\phi+i}{\phi-i} + b\text{Ln} \frac{\phi^3+i}{\phi^3-i} + c\text{Ln} \frac{\phi^5+i}{\phi^5-i} \Rightarrow \\ \text{Lni}^k &= \text{Ln} \left(\frac{\phi+i}{\phi-i} \right)^a + \text{Ln} \left(\frac{\phi^3+i}{\phi^3-i} \right)^b + \text{Ln} \left(\frac{\phi^5+i}{\phi^5-i} \right)^c = \text{Ln} \left[\left(\frac{\phi+i}{\phi-i} \right)^a \left(\frac{\phi^3+i}{\phi^3-i} \right)^b \left(\frac{\phi^5+i}{\phi^5-i} \right)^c \right] \end{aligned}$$

nedeniyle

$$(55) \quad i^k = \left(\frac{\phi+i}{\phi-i} \right)^a \left(\frac{\phi^3+i}{\phi^3-i} \right)^b \left(\frac{\phi^5+i}{\phi^5-i} \right)^c$$

özdeşliği elde edilir ki, bu özdeşlikte de (52) bağıntısı kullanılırsa, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} i^k &= \left(\frac{L_1+2i}{F_1\sqrt{5}} \right)^a \left(\frac{L_3+2i}{F_3\sqrt{5}} \right)^b \left(\frac{L_5+2i}{F_5\sqrt{5}} \right)^c = \left(\frac{1+2i}{\sqrt{5}} \right)^a \left(\frac{4+2i}{2\sqrt{5}} \right)^b \left(\frac{11+2i}{5\sqrt{5}} \right)^c \\ &= \frac{(1+2i)^a (2+i)^b (11+2i)^c}{\sqrt{5}^{a+b+3c}} = \frac{(1+2i)^a (2+i)^b (-(1+2i)^3)^c}{\sqrt{5}^{a+b+3c}} \\ &= i^{(4k_1+1)a+(4k_2+5)c} \frac{(2-i)^{a+3c} (2+i)^b}{\sqrt{5}^{a+b+3c}} \end{aligned}$$

özdeşliği

$$(56) \quad k = (4k_1 + 1)a + (4k_2 + 5)c \equiv a + c \pmod{4}, \quad b = a + 3c$$

için gerçekleşir. Bu özdeşlik ile (53)'ün aynı anda gerçekleşmesi için $k_1 = 0, k_2 = -1$ alınması yeterlidir!

Şu halde $a + c =: d$ dersek (53)'ten her c ve d reel sayısı için şu formül geçerli olur:

$$(57) \quad \frac{d\pi}{4} = (d-c) \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi} + (d+2c) \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3} + c \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^5}.$$

BÖLÜM 2: ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

Örnek 9 (*Derya PAMUKTULUM, 31.12.2002 23:45*):

$$(58) \frac{\pi}{4} = 2\text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^2} + \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^6}$$

formülü vardır.

İspat: Öncelikle p çift tam sayısı için

$$(59) \frac{\phi^p + i}{\phi^p - i} = \frac{F_p \sqrt{5} + 2i}{L_p}$$

olduğundan genel olarak hangi k tam sayısı ve a ve b reel sayısı için

$$(60) \frac{k\pi}{4} = a\text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^2} + b\text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^6}$$

formülünün geçerli olduğunu gösterelim. Yani bu formülden

$$\frac{k}{2i} \text{Lni} = \frac{a}{2i} \text{Ln} \frac{\phi^2 + i}{\phi^2 - i} + \frac{b}{2i} \text{Ln} \frac{\phi^6 + i}{\phi^6 - i}$$

olup

$$(61) i^k = \left(\frac{\phi^2 + i}{\phi^2 - i} \right)^a \left(\frac{\phi^6 + i}{\phi^6 - i} \right)^b$$

özdeşliği elde edilir ki, bu özdeşlikte (59) bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} i^k &= \left(\frac{F_2 \sqrt{5} + 2i}{L_2} \right)^a \left(\frac{F_6 \sqrt{5} + 2i}{L_6} \right)^b = \left(\frac{\sqrt{5} + 2i}{3} \right)^a \left(\frac{8\sqrt{5} + 2i}{18} \right)^b \\ &= \frac{(\sqrt{5} + 2i)^a (4\sqrt{5} + i)^b}{3^{a+2b}} = \frac{\left((\sqrt{5} + 2i)^2 (4\sqrt{5} + i) \right)^b}{3^{4b}} = \frac{(81i)^b}{3^{4b}} = \frac{3^{4b}}{3^{4b}} i^b = i^b \end{aligned}$$

özdeşliği

$$(62) a = 2b, k = b$$

için gerçekleşir.

Şu halde (60)'tan

$$\frac{b\pi}{4} = 2b\text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^2} + b\text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^6}$$

BÖLÜM 2: ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

olup (58) formülü elde edilir.

Örnek 10 (Fibonacci Sayıları ile π ve ϕ Arasındaki İlişki, Derya PAMUKTULUM, 03.01.2003 20:00):

$$(63) \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{F_{2n+3}}$$

formülünde

$$\text{Tan}^{-1} \frac{1}{t_{2n+1,2n+5}} \stackrel{(33)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{F_{2n+3}} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^{2n+1}} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^{2n+5}}$$

nedeniyle

$$(64) \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^{2n+1}} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^{2n+5}}$$

formülü bulunur.

Örnek 11 (Lucas Sayıları ile π ve ϕ Arasındaki İlişki, Derya PAMUKTULUM, 03.01.2003 20:00):

$$(65) \frac{\pi}{4} = -\text{Tan}^{-1} \frac{1}{L_2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{L_{2n+2}}$$

formülünde

$$\text{Tan}^{-1} \frac{1}{t_{2n+1,2n+3}} \stackrel{(32)}{=} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{L_{2n+2}} = \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^{2n+1}} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^{2n+3}}$$

nedeniyle

$$(66) \frac{\pi}{4} = -\text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi} + \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^3} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^{2n+1}} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\phi^{2n+3}}$$

formülü bulunur.

Örnek 12 (Fibonacci Sayıları ile π Arasındaki İlişki, Derya PAMUKTULUM, 06.09.2004 03:10): Her c ve d reel sayısı için

$$(67) \frac{d\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \left((d-c) \frac{F_{3n-2k+2}}{F_{3n+3}} + (d+2c) \frac{F_{9n-6k+6}}{F_{9n+9}} + c \frac{F_{15n-10k+10}}{F_{15n+15}} \right)$$

formülü vardır.

BÖLÜM 2: ϕ 'nin Terslerinin Kuvvetlerinin Ters Tanjantlarıyla π İçin Yeni Bir Türdeki Formüller

İspat:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\pi}{4} &= (d-c)\tan^{-1}\frac{1}{\phi} + (d+2c)\tan^{-1}\frac{1}{\phi^3} + c\tan^{-1}\frac{1}{\phi^5} \\
 &= (d-c)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{1}{\phi^{2k+1}} + (d+2c)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{1}{\phi^{6k+3}} + c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{1}{\phi^{10k+5}} \\
 &= \lim_{n\rightarrow\infty}\left((d-c)\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{F_{3n-2k+2}}{F_{3n+3}} + (d+2c)\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{F_{9n-6k+6}}{F_{9n+9}} + c\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{F_{15n-10k+10}}{F_{15n+15}}\right) \\
 &= \lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{2k+1}\left((d-c)\frac{F_{3n-2k+2}}{F_{3n+3}} + (d+2c)\frac{F_{9n-6k+6}}{F_{9n+9}} + c\frac{F_{15n-10k+10}}{F_{15n+15}}\right)
 \end{aligned}$$

Not 4: (57) ile (67)'deki seriler π 'ye aynı hızda yakınsarlar. Ayrıca (67)'de indisleri değiştirmeden Fibonacci sayıları yerine Lucas sayıları veya $\frac{H_n}{H_{n-1}} \xrightarrow{n\rightarrow\infty} \phi$ limitini gerçekleyen herhangi bir dizi (örneğin 2. mertebeden Hemon dizisi) alınırsa n 'nin yeterince büyük değerleri için elde edilen seri de aynı hızda π 'ye yakınsar.

3. Tribonacci dizisindeki $\frac{T_n}{T_{n-1}} \xrightarrow{n\rightarrow\infty} x_3$ için yine aynı metodu kullanıp elde edilen sonuçlara göre (5) tipindeki gibi formüller verilebilir.

Örnek 13 (Derya PAMUKTULUM, 31.12.2002 22:45): (62)'deki $x_3 = \frac{1 + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}}{3}$ değerine göre

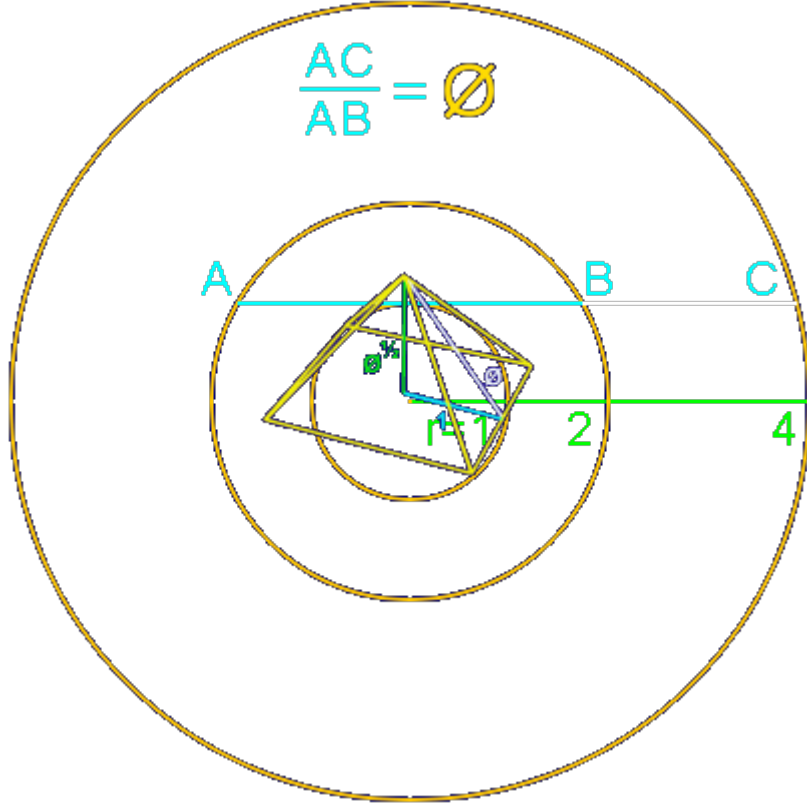
$$(68) \quad \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{x_3} + \tan^{-1}\frac{1}{x_3^2}$$

formülü vardır.

D. PAMUKTULUM

EKLER

EK 1: Pi ve Altın Oran Arasındaki İlişkiler İçin Bir Kronoloji



Altın Oran ve Pi İçin Rasyonel Yaklaşımlıklar

$$\phi \cong \frac{4}{3}$$

$$\phi \cong \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\pi \cong \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

Standart Ekran Formatı. Geniş Ekran Formatı. Eski Mısırlıların 3. π Formatı (M. Ö. 2000 civarı, Ahmes Papirüsü).

Pi ve Altın Oran Arasındaki İlişkiler

$$\pi \cong \frac{22}{7}$$

$$\pi \cong \frac{280}{89}$$

$$\pi \cong \frac{4}{\sqrt{\phi}}$$

$$\pi \cong \frac{6}{5}\phi^2$$

$$\pi \cong \frac{4+\phi\sqrt{2}}{2}, 10\sqrt{\frac{\phi\sqrt{\phi}}{2}} - 7$$

1. Eski Mısırlıların 1. π Formatı (M. Ö. 2550 civarı, Büyük Piramit).

Eski Mısırlıların 2. π Formatı (M. Ö. 2550 civarı, Büyük Piramit).

1586, **Ludolph van Ceulen**, Daire-Çap İlişkileri.

1593, **Francois Vieta**, Daire-Çap İlişkileri.

2004, **Mathquake**, Pi ve Altın Oran Arasındaki İlişkiler İçin Güzel Bir Baş, Sonuç 2.

2. M. Ö. 250 civarı, **Arşimet**, Daire Çevresi Ölçmesi, Önerme 3.

D. PAMUKTULCAM