Rhind Matematik Papirüsü'ndeki $\frac{2}{n}$ Tablosundaki Metoda Göre Mükemmel Sayılar

26.7.2024, 22:41:17.

Rhind Matematik Papirüsü'nde $n = 3,5,7,\ldots,101$ tek sayıları için $\frac{2}{n}$ kesirlerinin birim kesirlere ayrılışları verilir. Örnek vermek gerekirse, $n = 7$ için $\frac{2}{7}$ kesrinin birim kesirlere ayrılışı

[2 divided by 7][7]

1/4 [of 7 is] 1 1/2 1/4, **1/28** [of 7 is] 1/4.

1	7			
1/2	3 1/2		1	7
\ 1/4	1 1/2 1/4		2	14
\ 4	28	1/4	4	28.

Tablo 1. ***Ahmes***'in $\frac{2}{7}$ kesrini birim kesirlere ayırma işlemindeki hesabı, "*Eski Mısır Matematiği İçin Bir Kaynak Kitap, Cilt 3*", S. 122.

tablosundan görüldüğü üzere şu şekilde verilir:

$$(1)\quad \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}.$$

Fakat kâtip ***Ahmes***, bu eşitliği doğrulayabilmek için 7'yi birim kesirlerdeki paydalara bölüp bunları alt alta toplayarak 2'yi elde eder: İlkin 7'yi 4'e bölerek,

$$(2)\quad \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

ve ikinci olarak 7'yi 28'e bölerek,

$$(3)\quad \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

sonuçlarını elde eder ve bunları toplayarak 2'yi bulur:

$$(4)\quad \frac{7}{4} + \frac{7}{28} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 1 = 2.$$

Bu, (1)'den kolaylıkla görülebileceği gibi,

$$(5)\quad \frac{7}{4} + \frac{7}{28} = 2$$

işleminin sonucundan ibarettir!

Ahmes bu sağlamayı $n = 3,5,7,\ldots,101$ için $\frac{2}{n}$'nin birim kesirlere tüm ayrılışları için yapar (Bkz. "Belge IV.1", S. 122-133). Fakat bu metot sadece Rhind Matematik Papirüsü'ne özgü değildir; aynı metot Kahun Papirüsü'nde de kullanılır (Bkz. "Belge IV. 3", S. 242-243).

Şimdi Rhind Matematik Papirüsü ve Kahun Matematik Papirüsü'ndeki $\frac{2}{n}$ kesrinin birim kesirlerine ayrılışındaki metoda göre mükemmel sayılar için örneklere geçebiliriz.

1. $p = 2$ ise: $\frac{2}{3}$'ün birim kesirlerine ayrılışındaki hesabı göz önüne alırsak,

$$(6)\quad \begin{array}{lll} 1 & 3 & \Rightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{4:1}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \\ 2 & 6 & \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4:2}{3} = \frac{2}{3} \end{array}$$

sonuçları geçerli olur. Fakat ***Ahmes*** oklardan önce gelen sol taraftaki şablonu kullanmaz; çünkü $\frac{2}{3}$ kesri hiyeroglif ve hiyeratik yazımlarda tek başına yazılmaktadır! (Bkz. S. 122)

Şu halde oklardan sonraki eşitlikleri taraf taraf toplarsak (ki toplam 2 olur ama bunlardan birini göz önüne almıyoruz),

$$(7)\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

elde edilir ki bu, Eski Mısır Matematiği'nde çok iyi bilinen bir özdeşliktir (Bkz. S. 38, (2)).

Çünkü ***Ahmes***'in hesaplamada göstermediği $\frac{2}{3}$'ün birim kesirlere ayrılışı

$$(8)\quad \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

olduğundan bu eşitliğin her iki tarafına $\frac{1}{3}$ eklenirse (7) elde edilir!

2. $p = 3$ ise: ***Ahmes***, $\frac{2}{7}$'nin birim kesirlere ayrılışındaki tabloda oklardan önce gelen sayıların yer aldığı şablona yer verir (Bkz. S. 122). Bunlar orada 7'nin 1, 2 ve 4 katı olarak gözükür; fakat (4) ya da (5)'e göre toplam 2 olduğundan

$$(9)\quad \begin{array}{lll} 1 & 7 & \Rightarrow \frac{1}{1}+\frac{1}{7}=\frac{8:1}{7}=\frac{8}{7}=1\frac{1}{7} \\ 2 & 14 & \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{14}=\frac{8:2}{7}=\frac{4}{7} \\ 4 & 28 & \Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{28}=\frac{8:4}{7}=\frac{2}{7} \end{array}$$

sonuçları geçerli olur.

Şu halde okların sağındaki eşitlikleri taraf tarafa toplar ve toplamdaki her iki taraftan 1'i çıkarırsak şu özdeşlik elde edilir:

$$(10)\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=1=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{4}{7}.$$

3. $p = 5$ ise: ***Ahmes*** $\frac{2}{31}$'in birim kesirlere ayrılışında aşağıdaki oklardan önce gelen şablonu kullanmaz; çünkü $\frac{2}{31}$'in birim kesirlere ayrılışını en kısa şekilde şöyle verir (Bkz. S. 125):

$$(11)\quad \frac{2}{31}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}.$$

Çünkü ***Ahmes***, bunu

$$(12)\quad \frac{2}{31}=\frac{40}{620}=\frac{31+5+4}{620}=\frac{31}{620}+\frac{5}{620}+\frac{4}{620}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}$$

şeklinde bulmuştu!

Fakat bundan ***Ahmes***'in $\frac{2}{31}$'in diğer birim kesirlere ayrılışlarını bilmediği anlamı çıkmaz. Dolayısıyla eğer metoda aynı şekilde devam edersek,

$$(13)\quad \begin{array}{lll} 1 & 31 & \Rightarrow \frac{1}{1}+\frac{1}{31}=\frac{32:1}{31}=\frac{32}{31}=1\frac{1}{31} \\ 2 & 62 & \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{62}=\frac{32:2}{31}=\frac{16}{31} \\ 4 & 124 & \Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{124}=\frac{32:4}{31}=\frac{8}{31} \\ 8 & 248 & \Rightarrow \frac{1}{8}+\frac{1}{248}=\frac{32:8}{31}=\frac{4}{31} \\ 16 & 496 & \Rightarrow \frac{1}{16}+\frac{1}{496}=\frac{32:16}{31}=\frac{2}{31} \end{array}$$

sonuçlarının geçerli olduklarını ve bunların taraf tarafa toplamlarından

$$(14)\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248}+\frac{1}{496}=1=\frac{1}{31}+\frac{2}{31}+\frac{4}{31}+\frac{8}{31}+\frac{16}{31}$$

özdeşliğinin elde edildiği açıktır!

4. $p = 7$ ise: $n = 127$ için $\frac{2}{127}$'in birim kesirlere ayrılışı papirüslerde verilmez. Ama metoda aynı şekilde devam ettiğimizde,

$$(15)\quad \begin{array}{lll} 1 & 127 & \Rightarrow \frac{1}{1}+\frac{1}{127}=\frac{128:1}{127}=\frac{128}{127}=1\frac{1}{127} \\ 2 & 254 & \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{254}=\frac{128:2}{127}=\frac{64}{127} \\ 4 & 508 & \Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{508}=\frac{128:4}{127}=\frac{32}{127} \\ 8 & 1016 & \Rightarrow \frac{1}{8}+\frac{1}{1016}=\frac{128:8}{127}=\frac{16}{127} \\ 16 & 2032 & \Rightarrow \frac{1}{16}+\frac{1}{2032}=\frac{128:16}{127}=\frac{8}{127} \\ 32 & 4064 & \Rightarrow \frac{1}{32}+\frac{1}{4064}=\frac{128:32}{127}=\frac{4}{127} \\ 64 & 8128 & \Rightarrow \frac{1}{64}+\frac{1}{8128}=\frac{128:64}{127}=\frac{2}{127} \end{array}$$

sonuçlarının geçerli olur ki bunların taraf tarafa toplamlarından şu özdeşlik elde edilir:

$$(16)\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{127}+\frac{1}{254}+\frac{1}{508}+\frac{1}{1016}+\frac{1}{2032}+\frac{1}{4064}+\frac{1}{8128}=1=\frac{1}{127}+\frac{2}{127}+\frac{4}{127}+\frac{8}{127}+\frac{16}{127}+\frac{32}{127}+\frac{64}{127}$$

Özetle bu örneklere göre artık metodumuzu verebiliriz!

METOT. p asal bir sayıyken 2^p-1 de bir asal sayı ise

$$
(17)\quad
\begin{array}{lll}
1 & 2^p-1 & \Rightarrow \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2^p-1}=\dfrac{2^p:1}{2^p-1}=\dfrac{2^p}{2^p-1}=1\dfrac{1}{2^p-1} \\
2 & 2(2^p-1) & \Rightarrow \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2(2^p-1)}=\dfrac{2^p:2}{2^p-1}=\dfrac{2^{p-1}}{2^p-1} \\
2^2 & 2^2(2^p-1) & \Rightarrow \dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2(2^p-1)}=\dfrac{2^p:2^2}{2^p-1}=\dfrac{2^{p-2}}{2^p-1} \\
2^3 & 2^3(2^p-1) & \Rightarrow \dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^3(2^p-1)}=\dfrac{2^p:2^3}{2^p-1}=\dfrac{2^{p-3}}{2^p-1} \\
2^4 & 2^4(2^p-1) & \Rightarrow \dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{2^4(2^p-1)}=\dfrac{2^p:2^4}{2^p-1}=\dfrac{2^{p-4}}{2^p-1} \\
\vdots & \vdots & \Rightarrow \vdots \\
2^{p-1} & 2^{p-1}(2^p-1) & \Rightarrow \dfrac{1}{2^{p-1}}+\dfrac{1}{2^{p-1}(2^p-1)}=\dfrac{2^p:2^{p-1}}{2^p-1}=\dfrac{2^{p-(2^p-1)}}{2^p-1}=\dfrac{2}{2^p-1}
\end{array}
$$

şablonuna göre ok uçlarının sağ tarafındaki eşitliklerde taraf tarafa toplama yaparsak,

$$(18)\quad \sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{2^k(2^p-1)}=2=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{2^{p-k}}{2^p-1}$$

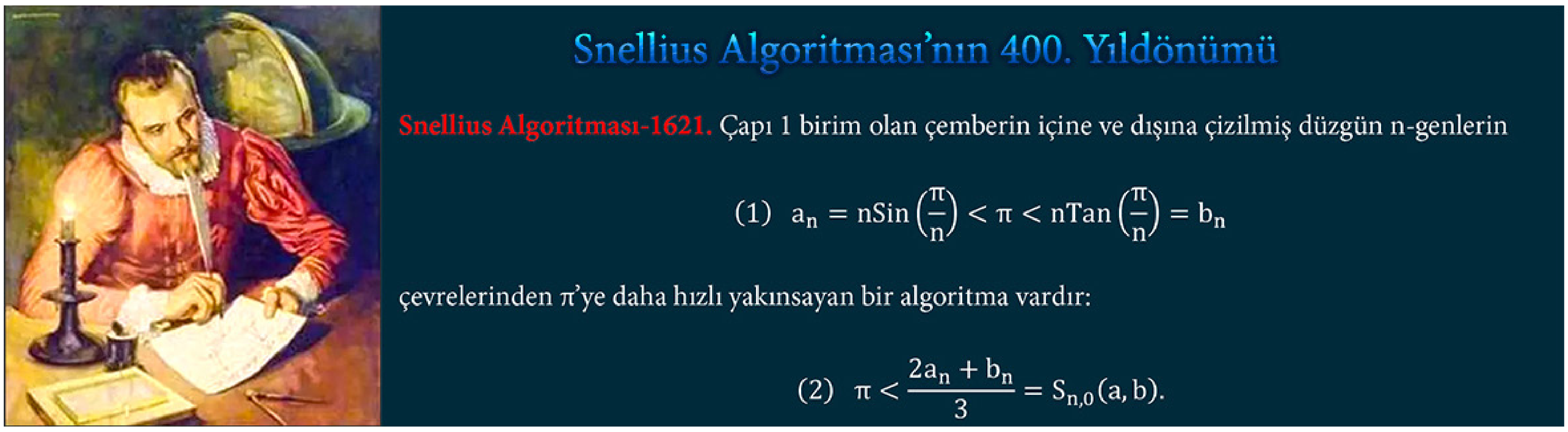
özdeşliği geçerli olur. Bu eşitliğin sol tarafındaki çifte toplam $M_p=2^{p-1}(2^p-1)$ mükemmel sayısının tüm doğal bölenlerinin terslerinin toplamı olduğundan bu özellik ilk kez 1896'da ***Carlo Bourlet*** tarafından verilmiştir (Bkz. *Nouv. Ann.*, 1896, p. 297. Tanım için *"9 Bölümde Temel Sayılar Teorisi"*, S. 135 (PDF'de S. 145)). Ama mükemmel sayıcılar, M_p mükemmel sayısının tüm doğal bölenlerinin terslerinin toplamının $\frac{2}{n}$ kesrindeki metottan geldiğini bilmezler!

Bu özdeşliğin sol ve sağ taraflarındaki toplamlardan 2 elde edildiğinden (18) özdeşliğinin doğru olduğu sonucu çıkar:

$$
(19)\quad
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{2^k(2^p-1)}=\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k(2^p-1)}\right)=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{2^p-1+1}{2^k(2^p-1)}=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{2^p}{2^k(2^p-1)}=\frac{2^p}{2^p-1}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{2^k}=\frac{2^p}{2^p-1}.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^p-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{2^p}{2^p-1}.\frac{2(2^p-1)}{2^p}=2, \\
\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\frac{2^{p-k}}{2^p-1}=\frac{2^p}{2^p-1}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{2^k}=\frac{2^p}{2^p-1}.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^p-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{2^p}{2^p-1}.\frac{2(2^p-1)}{2^p}=2.
\end{cases}
$$

Mükemmel Sayıların Kısa Bir Tarihçesi. Pisagorcular, (7)'deki eşitliğin her iki tarafının 6 ile çarpılmasıyla elde edilen $1+2+3=6$ gibi bir sayının bölenlerinin toplamına eşit olmasını çok dikkate değer bir şey olarak görüyorlardı. Daha sonra ***Öklit***, "mükemmel sayı" için Önerme 36'da sadece bir tanım verdi, o kadar (ki *"hangi **Öklit**?"* diye sormak gerekir, çünkü *"Elemanlar"* 300 yılda toplanmıştır). Yani örnek vermez. Mükemmel sayıların Önerme 36'ya göre verilmesi çok geç bir dönemde olmuş ve ***Nicomachus***, 6, 28, 496 ve 8128 mükemmel sayılarını vermiştir (Bkz. *"Bilimin Uyanışı"*, S. 97-98).

26 Temmuz 2024'ün ilk saatlerinde ***Derek Muller***'in *"Matematikte Çözülmemiş En Eski Problem"* videosunu izledim ve mükemmel sayılarla uğraşan o ve onun gibi 10-15 kişinin umutsuz vaka olduğunu anladım. Çünkü uğraştıkları şey, asal sayıları bulmak için formül/ler aramak gibi anlamsız bir şeydi. Bildiğiniz gibi asal sayıları bulabilmek için "Eratosthenes Kalburu" denilen bir yöntem vardır ama bu yöntemle büyük asal sayılara erişmek oldukça güçtür. Yani asal sayıların sıralamasında nasıl bir düzensizlik varsa mükemmel sayılar da aynı şekilde düzensizdir. Çünkü mükemmel sayılar p asal ise 2^p-1 Mersenne asalının bulunmasına bağlıdır. Fakat akşamleyin önümde ***Marshall Claget***'in *"Eski Mısır Matematiği İçin Bir Kaynak Kitap, Cilt 3"* kitabındaki yukarıda geçen sayfalar açık bir şekilde (ki bu, ilkin ve daha çok Tablo 1 idi), mükemmel sayıların $\frac{2}{n}$ kesrinin birim kesirlerine ayrılışında kullanılan metottan çıktığını görünce ilkin Mathematica'da hesaplamalar yapıyordum (ki aslında bir müsvedde üzerinde yapıyordum ve sonra onları Mathematica'daki dosyaya geçiriyordum) ve sonuçlar olumlu çıkınca bu makaleyi yazmaya karar verdim. Çünkü ***Öklit***'in Önerme 36'sından gelen bilginin orijinal çıkış yerini görmüştüm: Eski Mısır Matematiği.



Resim 1. ***Snellius***'u 400. yıl dönümünde kutlayan, yanılmıyorsam, ilk ve tek kişi bendim. Çünkü 2021'de Hollanda'daki tüm kaynakları taramış ve böyle bir şeye tesadüf etmemiştim (Bkz. RİK 4, S. 31). Lisede fizik dersinde "Snell Yasası" ile anılan ***Snellius*** ilk günkü (2001) gibi hatırımdadır. Onu hep öğretmeni ***Van Ceulen***'in 31.12.1610'daki ani ölümü üzerine çalışmasını tamamlaması nedeniyle (bkz. RİK 4, 4.4. *"VAN CEULEN ve SNELLIUS'a Bir Saygı Ziyareti"*, S. 50-51) ***Mozart***'ın *"Requiem"* adlı cenaze töreni müziğini tamamlayan ***Süssmayr***'e benzetmişimdir. Onun tamamlanmış (genelleştirilmiş) algoritması (Snellius Ekstrapolasyonu) *"ATA ALGORİTMASI, VER. 1-3"*'tür.

Eğer matematikte ünlü olmak istiyorsanız, hiç olmazsa Sayılar Teorisi'ndeki Mükemmel Sayılar'da, $M_p=2^{p-1}(2^p-1)$ mükemmel sayıları 2^p-1 Mersenne asallarına bağlı olduğundan 52. ve sonraki Mersenne asallarını bulmakla işe başlayabilirsiniz (Bkz. *"Büyük İnternet Mersenne Asal Sayıları Araştırması"*). Ama ***Carlo Bourlet***'un 1896'da verdiği özelliğin tam açılımını verdiğim bu makaleden sonra herhalde mükemmel sayıcılar M_p mükemmel sayılarını araştırmaktan vazgeçerler diye düşünüyorum! Çünkü bunun yerine 14.3.2003 (Pi günü) tarihli "*ATA ALGORİTMASI, VER. 1-3*" çalışmamda gördüğünüz gibi Mersenne sayılarını daha yararlı çalışmalarda kullanmak daha iyi olacaktır. Orada Richardson Ekstrapolasyonu, dolayısıyla Snellius Ekstrapolayonu'nun ispatında tek ve çift indisli Mersenneler kullanılmıştır!