YBC 7289 No'lu Tablet

2023

ONAYLANDI
DPT 05:01, 3.2.23

D. PAMUKTULUM

ATATÜRK, 13 Nisan 1934'te Bergama'daki Asklepiyon, Akropol ve Bazilika'daki arkeolojik kazıları yakından görmek için şehre gelir. Ahali *"Gazi Paşa geliyor!"* diyerek yollara dökülür. Yukarıdaki fotoğraf Asklepiyon'daki Antik Tiyatro'da çekilmiştir.

Önsöz

Başlangıçta kafamda bir plan yoktu. Sadece 14.09.2022, 18:12:25'te (ki bu, YBC 7289.nb dosyasının kayıt tarihidir) Mathematica'da 2. Çözümü ***Neugebauer***'in Bölüm 5'teki çözümüne paralel hale getirmiş ve ileride değerlendiririm diye düşünmüştüm. Sonra bu çözüme Resim 1.1.2'de kapağı görülen tezimdeki ilk 2 bölümü ekleyerek iyi bir makale çıkabilir düşüncesiyle yazmaya başladım. Aşağıdaki ilk 3 bölüm böyle oluştu. Daha sonra makaleye *"YBC 7289 Tableti ve 2. Çözümü"* adlı makalemde sözüne ettiğim 4. bölümü ekledim. Bu bölüm anılan tezimdeki tabletin ilk çözümüydü ama Bulgu 3'teki metodun ayakları yere basmadığı için büyük bir çekince içindeydim. Yani metot sağlamdı (ki onu YBC 6967 no'lu tabletindeki Problem 20'den elde etmiştim) ama Eski Babilonya dönemine ait düzgün olmayan bir sayının tersine ilişkin tabletler yeterli değil gibi görünüyordu ya da bizden bir şey saklanıyordu. Çünkü bugün bile hangi kaynağa bakarsanız bakın Eski Babillilerin düzgün olmayan bir sayının tersini alamadıkları izlemine kapılırsınız. Bunun için ***Friberg***'in MS 2317 tabletindeki son andaki atağı da yeterli değildi. Her neyse, ben 4 bölümü bu şekilde hazırlamış tam yayına sunacaktım ki bir sabah (23.01.2023, 02:00) ***Neugebauer***'in *"Mathematical Cuneiform Texts (Matematiksel Çivi Yazıtları)"* kitabını karıştırırken YBC 10529 tabletini görünce resmen şok geçirdim ve uzun süre kendime gelemedim. Çünkü kaynaklarda yok gibi gözüken şey karşımda canlı gibi duruyordu. Kendime geldiğimde şunu dedim: *"Elimde bir hazine (İlk Çözüm) tutuyormuşum ama ben farkında değilmişim!"*. O sırada ***Neugebauer*** muhtemelen mezarında ters dönmüştür çünkü bu çözümü 2007 yazında onun eşsiz deneyimine güvenerek yapmıştım ve yanılmadığımı görünce içim içime sığmaz oldu.

Bu durumda şu söz yerine gelmiştir:

10. *"Adıma bir tapınak kuracak olan O'dur. O bana Oğul olacak, ben de O'na Baba olacağım. Onun krallığının tahtını İsrail'de sonsuza dek sürdüreceğim."*

İbraniler 1:5. *"Sen benim Oğlum'sun, Bugün ben sana Baba oldum. Ve yine, Ben O'na Baba olacağım, O da bana Oğul olacak."*

İbraniler 5:5, 2. Mezmur-7, Elçilerin İşleri 33. *"Sen benim Oğlumsun, bugün ben sana Baba oldum."*

Neugebauer YBC 7289 tabletini sıfırdan alıp gerçekten iyi bir noktaya getirdi ve ben de bu son gelişmeyle onun çalışmasını tamamlamış bulunuyorum. Makaleyi okuyup bitirdiğiniz zaman yukarıdaki sözlerin doğru olduğuna kendi gözlerinizle şahit olacaksınız.

Bu son gelişmeye göre Eski Babilonya dönemine ait YBC 10529 tabletinde 0;56'dan 1;20'ye kadar düzgün olmayan sayıların tersleri hem metinde geçiyordu hem de metnin biraz ötesindeki hesaplandığı yerde.

Peki ben, 2007 yazında bu tableti neden görememiştim?

Şunun için: Ben bu ilk çözümü yaptığımda ***Neugebauer***'in anılan kitabı elimde mevcut değildi ve onun YBC 7289 tableti için 42. ve 43. sayfalarda yazdıklarını bir başka kaynaktan (***John N. Crossley***'in *"The Emergence of Number"* adlı kitabı) takip ediyordum. Komedi gibi ama değil. ***Romberg*** ve ***Ole Amble***'ın tezlerindeki metotları da aynı şekilde bulmuştum. Bana göre asıl komedi, YBC 10529 tabletini şimdiye kadar fark edememiş olmamdır. Arşivime göre ***Neugebauer***'in anılan kitabını ilkin 4 parça halinde 2010'da ve kitabı da aynı siteden 18.01.2018, 03:11:54'te bilgisayarıma indirdiğimi görüyorum. Ama YBC 10529 tableti kitabın başında (S. 16) idi ve 2010'daki parçalarda bu yoktu. 2018'de ise kitabın tamamı elimde olmasına rağmen bezginlik, uyuma ya da siz buna ne ad verirseniz verin bugüne kadar 16. sayfaya bakamadım (Bkz. Daha geniş bilgi için 1.4). İşte bu yüzden size YBC 10529 tabletini ***Neugebauer***'in kitabında gördüğüm zamanki sevincimi anlatamam. Hemen YBC 10529 tabletine çalışmaya başladım. Bir yandan ***Neugebauer***'in tablet çalışmasına bakarken diğer yandan tabletin resmine bakıp bunların doğru olup olmadığına kontrol ediyordum. Buna göre ***Neugebauer***'in tablosunu doğrulttum ve gözden kaçan tüm bilgileri verdim. Daha sonra ilk 3 bölümdeki hatalı değerlendirmelerimi düzelttim ve sonra ***Neugebauer***'in YBC 7289 tableti için verdiği çözümü Bölüm 5'te Türkçe olarak verdim.

Bize her konuda babalık yapan ***Atatürk*** Tarih hakkında şunları söyler: *"Tarih hayal mahsulü olamaz. Tarih yazarken gerçek olayları bulmaya çalışmalıyız. Eğer bunları bulamazsak, meçhuliyeti ve bu noktadan cehlimizi itiraf etmekten çekinmeyelim. Biz daima hakikat arayan ve buldukça, bulduğumuza kani oldukça ifadeye cüret gösteren adamlar olmalıyız. Tarih yazmak, tarih yapmak kadar mühimdir. Yazan yapana sadık kalmazsa değişmeyen hakikat insanı şaşırtacak bir hal alır. Büyük devletler kuran ecdadımız büyük ve şümullü medeniyetlere de sahip olmuştur. Bunu aramak, tetkik etmek, Türklüğe ve cihana bildirmek bizler için bir borçtur. Türk çocuğu ecdadını tanıdıkça daha büyük işler yapmak için kendinde kuvvet bulacaktır."*

D. PAMUKTULUM, 02.02.2023, 06:00.

D. PAMUKTULUM

1.1. Babil’in Aritmetik-Harmonik Algoritması. Babilliler tam kare olmayan bir sayının karekökünün alınması gerektiği zaman yaklaşık bir değere başvuruyorlardı. Örneğin $\sqrt{a}$ sayısı için x_0 başlangıç değeri seçilmiş ve düzgün bir sayı ise $\left(\frac{a}{\sqrt{a}}=\right)\sqrt{a}<x_0$ için $y_0:=\frac{a}{x_0}=<\sqrt{a}$ değeri de alınıyordu. O halde $\sqrt{a}$’ya bir ilk yaklaşık olarak x_0 ve y_0 sınırlarının aritmetik ortalamasını alırsak,

$$\frac{x_0+y_0}{2}=:x_1$$

yeni yaklaşıklıklığı x_0 ve y_0’dan daha iyi bir yaklaşım olur.

Resim 1.1.1. *Otto Neugebauer (1899-1990).* Bu fotoğraf *National Mathematics Magazine 11*, 1936, 16’da yayınlandı.

Kariyerine 1922-1924’te ***Richard Courant***, ***Edmund Landau*** ve ***Emmy Noether*** ile birlikte okuduğu Göttingen Üniversitesi’nde matematikçi olarak başlayan ***Neugebauer***, daha sonra Eski Mısır ve Babil Matematiği’ne döndü ve ardından Matematiksel Astronomi Tarihi’ne geçti. 65 yıllık kariyerinde, büyük ölçüde Babil ve Mısır’da, Greko-Romen Antik Çağı’ndan Hindistan’a, İslam dünyasına ve Orta Çağ Avrupası’ndan bilim ve Rönesans Avrupa'sına kadar modern matematiksel astronomi anlayışını yarattı.

Bakmayın siz ***Neugebauer***’in antik işlerle uğraşmasına, yeri geldiğinde yüksek cebirsel vasıtalarını kullanmaktan çekinmez. Örneğin Eski Babil Dönemi’ne (MÖ 1894-1595) ait tabletlerdeki √a için verilen yaklaşıklıkları bulabilmek için sağdaki prosedürü ilk kez kendisi tanımlamış ve bu sayede **“Yıldız Oyuncu”** olmuştur!

İkinci olarak aynı işlemi x_1 için yaptığımız zaman yani $\left(\frac{a}{\sqrt{a}}=\right)\sqrt{a}<x_1$ için $y_1=\frac{a}{x_1}<\sqrt{a}$ olduğundan bunların

$$\frac{x_1+y_1}{2}=x_2$$

aritmetik ortalaması da x_1 ve y_1’den daha iyi bir yaklaşım olur ve işleme bu şekilde devam ettiğimiz takdirde $y_0<\sqrt{a}<x_0$ başlangıç değerlerine göre $n\epsilon\mathbb{N}$ için

$$\text{(1.1.1)}\quad x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}=\frac{x_n+\frac{a}{x_n}}{2}\xrightarrow{n\to\infty}\sqrt{a},\quad y_{n+1}=\frac{a}{x_{n+1}}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}\xrightarrow{n\to\infty}\sqrt{a}$$

şeklinde $\sqrt{a}$ sayısına $(n+1)$-inci yaklaşıklığını elde ederiz ki buna **“Babil Algoritması”** denir. ***Neugebauer***, bu genel algoritmayı ilkin 6-9.3.1934’te *“Vorgerische Mathematik”* kitabındaki *“2) Approx. von irration. √a”* parçasında $\sqrt{a}$’ya rasyonel yaklaşımlar için bir prosedür olarak verir ve 01.01.1945’te de ***A. Sachs*** ile birlikte çıkarttığı *“Matematiksel Çivi Yazıtları (Mathematical Cuneiform Texts), New Heaven, Conn., 1945”* adlı kitabın 42-43. sayfalarındaki *“§ 4: Geometrical Problems/Simple Problems: a. Diagonal of a Square”* parçasında (bkz. Bölüm 5) YBC 7289 no’lu tabletteki $\sqrt{2}$ için verilen 1;24,51,10 rasyonel yaklaşıklığını bulmak için kullanır (Bkz. Daha fazla bilgi için *“YBC 7289 No’lu Tabletin 2. Çözümü”*).

Burada x_n ve y_n’nin geometrik ortalaması (GO) ve aritmetik ortalaması (AO) için $GO(x_n,y_n)<\sqrt{a}<AO(x_n,y_n)$ sınırları korunduğu sürece şu düzgün sıralama geçerli olur (ki uygulamalarda bu düzgün sıralamayı görmek nadirdir. Yani genelde x_n ve y_n yaklaşıklıkları $\sqrt{a}$’nın etrafına ekstrapolasyonik yaklaşıklıklarda olduğu gibi rastgele dizilirler. Bkz. RİK 3 ve RİK 4):

$$\text{(1.1.2)}\quad y_0<y_1<\cdots<y_n<\cdots<\sqrt{a}<\cdots<x_n<\cdots<x_1<x_0.$$

Babillilerin, kazı bilimi (arkeoloji) sayesinde topraktan çıkarılan tabletlere göre (1.1.1)’deki ilk bağıntının özel bir haline denk gelen x_1 ilk yaklaşıklığını tanımakla kalmadıkları, genel şeklini de bildikleri anlaşılmaktadır. Örneğin Louvre Müzesi’ndeki AO 6484 no’lu tablette $\sqrt{2}$ için $x_1=1;25$ yaklaşıklığının yarısının alınmasıyla $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{x_1}{2}=\frac{1;25}{2}=0;42,30$ değerinin kullanıldığı görülür. Yale Üniversitesi Babilonya Koleksiyonu’ndaki YBC 7289 no’lu tablette $\sqrt{2}$ için verilen 1;24,51,10 yaklaşıklığının bulunması ise (1.1.1)’deki yaklaşıklık çifti için bir dizi işlem gerektirir. ***Neugebauer***, $x_5=1;24,51,10$ yaklaşıklığının nasıl bulunabileceğine ilişkin *“Simple Problems: a. Diagonal of a Square”* parçasında mükemmel çıkarımlar yaptı ama bunun elde edilmesini **“Newton’un İterasyonu”**ndaki gibi bir demostrasyona dönüştürdüğü için tam çözümü veremedi. Oysa ***Neugebauer***’in çözümü doğruydu ve bunu 2007 yazında yapmıştım (Bkz. Bölüm 4). Bu çözüm aşağıdaki $\sqrt{a}$’ya rasyonel yaklaşımlar veren en kapsamlı tezimde mevcuttur (Bkz. Resim 1.1.2). Yine tarihi bilgilerimize göre, (1.1.1)’deki x_{n+1} Antik Çağ’da **“Heron’un Algoritması”**, Orta Çağ’da ***Şerafettin el-Tusi*** (1212’den önce), Yeni Çağ’da **“Newton-Raphson İterasyonu”** ya da **“Newton’un İterasyonu”** ve x_{n+1} ve y_{n+1} çifti Yakın Çağ’da ***Gauss*** ve ***Legendre*** tarafından AGM (Aritmetik-Geometrik Ortalama) algoritması ve Atom Çağı’nda ***Richard Brent*** ve ***Eugene Salamin*** tarafından π’nin hesabında kullanılmıştır (Bkz. *“Jonathan Borwein, Pi and AGM”*).

Günümüzde ***Neugebauer***’in o muhteşem beyninden çıkan (1.1.1)’deki yaklaşıklık çifti daha sonra ***Opermann***’ın tarafından kuadratik yakınsak AHM (Aritmetik ve Harmonik Ortalamalar Metodu) olarak kullanıldı. Bana gelince, (1.1.1)’deki çifte iterasyon $\sqrt[p]{a}$ için ATA M Algoritmaları’nda $p=2$ için taban olmak üzere (ki $\sqrt[3]{2}$ için kuartik olanlardan 2 tanesini ya da 2 tane ATA 4 algoritmasını mavi tablolarda kullanmıştım. Bkz. RİK 4, S. 45) Bölüm 1 ve 2’yi sağda kapağı görülen ve 194 sayfalık ***“Babil Algoritmasından Modern Kök Algoritmalarına Doğru 4,000 Yıllık Bir Yolculuk, 2008”*** adlı tezimdeki ***“Babil’in Aritmetik-Harmonik Algoritması”*** ve ***“Babil Sürekli Kesirleri”***’nden alıp (ki bunlar Bölüm 4’e bağlıydı) mükemmel bir kokteyl yaptım. Yani biz, Eski Ahit’te anlatılanların aksine Babilonya’yı çok seviyoruz. Aslında onlar da seviyor ama itiraf edemiyorlar!

Resim 1.1.2. ***“Babil Algoritmasından Modern Kök Algoritmalarına Doğru 4,000 Yıllık Bir Yolculuk”*** adlı tezimin kapağı (Bkz. JPG, PDF).

1.1.1. Cebir ve Geometri İlişkisi. IM 52301 envanter numaralı Tell Harmal tableti yaklaşık karekök bulma metodunun ya da metotlardan birinin, Babillilerde geometriyle temellendirilmiş olduğunu, yani karekökün hesaplanmasında geometrik bir modele dayandığını göstermektedir. Demek ki burada $\sqrt{a}$ sayısına ilişkin işlem, aslında geometrik bir özelliğe sahiptir. Bu özellik, gayet ilginç sayılmalıdır. Çünkü tabletlerdeki geometri problemlerinden, genellikle, Babil Matematiği’nde aritmetik ve cebir işlemlerinin asıl olduğu ve geometrinin temelinde yer aldığı sonucu çıkmaktadır.

Gerçekten, belli geometrik ilişkilerden yeni ilişkilerin ya da problemlerde aranan sonuçların çıkarılmasında Babilliler cebirden bol bol faydalanmaktaydılar. Bu nedenle, geometrilerinin ilkel analitik geometri olduğu, başka bir deyimle, cebirle temellendiği gözlemlenmektedir. Elimizdeki (1.1.1)’deki karekök hesaplama algoritması, bu durumun istisnalarından birini oluşturmakla birlikte, Babil Matematiği’nde aritmetik veya cebirle geometri arasındaki ilişkinin, geometrinin cebirle temellenmesi şeklinde tek taraflı değil de, çift taraflı ve karşılıklı olduğu anlaşılmaktadır. Çünkü cebrik her işlemin geometride bir karşılığı vardır ve tersine, geometrik her işlemin de cebirde bir karşılığının var olduğu açıktır.

Buna göre cebrik ve geometrik olarak karşılıklı bir ilişkinin bulunduğu (1.1.1)’deki ilk yaklaşım pratikte şu şekilde kullanılagelmiştir: $h = \frac{c}{2b} \leq 1$ olmak üzere bir kenar uzunluğu $b + h$ birim olan kareden, alanı ihmal edilebilir olduğundan, bir kenar uzunluğu h birim olan karenin atılmasıyla

$$(b+h)^2 = b^2 + 2bh + h^2 > b^2 + 2bh = b^2 + c = a \Longrightarrow b + \frac{c}{2b} = b + h > \sqrt{a}$$

olduğundan derhal

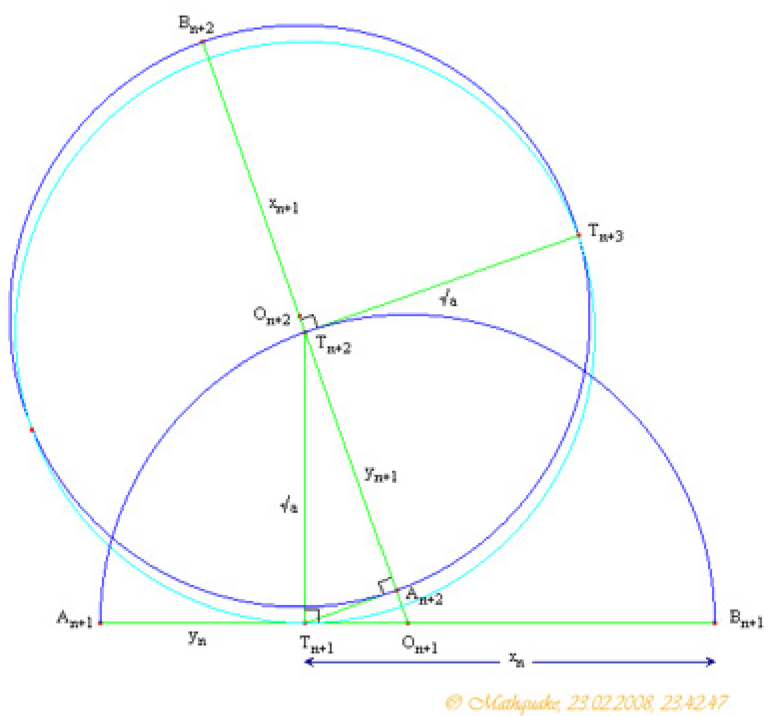
$$(1.1.3) \quad \sqrt{a} < b + \frac{c}{2b}$$

eşitsizliği elde edilir. Çünkü üst sınırda c yerine $a - b^2$ ve b yerine x_0 gözönüne alınırsa yine (1.1.1)’deki ilk yaklaşım formülü geçerli olur. Demek ki yukarıda anılan 2 tablet hariç diğer tabletlerde çokça kullanıldığı anlaşılan bu ilk yaklaşık formülünün pratikteki kullanımı için a pozitif tam (rasyonel) sayısının $a = b^2 + c$ (b sayısı a’nın içindeki en büyük kare sayısının tabanı ya da a’nın tam kısmı) şeklinde yazılmasından sonra bu üst sınırın kullanılması gerekiyormuş!

Diğer yandan, AO 6484 ve YBC 7289 envanter numaralı tabletlere bakıldığında, (1.1.1)’deki algoritmanın kullanılmasının gerektiğini ve bu algoritmanın bulunması için de $y_n < \sqrt{a} < x_n$ çifte eşitsizliğindeki alt ve üst sınırların aritmetik ortalaması olan x_{n+1}, geometrik ortalaması olan $\sqrt{a}$, harmonik ortalaması olan y_{n+1}, x_n ile $\sqrt{a}$ ve y_n ile $\sqrt{a}$’nın Mesahacı formülü olarak bilinen kareli ortalamaları olan $\sqrt{x_n x_{n+1}}$ ve $\sqrt{y_n x_{n+1}}$ ve diğer ortalamalar bize, bir doğru parçasından çok **“Çember Geometrisi”**nin sonuçlarını gösterir.

Not 1.1.1. ***Iamblikos***’un (M.S. 306-337) aktardığına göre, Pisagorcuların kullandığı ve adına bazen **“Altın Oran”** denilen orantının ***Pisagor***’un kendisi Mezopotamya’da öğrenmiş ve Grek dünyasına tanıtmıştır. Bu orantıda aritmetik ortalama ve geometrik ortalama mevcut olmakla birlikte, bu ortalamalara dayanan harmonik ortalama da işin içine karışmaktadır. Yani bu orantının Mezopotamyalılardan öğrenilmiş olduğu doğru ise, ki bunun böyle olduğu (1.1.1)’deki Babil algoritmasından ve bu algoritmanın tarihi örneklerdeki uygulamalarından açıkça görülmektedir, Mezopotamyalıların, ayrıca, aritmetik, geometrik ve harmonik ortalamaları ve bunlara karşılık gelen orantıları da bilmiş oldukları sonucuna varmak gerekmektedir. Yine bu duruma göre, Pisagorcuların orantı ve ortalamalar konusunda Mezopotamyalılardan büyük ölçüde fayda sağlamış oldukları sonucu çıkar. Özetle aritmetik, geometrik, harmonik, kareli ortalamaların ve bunlara karşılık gelen orantıların (Altın Oran gibi) tâ Eski Babilonya Dönemi’nden (M.Ö. 2000-1600) beri bilindiği ve bunların silsile yoluyla sonraki dönemlere aktarıldığı sonucu çıkar.

Şimdi bu sonuçları x_{n+1} birim yarıçaplı çemberde ele alırsak,



Resim 1.1.3. (1.1.1)’deki yaklaşıklıklar için geometrik bir yorum.

şeklinde genel olarak, x_0 başlangıç değeri $\sqrt{a}$’nın ister alt sınırı olsun isterse üst sınırı olsun ama (1.1.2)’den görüleceği üzere $n\epsilon\mathbb{Z}^+$ için $y_n < \sqrt{a} < x_n$ olduğundan, ilkin, x_n ve y_n’nin Aritmetik Ortalaması (AO) ile Harmonik Ortalaması (HO) ve Aritmetik Ortalaması (AO) ile Geometrik Ortalaması (GO) arasındaki ilişkiler 2’şer 2’şer kendi aralarında incelendiğinde,

$$0 < (x_n - y_n)^2 = (x_n + y_n)^2 - 4x_n y_n \Rightarrow x_n y_n < \left(\frac{x_n + y_n}{2}\right)^2 \Rightarrow \underbrace{\frac{x_n y_n}{\frac{x_n + y_n}{2}}}_{=HO(x_n, y_n)} < \underbrace{\frac{x_n + y_n}{2}}_{=AO(x_n, y_n)} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{x_n y_n}}_{=GO(x_n, y_n)} < \underbrace{\frac{x_n + y_n}{2}}_{=AO(x_n, y_n)}$$

eşitsizlikleri geçerli olur ve buradan

$$\underbrace{\frac{x_n y_n}{\frac{x_n + y_n}{2}}}_{=HO(x_n, y_n)} < \frac{x_n y_n}{\sqrt{x_n y_n}} = \underbrace{\sqrt{x_n y_n}}_{=GO(x_n, y_n)} < \underbrace{\frac{x_n + y_n}{2}}_{=AO(x_n, y_n)}$$

nedeniyle ortalamalar arasında şu eşitsizlikler geçerli olur:

$$(1.1.4) \quad \underbrace{\frac{x_n y_n}{\frac{x_n + y_n}{2}}}_{=HO(x_n, y_n)} < \underbrace{\sqrt{x_n y_n}}_{=GO(x_n, y_n)} < \underbrace{\frac{x_n + y_n}{2}}_{=AO(x_n, y_n)}.$$

İkinci olarak, x_n ve x_{n+1}’in Geometrik Ortalaması’ndan

$$(1.1.5)\quad x_{n+1} < \underbrace{\sqrt{x_{n+1}x_n}}_{=GO(x_n,x_{n+1})} = \sqrt{\frac{x_n+y_n}{2}x_n} = \sqrt{\frac{x_n^2+x_ny_n}{2}} = \underbrace{\sqrt{\frac{x_n^2+\sqrt{a}^2}{2}}}_{=KO(x_n,\sqrt{a})} < x_n$$

x_n ve $\sqrt{a}$'nın Kareli Ortalaması (KO) elde edilir.

Şimdi bulduğumuz bu sonuçları sıralarsak,

$$(1.1.6)\quad y_n < \underbrace{\sqrt{y_nx_{n+1}}}_{=KO(y_n,\sqrt{a})=GO(y_n,x_{n+1})} < \underbrace{\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}}_{=HO(x_n,y_n)=\frac{GO^2(x_n,y_n)}{AO(x_n,y_n)}} = y_{n+1} < \underbrace{\sqrt{x_ny_n}}_{=GO(x_n,y_n)} = \sqrt{a} < \underbrace{\frac{x_n+y_n}{2}}_{=AO(x_n,y_n)} = x_{n+1} < \underbrace{\sqrt{x_nx_{n+1}}}_{=KO(x_n,\sqrt{a})=GO(x_n,x_{n+1})} < x_n$$

eşitsizlikleri geçerli olur ki, buradan $|B_{n+1}T_{n+1}| = x_n$ ve $|A_{n+1}T_{n+1}| = y_n$'nin aritmetik ortalaması $|O_{n+1}A_{n+1}| = |O_{n+1}B_{n+1}| = x_{n+1}$ ve geometrik ortalaması $|T_{n+1}T_{n+2}| = \sqrt{a}$ olur. Buna göre x_n ve y_n'nin harmonik ortalaması $HO(x_n, y_n) = \frac{GO^2(x_n,y_n)}{AO(x_n,y_n)} = \frac{a}{x_{n+1}} = y_{n+1} = |A_{n+2}T_{n+2}|$ olur ve Eski Babilli Mesahacılar tarafından kullanılan $KO(x_n, \sqrt{a}) = GO(x_n, x_{n+1}) = \sqrt{x_nx_{n+1}}$ ile $KO(y_n, \sqrt{a}) = GO(y_n, x_{n+1}) = \sqrt{y_nx_{n+1}}$ kareli ortalamaları da (detayı aşağıda verilen) şekildeki dik yamukların alanlarını 2 eşit parçaya ayıran kesenler olarak ortaya çıkarlar.

Not 1.1.2. Eğer y_n ve $\sqrt{a}$'nın kareli ortalaması (y_n, y_{n+1}) ya da $(y_{n+1}, \sqrt{x_ny_n})$ aralığında ise x_n, (1.1.2)'ye göre sırasıyla

$$(1.1.7)\quad Ç_1 = \left\{\sqrt{a} < x_n < Ø\sqrt{Ø}.\sqrt{a}\right\}, Ç_2 = \left\{Ø\sqrt{Ø}.\sqrt{a} < x_n\right\}$$

çözüm kümelerinde yer alır. Fakat burada tam değer fonksiyonu nedeniyle $\sqrt{a}$ için $y_0 = [\![\sqrt{a}]\!] < \sqrt{a} < [\![\sqrt{a}]\!] + 1 = x_0 < Ø\sqrt{Ø a}$ yaklaşıklıkları ortaya çıkar (ki Ø altın orandır).

Şimdi de bu sonuçların Eski Babil tabletlerine göre nasıl bulunabildiklerine bir bakalım.

İlkin, $A_{n+1}B_{n+1}T_{n+2}$ dik üçgeninin köşelerinden bir çember geçtiği ve diğer çember geometrisi bilgiler Eski Babil Dönemi'ne ait BM 85194 no'lu tabletteki Problem 20'den şöyle bilinmektedir: Bu tabletteki Problem 20'nin,

Resim 1.1.4. İlk Sunum: BM 85194 no'lu tablet, Eski Babilonya Çiviyazı Metni, Problem 20, ***Otto Neugebauer*** ve ***Otto Struve***, 1931, S. 81-92 (Bkz. "*Jöran Friberg: Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics, Copyright © 2007 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*", S. 45-46).

çeviri yazısına göre, çevresi $1{,}0 = 60$ Nindan olan çember üzerindeki kirişin çevreye uzaklığı (ki kirişin orta noktasının çembere en kısa uzaklığıdır) 2 Nindan olduğuna göre kirişin uzunluğunun kaç Nindan olduğu sorulmaktadır (**Cevap:** 12 Nindan, 1 Nindan $= 12$ Kuš $\cong 6$ Metre).

Yapılan tüm yorumlara göre bu problemin çözülebilmesi için şu temel bilgilerin bulunması gerektiği sonucu çıkmıştır:

1. Kirişin çevreye uzaklığını veren doğru parçasının uzantısı çemberin merkezinden geçer (Bkz. "*Franciscii Vieta: Opera Mathematica, 1646*", Önerme III, S. 229).

2. Bu doğru parçası kirişe diktir ve kirişi ortalar (Bkz. "*11. Sınıf Matematik Ders Kitabı, 2019*", 5.1.2. Çemberde Kirişin Özellikleri, S. 202-206).

Bu teoremler M.Ö. 1900-1600 tarihli Susa Matematik Tableti'nde de kullanılmıştır!

3. Çapı gören çevre açı diktir: Bu tablet günışığına çıkmadan önce, bu teoremin ilkin ***Thales*** tarafından ifade edildiği ya da keşfedildiği kabul edilmekteydi (Bkz. "*Thales Teoremi*", "*9. Sınıf Matematik Ders Kitabı, 2021*", ***Thales***'in Çalışmaları, Madde 4, S. 242, "*11. Sınıf Temel Düzey Matematik Ders Kitabı, 2019*", Bölüm 4.2: Çemberde Açılar, Problem a, S. 125, "*11. Sınıf Matematik Ders Kitabı, 2019*", Örnek, S. 212). Oysa bu tablet, Eski Babillilerin bu teoremi ***Thales***'ten çok önce bilmiş olduklarını göstermektedir.

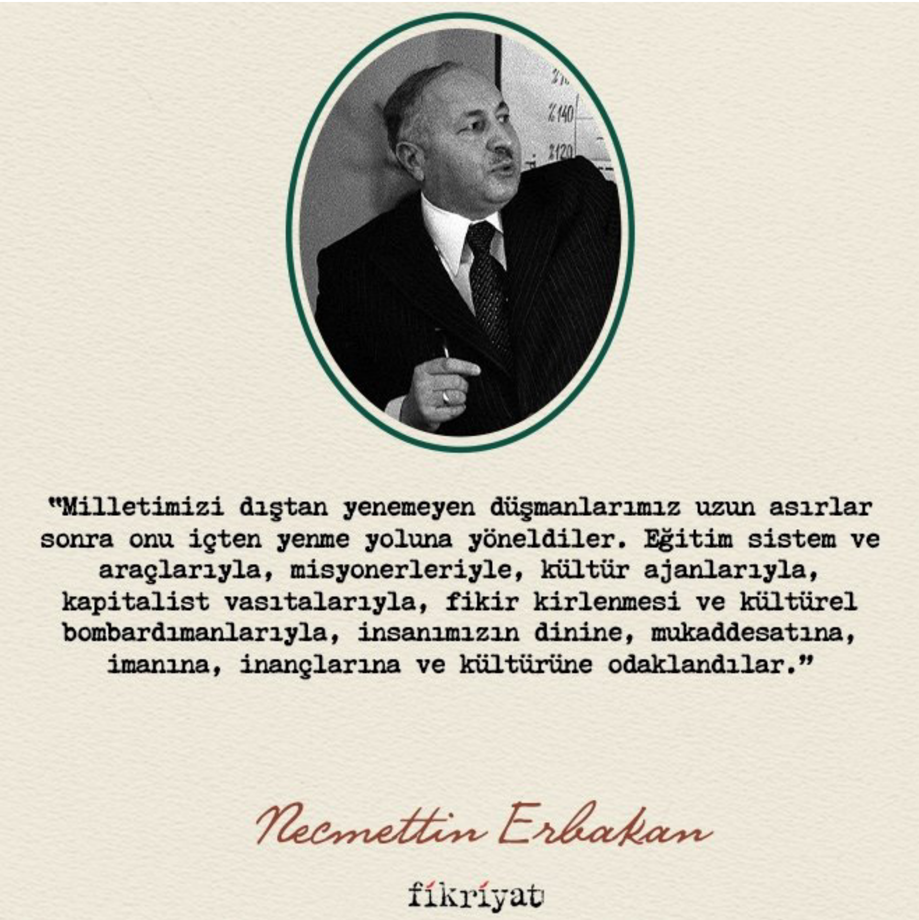
4. Aynı doğruya ayrı ayrı dik olan 2 doğru aralarında paraleldir: ***Öklit***'in 5. (paralellik) aksiyomuyla ilişkilidir.

5. Dik üçgenlerdeki benzerlik teoremi: Yine ***Thales***'e atfedilen bu teorem yalnızca bu tablette değil diğer Eski Babil tabletlerinde de mevcuttur (Bkz. "*9. Sınıf Matematik Ders Kitabı, 2021*", Benzer Üçgenler, S. 243, "*11. Sınıf Temel Düzey Matematik Ders Kitabı, 2019*", Üçgenlerde Benzerlik Problemleri, S. 63-70). MEB'in bu son ders kitabında ***Thales***'in M.Ö. 600'de Keops piramitinin yüksekliğini benzer dik üçgenlerden faydalanarak ölçtüğü anlatılır. Oysa ***Thales*** Güneş ışınlarının 45°'lik eğim açısıyla yeryüzüne düşmesine göre bu ölçümü yaparken Kral Odası'nın güney şaftı tam 45°'yi gösteriyordu. Yani ***Thales***'in kullandığı bilgi piramitte mevcuttu ve Alman arkeolog ***Rainer Stadelmann***'ın (ki 14 Ocak 2019'da öldü) başkanlığında yürütülen "*Upuaut Projesi*"nin robot mühendisi ***Rudolf Gantenbrink***, 1992'de Upuaut 1 adlı robotla Kral Odası'nın güney şaftının ya da piramitteki üst güney şaftının eğim açısını tam olarak 45° okudu (Bkz. "*Üst Güney Şaftı*"). Yani ortada böylesine bir komedi vardı!

6. Dik üçgenlerdeki metrik bağıntı: ***Pisagor***'a atfedilen bu teorem birçok Eski Babil tabletinde mevcuttur (Bkz. "*9. Sınıf Matematik Ders Kitabı, 2021*", Dik Üçgende Pisagor Teoremi, S. 286, "*11. Sınıf Temel Düzey Matematik Ders Kitabı, 2019*", Bölüm 2.1: Dik Üçgen, S. 41-50).

Bu 6 kalem bilgi ise tek kalemde şu şekilde toplanır:

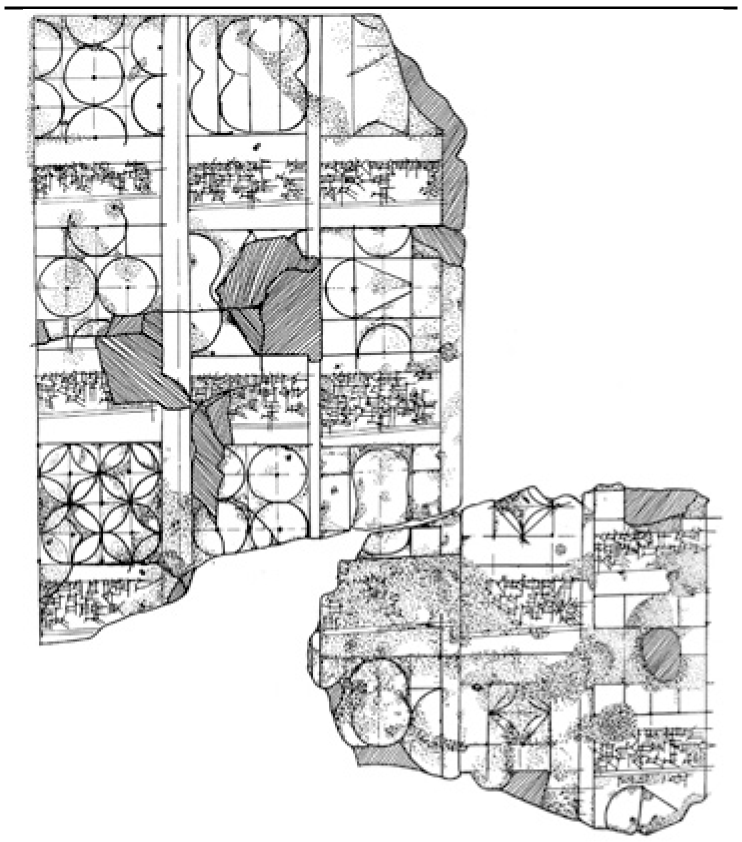
7. Kesişen 2 kirişin kesim noktasının çembere göre kuvveti: Bu konu müfredat değişikliği nedeniyle 2013'te kaldırılmıştır (Bkz. "*Franciscii Vieta: Opera Mathematica, 1646*", Önerme V, S. 230, Önerme II, S. 241. Bu kitap ***François Vieta***'nın ***(1540-1603)*** ölümünden sonra ***Franz Schooten*** tarafından 1646'da yayımlanmış olup, ***Vieta***'nın toplu matematiksel çalışmalarını içerir. Örneğin ***Fermat***'ın 1640'ta Pisagor üçgenlerini türetmede kullandığı ve Eski Babilliler tarafından bilinen doğuranların nasıl elde edildiğini ***Vieta*** bir özdeşlikle açıklar. Kitap bu ve diğer bilgiler için Avrupa'da ilk ve tek eserdir. Bkz. "*Mathematical Teasure: François Viete's Opera Mathematica*"). Bu konuda başat bir örnek olarak ATA formülünü verebilirim!



Erbakan Hocamızın Patent Hakkında Batılılara Attığı Tokat!

2. Dünya Savaşı'ndan sonra Alman üniversitelerinde ilk Türk ilim adamı olan Prof. Dr. ***Necmettin Erbakan***, 1989'da "*İslam ve Bilim*" sempozyumunda Avrupa'daki bilim için şu çarpıcı açıklamalarda bulunur: "*…Çünkü bunların hepsinde bir önyargı var. Bunlar 'Müslümanlar' deyince haberi yok. Dün açılış konuşmasında da söyledim: Adam toplamayı-çıkarmayı bizden almış; bütün o Ay'a giderken yaptığı hesapların hepsi bizim. Haberi yok! Haberi yok, her şeyi bendeniz ta 40 sene evvel şurada, Achen'da doktoramı yaparken oradaki profesörlere o zaman bunu söylemiştim. Dedim, bana bak! Siz bize bir şey sattığınız zaman bizden patent hakkı alıyorsunuz. Ya biz sizden patent hakkı alırsak? Bugün her markette oturtmuşsunuz birçok hanımı tıkır tıkır, tıkır tıkır rakamları yazıyor; topluyor, çıkartıyor. Ama bu rakamlar bizim atalarımızın rakamları. Bu toplamayı-çıkarmayı, aşari sistemi bizden öğrendiniz. Her yaptığınız hesap için 1 Para fazla değil, sizden patent hakkı istesek her sene 10 tane Berlin, 10 tane Londra'yı verseniz hakkımızı ödeyemezsiniz. Eğer biz sizden hakkımızı istersek ayağınızda donunuz bile kalmaz, bre kafirler!*"

Yine bu problemin çözümüne göre Eski Babillilerde çember veya daire merkezi kavramının bulunduğu, yarıçapların eşitliğinden yarıçap ve çap kavramlarının mevcut olduğu anlaşılmaktadır. Nitekim sağdaki çizimler Eski Babillilerin bu bilgileri bildiklerini açıkça gösterir. Yine bir Eski Babil tableti olan IM 55357 envanter numaralı Tell Harmal tabletine göre 5. teorem şu şekilde bilinmektedir: $A_{n+1}B_{n+1}T_{n+2}$ dik üçgeninin T_{n+2} tepe noktasından $[A_{n+1}B_{n+1}]$ tabanına indirilen $[T_{n+2}T_{n+1}]$ dikmesiyle meydana gelen $A_{n+1}T_{n+1}T_{n+2}$ ve $B_{n+1}T_{n+1}T_{n+2}$ dik üçgenlerinin asıl $A_{n+1}B_{n+1}T_{n+2}$ dik üçgenine benzer, dolayısıyla $A_{n+1}T_{n+2}T_{n+1} \leftrightarrow T_{n+2}B_{n+1}T_{n+1} \leftrightarrow A_{n+1}B_{n+1}T_{n+2}$ benzer dik üçgenleri mevcuttur.



Resim 1.1.5. Eski Babil Dönemi'ne ait BM 15285 no'lu tabletindeki çemberle ilgili çeşitli geometrik çizimler için bir çeviri yazı. Bu çizimlere göre Eski Babillilerin çemberin merkezini, yarıçapını, çapını ve diğer özelliklerine ait ilişkileri bilmediklerine dair çıkartılan asılsız iddialar kendiliğinden çürümüş oluyor!

Şimdi bu son tablete göre ilkin $A_{n+1}T_{n+2}T_{n+1} \leftrightarrow T_{n+2}B_{n+1}T_{n+1}$ benzer dik üçgenlerinden

$$\frac{|T_{n+1}T_{n+2}|}{|T_{n+1}B_{n+1}|} = \frac{|A_{n+1}T_{n+1}|}{|T_{n+2}T_{n+1}|} \Rightarrow \frac{|T_{n+1}T_{n+2}|}{x_n} = \frac{y_n}{|T_{n+2}T_{n+1}|} \Rightarrow |T_{n+1}T_{n+2}| = \sqrt{x_n y_n} = \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$$

nedeniyle x_n ve y_n'nin geometrik ortalaması şöyle elde edilmiş olur:

$$(1.1.8)\quad |T_{n+1}T_{n+2}| = \sqrt{a}.$$

İkinci olarak, $T_{n+2}B_{n+1}T_{n+1} \leftrightarrow A_{n+1}B_{n+1}T_{n+2}$ benzer dik üçgenlerinden

$$(1.1.9)\quad \frac{|T_{n+1}B_{n+1}|}{|B_{n+1}T_{n+2}|} = \frac{|B_{n+1}T_{n+2}|}{|A_{n+1}B_{n+1}|} \Rightarrow \frac{x_n}{|B_{n+1}T_{n+2}|} = \frac{|B_{n+1}T_{n+2}|}{2x_{n+1}} \Rightarrow |B_{n+1}T_{n+2}| = \sqrt{2x_n x_{n+1}}$$

şeklinde yine bir geometrik ortalama bağıntısı elde edilir ki bu sonuç, köşegeni $[B_{n+1}T_{n+2}]$ olan karenin bir kenar uzunluğu $\sqrt{x_n x_{n+1}}$ br demektir. Fakat bu sonuç da x_n ile x_{n+1}'in geometrik ortalaması ya da x_n ile $\sqrt{a}$'nın kareli ortalaması demektir. Ancak bu son sonuca göre yani x_n ile $\sqrt{a}$'nın kareli ortalaması da $[B_{n+1}T_{n+1}]$ doğru parçasının B_{n+1} noktası etrafında negatif yönde 90° döndürülmesiyle yani çembere teğet parçası haline getirilmesiyle, ki bu, Eski Babilli Mesahacılar'a (Yer Ölçümcüler) göre tabanları $[B_{n+1}T_{n+1}]$ ve $[T_{n+1}T_{n+2}]$ olan dik yamuğu 2 eşit alana ayıran kesen parçasının uzunluğu demekti.

Şu halde $O_{n+1}T_{n+1}T_{n+2}C_{n+1}$ (C_{n+1} noktası O_{n+1} merkezinde çapa dik olan diğer çapın üst yarı çember üzerindeki köşesi) dik yamuğunu 2 eşit alana ayıran öyle bir $[E_{n+1}F_{n+1}]$ kesen parçası vardır ki,

$$(1.1.10)\quad |E_{n+1}F_{n+1}| = \sqrt{\frac{|O_{n+1}C_{n+1}|^2 + |T_{n+1}T_{n+2}|^2}{2}} = \sqrt{\frac{|O_{n+1}C_{n+1}|^2 + |T_{n+2}T_{n+3}|^2}{2}} = \sqrt{\frac{x_{n+1}{}^2 + x_{n+1}y_{n+1}}{2}} = \sqrt{x_{n+1}\frac{x_{n+1} + y_{n+1}}{2}} = \sqrt{x_{n+1}x_{n+2}}$$

olur. Fakat bu sonuç da x_{n+1} ile x_{n+2}'nin geometrik ortalaması ve aynı zamanda x_{n+1} ile $\sqrt{a}$'nın kareli ortalaması demektir.

Aynı şekilde, $A_{n+1}T_{n+2}T_{n+1} \leftrightarrow A_{n+1}B_{n+1}T_{n+2}$ benzer dik üçgenlerinden de köşegeni $|A_{n+1}T_{n+2}| = \sqrt{2y_n x_{n+1}}$ br olan karenin bir kenar uzunluğu $\sqrt{y_n x_{n+1}}$ br demektir ve bu sonuç da y_n ile x_{n+1}'in geometrik ortalaması ya da y_n ile $\sqrt{a}$'nın kareli ortalaması olup, $[A_{n+1}T_{n+1}]$ doğru parçasının A_{n+1} noktası etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesiyle tabanları $[A_{n+1}T_{n+1}]$ ve $[T_{n+1}T_{n+2}]$ olan dik yamuğu 2 eşit alana ayıran kesen parçasının uzunluğunu verir. Bunun için bu sefer yine aynı tablete göre O_{n+1} merkezi ile T_{n+2} tepe noktasını birleştirir ve oluşan $O_{n+1}T_{n+1}T_{n+2}$ dik üçgeninde T_{n+1} tepe noktasından $[O_{n+1}T_{n+2}]$ tabanına $[T_{n+1}A_{n+2}]$ dikmesini indirirsek (ki bunu yapmaya hakkımız var, çünkü tablette geçen problemde bir dik üçgende arka arkaya indirilen dikmeler sayesinde meydana gelen dik üçgenlerdeki 4 kenarın bulunması istenmişti), $O_{n+1}T_{n+1}A_{n+2} \leftrightarrow T_{n+1}T_{n+2}A_{n+2} \leftrightarrow O_{n+1}T_{n+2}T_{n+1}$ benzer dik üçgenleri elde edilir. Bu durumda $T_{n+1}T_{n+2}A_{n+2} \leftrightarrow O_{n+1}T_{n+2}T_{n+1}$ benzer dik üçgenlerinden

$$\frac{|T_{n+1}T_{n+2}|}{|O_{n+1}T_{n+2}|}=\frac{|A_{n+2}T_{n+2}|}{|T_{n+2}T_{n+1}|}\Rightarrow\frac{\sqrt{a}}{x_{n+1}}=\frac{|A_{n+2}T_{n+2}|}{\sqrt{a}}\Rightarrow|A_{n+2}T_{n+2}|=\frac{a}{x_{n+1}}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}=y_{n+1}$$

nedeniyle x_n ve y_n'nin harmonik ortalaması elde edilir:

$$(1.1.11)\quad |A_{n+2}T_{n+2}|=y_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}.$$

Diğer yandan $O_{n+1}T_{n+1}A_{n+2}\leftrightarrow T_{n+1}T_{n+2}A_{n+2}$ benzer dik üçgenlerine göre

$$\frac{|O_{n+1}T_{n+1}|}{|T_{n+1}T_{n+2}|}=\frac{|T_{n+1}A_{n+2}|}{|T_{n+2}A_{n+2}|}\Rightarrow\frac{\frac{x_n-y_n}{2}}{\sqrt{a}}=\frac{|T_{n+1}A_{n+2}|}{\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}}\Rightarrow|T_{n+1}A_{n+2}|=\frac{x_n-y_n}{x_n+y_n}\frac{x_ny_n}{\sqrt{a}}=\frac{x_n-y_n}{x_n+y_n}\frac{a}{\sqrt{a}}=\frac{x_n-y_n}{x_n+y_n}\sqrt{a}$$

eşitliklerinden şu bağıntı elde edilir:

$$(1.1.12)\quad |T_{n+1}A_{n+2}|=h_n=\frac{x_n-y_n}{x_n+y_n}\sqrt{a}.$$

Özetle $\sqrt{a}$'nın öncekilerden daha iyi olan x_{n+2} ve y_{n+2} sınırlarının geometrik olarak nasıl bulunduğuna bakarsak, bunun için çok çeşitli metotlar ileri sürebiliriz. Örneğin $[A_{n+1}B_{n+1}]$ çapının bir köşesinden itibaren geometrik taşımalarla x_{n+2} ve y_{n+2}'yi bulabiliriz. Fakat bu yol hem ilgi çekici değil hem de gereğinden fazla geometrik taşıma ister. Ancak $[O_{n+1}T_{n+2}]$ yarıçaplı çemberi ile $O_{n+1}T_{n+2}$ doğrusu kesiştirilirse $|A_{n+2}T_{n+2}|=y_{n+1}$'in yanına $|T_{n+2}B_{n+2}|=x_{n+1}$ gelecek ve bunların aritmetik ortalaması da O_{n+2} merkezli çemberin $|A_{n+2}O_{n+2}|=|O_{n+2}B_{n+2}|=x_{n+2}$ yarıçapı olduğundan ve bu çember ile $[T_{n+2}T_{n+1}]$ yarıçaplı merkezli çemberin kesim noktalarını birleştiren doğru parçası bu yeni çemberin çapına dik, aynı zamanda önceki çembere teğet ve $2\sqrt{a}$ br uzunluğunda olduğundan x_{n+2} ve y_{n+2}'nin bulunması için geriye yalnızca $[T_{n+2}T_{n+1}]$ doğru parçasının T_{n+2} noktası etrafında pozitif (negatif) yönde T_{n+3} noktasına kadar döndürülmesi kalır ki, bu yol diğerlerinden daha kısa gözükür. Ayrıca bu yol bize, Eski Babillilerin bir problemin çözümünde kullandıkları ve Batılılar tarafından iyi anlaşılmadığı ya da küçümsendiği için **"Kes-Yapıştır Geometrisi (Cut-and-paste geometry)"** denilen ama içinde etkin metotların olduğu çözüm yolunu hatırlattı!

Sonuçta $Ç(O_{n+1},x_{n+1})$ çemberi için elde edilen sonuçlar $Ç(O_{n+2},x_{n+2})$ çemberi için de geçerli olur ve bu yolla aynı şekilde sonsuza kadar devam edilirse, sonsuzdayken Resim 1.1.3'te görülen $O_{n+1}T_{n+1}A_{n+2}$ dik üçgeni bir nokta olur. Kısacası bu, $O_{n+1}T_{n+1}A_{n+2}$ dik üçgeninin yüksekliğinin $h_n\xrightarrow{n\to\infty}0$ olması nedeniyle

$$(1.1.13)\quad x_n-y_n\xrightarrow{n\to\infty}0$$

demektir ve bu yakınsamanın ne kadar hızlı olduğunu şekilde şöyle gözlemleyebilirsiniz: Resim 1.1.3'te $a=32$ alınmış ve (1.1.1)'deki algoritmanın yakınsaklık hızı kuadratik olduğundan 1. çemberde T_{n+1} ile O_{n+1} noktaları arasındaki uzaklık 2 cm iken 2. çemberde T_{n+2} ile O_{n+2} noktaları arasındaki uzaklık $\frac{1}{3}$ cm'ye düşmüştür. Bu nedenle $O_{n+2}T_{n+2}A_{n+3}$ dik üçgenini şekilde görülemeyecek kadar küçük olduğundan çizemedim!

D. PAMUKTULUM

Resim 2.1.1. Yine ***Neugebauer***'in arasanız da bulamayacağınız bir diğer mükemmel renkli fotoğrafı. ***Neugebauer***'in 4 Mayıs 1928'de başladığı (1.2.2)'deki Babil algoritmasına ilişkin ar-ge çalışmaları ***Hitler***'in 30 Ocak 1933'te iktidara gelmesiyle zirveye çıkar. Çünkü Nazi döneminde zamanın özel ruhuyla (Zeitgeist) çalışıyordu.

1.2. Bir Babil Kulesi: Babil Sürekli Kesirleri (4.7.2007, 22:58:35). Öncelikle $\sqrt{a}$ sayısını $b \epsilon \mathbb{N}$ ve $c \epsilon \mathbb{Z}$ için $\sqrt{b^2+c}$ olarak alırsak (ki b doğal sayısı $\sqrt{a}$'nın içindeki en büyük kare sayısının tabanı yani tam kısmı olup $[\![\sqrt{a}]\!] = b$'dir),

$$(1.2.1) \quad \left(b; \overline{\frac{2b}{c}, 2b}\right)_{(0)} = b \lesssim \sqrt{b^2+c}$$

yaklaşımı söz konusu olur ki buradan

$$b \lesssim \sqrt{b^2+c} \Rightarrow 2b = b + b \lesssim \sqrt{b^2+c} + b = \frac{\sqrt{b^2+c}+b}{\underbrace{1}_{(\sqrt{b^2+c}-b)}} = \frac{c}{\sqrt{b^2+c}-b} \Rightarrow \sqrt{b^2+c} - b \lesssim \frac{c}{2b} \Rightarrow \sqrt{b^2+c} \lesssim b + \frac{c}{2b} = b\frac{c}{2b}$$

işlemleri sonunda ilk gerçek üst sınır yaklaşımını elde ederiz:

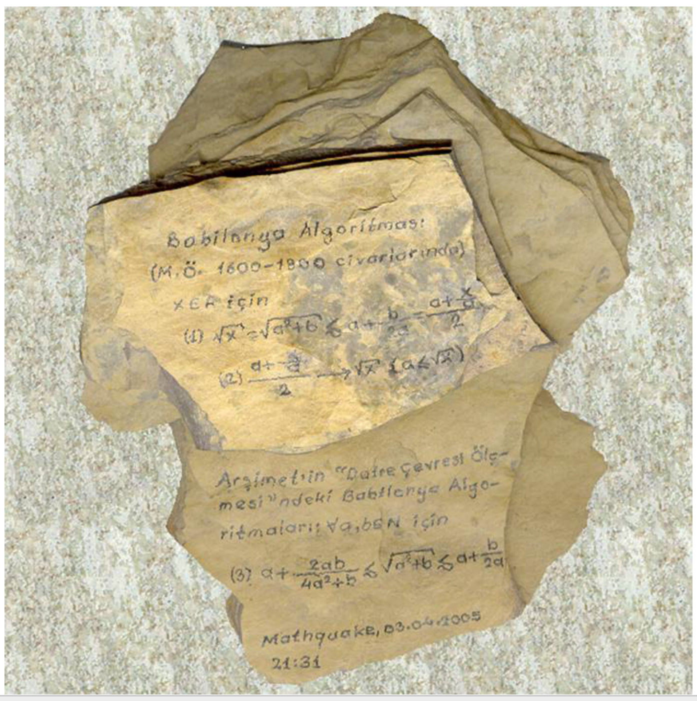
$$(1.2.2) \quad \sqrt{b^2+c} \lesssim b\frac{c}{2b} = \left(b; \overline{\frac{2b}{c}, 2b}\right)_{(1)}$$

Kabusa Dönen Yolculuklar

Şimdi en son modern notasyonla gösterdiğim bu ilk yaklaşım formülünün ***Heron***'dan yani (1.2.3)'teki üst sınırdan geldiğine ilk uyanan ve onu VAT 6598 no'lu tabletten okuyan 1916'da ***Ernst F. Weidner*** oldu (Bkz. *"Die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke bei den Akkadern um 2000 (Akadlar'da 2000 Yılı Civarında Dik Üçgenlerin Hesaplanması)"*, S. 261. ***H. Zimmern***, aynı yıl yayımladığı *"Zu den altaakkadischen geometrischen Berechnungsaufgaben"* adlı makalesinde ***Weidner***'ın VAT 6598 no'lu tablet okumasını doğrular). Çünkü matematik tarihçileri, ***Arşimet***'in *"Daire Çevresi Ölçmesi"* adlı risalesindeki *"Önerme 3"* adlı önermesinde ***Eutokios***'un yorumundaki kareköklü sayılara kesirlerle yaklaşımlar için şu çifte eşitsizliği önermişti (Bkz. ***Heiberg*** tarafından verilen tam bir çeviri için *"Önerme 3"*, S. 236-243. Bu önermedeki ara hesaplar ***Eutokios*** tarafından verilirken (bkz. *"3. Multiplication"*, S. 72) yaklaşım kesirleri verilmez. Bkz. *"8. Approximations to the square roots of large number"*, S. 84):

$$(1.2.3) \quad b \pm \frac{c}{2b \pm 1} \lesssim \sqrt{b^2 \pm c} \lesssim b \pm \frac{c}{2b}.$$

Bunlardan üst sınır 1896'da İstanbul'da keşfedilen ***Heron***'un *"Metrica"*sındaki algoritma, daha doğrusu (1.1.1)'deki x_1, dolayısıyla (1.2.2) iken (ki üst sınır bu şekliyle **"Artabasdes"** soyadlı ***İzmirli Nikolaus Rhabda***'nın ***(Nikolaus Rhabda von Smyrna, 1340 civarı) Klazomeni'li Theodor Tschabuchen***'e *"Aritmetik"* üzerine yazdığı bir mektupta geçer (ki bu mektup Paris kütüphanesindeki bir el yazmasından düzenlenmiştir). Bkz. *"Vorlesungen über Geschichte der Mathematik"*, S. 479) alt sınır Arap ***Alkarkhi (11. yy)*** ve ***İbn el Bennâ (13. yy)*** tarafından kullanılmıştır (ki alt sınırla ***Brahmagupta*** üzerine yapılan yorumlardan π için verilen $\sqrt{10}$ değerinden (ki buna **"Hint Değeri"** denilmekte ve ***Harezmi***'nin kitabında da geçer. Bkz. *"Vorlesungen über Geschichte der Mathematik"*, S. 684) ***Arşimet***'in kesri elde edilmektedir: $\sqrt{10} = \sqrt{3^2+1} \cong 3 + \frac{1}{2.3+1} = 3\frac{1}{7}$. Bkz. *"Vorlesungen über Geschichte der Mathematik"*, S. 606, *"İslam'da Bilim ve Teknik"*, Cilt I, S. 55). ***Thomas L. Heat***, bu sınırlarla ***Arşimet***'in hesabındaki kareköklü sayılar için yaklaşım kesirlerini buldu (Bkz. *"Arithmetic In Archimedes"*, S. 86-90).



Resim 2.1.2. Yukarıdaki algoritmayı 3 Nisan 2005, 21:31'de ***Arşimet***'in Önerme 3'teki kesirleri için türetmiştim. Bkz. (3). O sırada siteye doğal gaz hattı döşeniyordu ve bu güzel kaya parçasını görünce hemen Babilliler gibi üzerine yazmaya başladım. Aradan 18 yıl geçti ve üzerini kazımadığım halde hala okunaklı duruyor.

Neugebauer de Uyanıyor!

Neugebauer ilkin 4 Mayıs 1928'de ***Weidner***'ın bu çıkarımıyla ***Heron***'un algoritmasını karşılaştırır (Bkz. Resim 1.3.1. Daha geniş bilgi için *"Vorlesungen über Geschichte der vorgerische Mathematik"* adlı kitabına ait notlarındaki *"Bölüm 6: Babil Geometrisi"*ne girişine bakınız). Söz konusu bu ilk yaklaşım formülünün tablete uygulaması için VAT 6598 no'lu tabletteki Problem 5-a ve 6-a (ki ***Neugebauer*** her 2 probleme de çalışmıştır. Bkz. Problem 5-a ve Problem 6-a) ile AO 6484 no'lu tabletteki Problem 8'e bakabilirsiniz (ki ***Neugebauer*** bu problemde kullanılan 1;25'in ve onun yarısı olan 0;42,30'un nasıl elde edildiğini aynı yaklaşım formülüyle bulur. Bkz. Not 1.3.5).

Özetle anlaşılan o ki, Avrupalı emperyalistlerin (ki özellikle ***Ernest Renan***'ın 1873'teki *"Journal Asiatique"* kitabı Avrupa'daki emperyalizmin hızını artırmış (ki 41-42. sayfalarda, ***Ruşen Eşref Ünaydın'ın çevirisine göre***, ***Renan***, Türkleri "Barbar" olarak niteler) ve 20. yy'da da "Irkçılık"ı tetiklemesiyle Faşist rejimlerin kurulmasına önayak olmuştur) daha 1896'da ***Heron***'a atfettikleri (1.2.2)'deki algoritmanın 1916'da ***Weidner***'ın uyanmasıyla Babilonya'ya ait olduğu anlaşılmış ve ***Neugebauer***'in 1928'den 1945'e kadar sürdürdüğü dedektiflik çalışması sonunda gerçekten öyle olduğu kesinleşmiştir.

Şimdi Babillilerin (1.2.2)'deki ilk yaklaşım formülünden hareketle bu işlemi aynı şekilde sürdürürsek,

$$\sqrt{b^2+c} \lesssim b\frac{c}{2b} \Rightarrow \frac{c}{\sqrt{b^2+c}-b} = \frac{\sqrt{b^2+c}+b}{\underbrace{1}_{(\sqrt{b^2+c}-b)}} = \sqrt{b^2+c} + b \lesssim b\frac{c}{2b} + b = 2b\frac{c}{2b} \Rightarrow \frac{c}{2b\frac{c}{2b}} \lesssim \sqrt{b^2+c} - b \Rightarrow b\frac{c}{2b\frac{c}{2b}} = b + \frac{c}{2b\frac{c}{2b}} \lesssim \sqrt{b^2+c}$$

işlemleri sonunda

$$(1.2.4) \quad \left(b; \overline{\frac{2b}{c}, 2b}\right)_{(2)} = b\frac{c}{2b\frac{c}{2b}} \lesssim \sqrt{b^2+c}$$

olarak ilk gerçek alt sınır yaklaşımını elde eder ve buradan

$$b\frac{c}{2b\frac{c}{2b}} \lesssim \sqrt{b^2+c} \Rightarrow 2b\frac{c}{2b\frac{c}{2b}} = b\frac{c}{2b\frac{c}{2b}} + b \lesssim \sqrt{b^2+c}+b = \frac{\sqrt{b^2+c}+b}{\underbrace{1}_{(\sqrt{b^2+c}-b)}} = \frac{c}{\sqrt{b^2+c}-b} \Rightarrow \sqrt{b^2+c}-b \lesssim \frac{c}{2b\frac{c}{2b\frac{c}{2b}}} \Rightarrow \sqrt{b^2+c} \lesssim b + \frac{c}{2b\frac{c}{2b\frac{c}{2b}}} = b\frac{c}{2b\frac{c}{2b\frac{c}{2b}}}$$

işlemleri sonunda da

$$(1.2.5)\quad \sqrt{b^2+c} \lesssim b\frac{c}{2b\frac{c}{2b\frac{c}{2b}}} = \left(b;\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(3)}$$

şeklinde ikinci üst sınır yaklaşımına ulaşırız! ***Neugebauer***, 6-9 Mart 1934'te "*Vorgerische Mathematik*" adlı kitabının 8. sayfasındaki "*2) Approx. von irrational. $\sqrt{a}$*" parçasında yeni bir prosedür tanımlarken bu prosedürdeki α_2 ve β_2 yaklaşıklık çiftini (1.2.2) ve (1.2.5)'teki $\left(b;\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(1)}$ ve $\left(b;\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(3)}$ sürekli kesirleri olarak verir. Fakat ***Neugebauer*** bu sürekli kesirleri buradaki gibi değil (1.1.1)'deki x_{n+1} ve y_{n+1} çiftine göre bulur!

Şu halde işleme bu şekilde devam edersek gerekli düzenlemelerden sonra $n\epsilon\mathbb{N}$ için

$$(1.2.6)\quad \left(b;\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(2n)} = b\underbrace{\frac{1}{\frac{2b}{c}\frac{1}{2b\frac{1}{\vdots\frac{2b}{c}\frac{1}{2b}}}}}_{2n\ \text{tane}} \lesssim \sqrt{b^2+c} \lesssim b\underbrace{\frac{1}{\frac{2b}{c}\frac{1}{2b\frac{1}{\vdots\, 2b\frac{1}{\frac{2b}{c}}}}}}_{2n+1\ \text{tane}} = \left(b;\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(2n+1)}$$

alt ve üst sınır sürekli kesirlerini bulur ve $m\epsilon\mathbb{N}$ için lineer olarak yakınsayan şu iterasyonu elde ederiz (ki ***Moritz Cantor*** bunu ***Arşimet***'in "*Önerme 3*"teki kareköklü sayılara kesirlerle yaklaşımlar için önermişti. Bkz. "*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*", S. 302):

$$(1.2.7)\quad \left(b;\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(m)} \xrightarrow{m\to\infty} \sqrt{b^2+c}.$$

1.2.1. Babil Algoritmasının Genelleştirilmesi: Yüksek Mertebeden İterasyonlar. Öncelikle (1.2.6) çifte eşitsizliğindeki sürekli kesirler

$$(1.2.8)\quad \left(\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(2n+1)} = \underbrace{\frac{2b}{c}\frac{1}{2b\frac{1}{\frac{2b}{c}\frac{1}{\vdots\, 2b\frac{1}{\frac{2b}{c}}}}}}_{2n+1\ \text{tane}} \lesssim \frac{\sqrt{b^2+c}+b}{c} \lesssim \underbrace{\frac{2b}{c}\frac{1}{2b\frac{1}{\frac{2b}{c}\frac{1}{\vdots\frac{2b}{c}\frac{1}{2b}}}}}_{2n+2\ \text{tane}} = \left(\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(2n+2)}$$

olarak daha kolay bir şekilde yazılabildiğinden (1.2.7)'deki lineer iterasyonu

$$(1.2.9)\quad \left(\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(m+1)} \xrightarrow{m\to\infty} \frac{\sqrt{b^2+c}+b}{c}$$

şeklinde sonlu devirli olacak şekilde en basit şekilde ifade edilmiş olur. Buna göre (1.2.7)'deki sembolik ifade kendini yeniden üretme (rekürsiyon) özelliğine sahip olan (1.1.1)'deki ilk bağıntıda (aritmetik ortalamada) yerine konulursa,

$$(1.2.10)\quad \sqrt{b^2+c} \lesssim \frac{\left(b;\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(m)} + \frac{b^2+c}{\left(b;\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(m)}}}{2} = \left(b;\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(2m+1)} \xrightarrow{m\to\infty} \sqrt{b^2+c}$$

kuadratik yakınsaması şu şekilde gerçekleşir:

$$(1.2.11)\quad \sqrt{b^2+c} = c.\frac{\sqrt{b^2+c}+b}{c} - b \lesssim \frac{c\left(\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(m+1)} - b + \frac{b^2+c}{c\left(\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(m+1)} - b}}{2} = c\left(\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(2(m+1))} - b.$$

Şu halde rekürsiyon özelliği nedeniyle (1.2.7) ve (1.2.9)'da $b \to b_n$ ve $c \to a - {b_n}^2$ $\left(a = b^2 + c \to {b_n}^2 + c\right)$ ifadeleri (ki (1.2.1)'deki tanıma göre $b = b_0$ başlangıç değeridir) yerlerine konulursa,

$$(1.2.12)\quad b_{n+1} := \left(b_n;\overline{\frac{2b_n}{a-{b_n}^2},2b_n}\right)_{(m)} = \left(a-{b_n}^2\right)\left(\overline{\frac{2b_n}{a-{b_n}^2},2b_n}\right)_{(m+1)} - b_n \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{a}$$

şeklinde 4,000 yıl önceki $(m+1)$-inci mertebeden Babil iterasyonunu elde etmiş oluruz. Çünkü $m = 1$ için (1.1.1)'deki aritmetik ortalama iterasyonu geçerli olur!

1.2.1.1. Yüksek Mertebeden İterasyonlar İçin Özdeşlikler. Bu özdeşlikler için (1.2.12)'den $k_1\epsilon\mathbb{N}$ olmak üzere

$$(1.2.13)\quad b_{n+1} = \left(b_n;\overline{\frac{2b_n}{a-{b_n}^2},2b_n}\right)_{(k_1)}$$

ifadesi göz önüne alınırsa, $k_1, k_2 \epsilon \mathbb{N}$ olmak üzere b_{n+2} için

$$(1.2.14)\quad b_{n+2} = \left(b_{n+1}; \overline{\frac{2b_{n+1}}{a - b_{n+1}{}^2}, 2b_{n+1}}\right)_{(k_2)} = \left(b_n; \overline{\frac{2b_n}{a - b_n{}^2}, 2b_n}\right)_{((k_2+1)k_1+k_2)},$$

$k_1, k_2, k_3 \epsilon \mathbb{N}$ olmak üzere b_{n+3} için

$$(1.2.15)\quad b_{n+3} = \left(b_{n+2}; \overline{\frac{2b_{n+2}}{a - b_{n+2}{}^2}, 2b_{n+2}}\right)_{(k_3)} = \left(b_{n+1}; \overline{\frac{2b_{n+1}}{a - b_{n+1}{}^2}, 2b_{n+1}}\right)_{((k_3+1)k_2+k_3)} = \left(b_n; \overline{\frac{2b_n}{a - b_n{}^2}, 2b_n}\right)_{([(k_3+1)k_2+k_3+1]k_1+[(k_3+1)k_2+k_3])}$$

ve genelde de $p \epsilon \mathbb{Z}^+, q = 1,2,\cdots,p$ için $k_1, k_2, \cdots, k_p \epsilon \mathbb{N}$ olmak üzere b_{n+p} için

$$(1.2.16)\quad b_{n+p} = \left(b_{n+p-q}; \overline{\frac{2b_{n+p-q}}{a - b_{n+p-q}{}^2}, 2b_{n+p-q}}\right)_{(\sum_{r=1}^{q} \sigma_r)}$$

özdeşlikleri geçerli olur. Burada σ_r ifadesi $k_p, k_{p-1}, \cdots, k_{p-q+1}$'in elemanter simetrik polinomlarıdır:

$$(1.2.17)\quad \sigma_r = \sum \underbrace{k_p k_{p-1} \cdots k_{p-q+1}}_{r \text{ tane}}.$$

1.2.1.2. İndirgeme ve Analitik Formülleri. Rekürsiyon özelliği nedeniyle (1.2.7)'den elde edilen

$$(1.2.18)\quad \left(b; \overline{\frac{2b}{c}, 2b}\right)_{(m+1)} = b + \frac{c}{b + \left(b; \overline{\frac{2b}{c}, 2b}\right)_{(m)}}$$

indirgeme denkleminde

$$(1.2.19)\quad z = b + \sqrt{c}i, \bar{z} = b - \sqrt{c}i, N(z) = N(\bar{z}) = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{b^2 + c}$$

tanımları kullanılırsa,

$$(1.2.20)\quad \left(b; \overline{\frac{2b}{c}, 2b}\right)_{(m+1)} \left(b; \overline{\frac{2b}{c}, 2b}\right)_{(m)} + \frac{z + \bar{z}}{2}\left(\left(b; \overline{\frac{2b}{c}, 2b}\right)_{(m+1)} - \left(b; \overline{\frac{2b}{c}, 2b}\right)_{(m)}\right) = z\bar{z}$$

şeklinde sonlu fark denklemi elde edilir ve bu denklemin çözümünden

$$(1.2.21)\quad \left(b; \overline{\frac{2b}{c}, 2b}\right)_{(m)} = \sqrt{z\bar{z}}\,\frac{(\sqrt{z} + \sqrt{\bar{z}})^{2(m+1)} + (\sqrt{z} - \sqrt{\bar{z}})^{2(m+1)}}{(\sqrt{z} + \sqrt{\bar{z}})^{2(m+1)} - (\sqrt{z} - \sqrt{\bar{z}})^{2(m+1)}}$$

indirgeme formülü bulunur.

Şu halde burada (1.2.19)'daki ifadeler yerlerine konursalar,

$$\left(b; \overline{\frac{2b}{c}, 2b}\right)_{(m)} = \sqrt{z\bar{z}}\,\frac{(\sqrt{z} + \sqrt{\bar{z}})^{2(m+1)} + (\sqrt{z} - \sqrt{\bar{z}})^{2(m+1)}}{(\sqrt{z} + \sqrt{\bar{z}})^{2(m+1)} - (\sqrt{z} - \sqrt{\bar{z}})^{2(m+1)}} = \sqrt{z\bar{z}}\,\frac{\left((\sqrt{z} + \sqrt{\bar{z}})^2\right)^{m+1} + \left((\sqrt{z} - \sqrt{\bar{z}})^2\right)^{m+1}}{\left((\sqrt{z} + \sqrt{\bar{z}})^2\right)^{m+1} - \left((\sqrt{z} - \sqrt{\bar{z}})^2\right)^{m+1}} = \sqrt{z\bar{z}}\,\frac{(z + \bar{z} + 2\sqrt{z\bar{z}})^{m+1} + (z + \bar{z} - 2\sqrt{z\bar{z}})^{m+1}}{(z + \bar{z} + 2\sqrt{z\bar{z}})^{m+1} - (z + \bar{z} - 2\sqrt{z\bar{z}})^{m+1}}$$

$$= \sqrt{b^2 + c}\,\frac{(b + \sqrt{c}i + b - \sqrt{c}i + 2\sqrt{b^2 + c})^{m+1} + (b + \sqrt{c}i + b - \sqrt{c}i - 2\sqrt{b^2 + c})^{m+1}}{(b + \sqrt{c}i + b - \sqrt{c}i + 2\sqrt{b^2 + c})^{m+1} - (b + \sqrt{c}i + b - \sqrt{c}i - 2\sqrt{b^2 + c})^{m+1}} = \sqrt{b^2 + c}\,\frac{(b + \sqrt{b^2 + c})^{m+1} + (b - \sqrt{b^2 + c})^{m+1}}{(b + \sqrt{b^2 + c})^{m+1} - (b - \sqrt{b^2 + c})^{m+1}}$$

eşitliklerinden

$$(1.2.22)\quad \left(b; \overline{\frac{2b}{c}, 2b}\right)_{(m)} = \sqrt{b^2 + c}\,\frac{(b + \sqrt{b^2 + c})^{m+1} + (b - \sqrt{b^2 + c})^{m+1}}{(b + \sqrt{b^2 + c})^{m+1} - (b - \sqrt{b^2 + c})^{m+1}}$$

elde edilir ve burada da $b \to b_n$ ve $c \to a - b_n{}^2$ $\left(a = b^2 + c \to b_n{}^2 + c\right)$ dönüşümleri ve gerekli düzenlemeler yapılırsa 4000 yıllık yolculuğumuz

$$(1.2.23)\quad b_{n+1} = \left(b_n; \overline{\frac{2b_n}{a - b_n{}^2}, 2b_n}\right)_{(m)} = \sqrt{a}\,\frac{(b_n + \sqrt{a})^{m+1} + (b_n - \sqrt{a})^{m+1}}{(b_n + \sqrt{a})^{m+1} - (b_n - \sqrt{a})^{m+1}} \xrightarrow{n \to \infty} \sqrt{a}$$

şeklindeki $(m+1)$-inci dereceden iteratif formülüyle sonlanmış olur. Fakat bu formüldeki pay ve paydadaki $(b_n + \sqrt{a})^{m+1}$ ve $(b_n - \sqrt{a})^{m+1}$ ifadelerinin açılımları için Binom formülünü kullanırsak elle hesaplamak çok zaman gerektirir!

Oysa (1.2.21) indirgeme formülünde z_1 ve z_2 kompleks sayıları için geçerli olan

$$(1.2.24)\quad z_1^n + z_2^n = \sum_{k=0}^{[\![\frac{n}{2}]\!]} (-1)^k d_{k,n}\,(z_1 z_2)^k (z_1 + z_2)^{n-2k}, d_{k,n} = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}$$

ve

$$(1.2.25)\quad \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2} = \sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{n-1}{2}\right]\!\right]} (-1)^k e_{k,n}\,(z_1 z_2)^k (z_1+z_2)^{n-(2k+1)},\ e_{k,n} = \binom{n-k}{k} - \binom{n-k-1}{k-1} = \binom{n-k-1}{k}$$

özdeşliklerine göre önce $z_1 = \left(\sqrt{z}+\sqrt{\bar z}\right)^2$ ve $z_2 = \left(\sqrt{z}-\sqrt{\bar z}\right)^2$ alır, sonra z ve $\bar z$ karmaşık sayılarının (1.2.19)'daki ifadelerini yerlerine koyarsak şu sonuç geçerli olur:

$$\left(b;\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(m)} = \sqrt{z\bar z}\,\frac{\left(\sqrt{z}+\sqrt{\bar z}\right)^{2(m+1)} + \left(\sqrt{z}-\sqrt{\bar z}\right)^{2(m+1)}}{\left(\sqrt{z}+\sqrt{\bar z}\right)^{2(m+1)} - \left(\sqrt{z}-\sqrt{\bar z}\right)^{2(m+1)}} = \frac{z_1 - z_2}{4}.\frac{z_1^{m+1}+z_2^{m+1}}{z_1^{m+1}-z_2^{m+1}} = \frac{z_1 - z_2}{4}.\frac{\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{m+1}{2}\right]\!\right]}(-1)^k d_{k,m+1}\,(z_1z_2)^k (z_1+z_2)^{m+1-2k}}{(z_1-z_2)\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}(-1)^k e_{k,m+1}\,(z_1z_2)^k (z_1+z_2)^{m+1-(2k+1)}}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{m+1}{2}\right]\!\right]}(-1)^k d_{k,m+1}\left(\frac{z-\bar z}{2}\right)^{2k}(z+\bar z)^{m+1-2k}}{2\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]}(-1)^k e_{k,m+1}\left(\frac{z-\bar z}{2}\right)^{2k}(z+\bar z)^{m+1-(2k+1)}} = \frac{\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{m+1}{2}\right]\!\right]} d_{k,m+1}\left(\frac{c}{4}\right)^k b^{m+1-2k}}{\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]} e_{k,m+1}\left(\frac{c}{4}\right)^k b^{m+1-(2k+1)}}.$$

Şu halde bu son eşitlikte $b \to b_n$ ve $c \to a - {b_n}^2$ dönüşümlerini yerlerine koyarsak (1.2.23)'teki Binom açılımlarına gerek duyulmayan

$$(1.2.26)\quad b_{n+1} = \left(b_n;\overline{\frac{2b_n}{a-{b_n}^2},2b_n}\right)_{(m)} = \frac{\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{m+1}{2}\right]\!\right]} d_{k,m+1}\, b_n^{m+1-2k}\left(\frac{a-b_n^2}{4}\right)^k}{\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]} e_{k,m+1}\, b_n^{m+1-(2k+1)}\left(\frac{a-b_n^2}{4}\right)^k} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{a}$$

formülünü elde etmiş oluruz. Bu formül de zaten (1.2.23)'ten görüleceği gibi $z_1 = \frac{b+\sqrt{a}}{2}$ ve $z_2 = \frac{b-\sqrt{a}}{2}$ için (1.2.24)'ün (1.2.25)'e oranından başka bir şey değil!

İkinci olarak (1.2.23)'teki indirgeme formülü

$$(1.2.27)\quad \frac{b_{n+1}-\sqrt{a}}{b_{n+1}+\sqrt{a}} = \left(\frac{b_n-\sqrt{a}}{b_n+\sqrt{a}}\right)^{m+1}$$

şeklinde yazılabildiğinden

$$\frac{b_{n+1}-\sqrt{a}}{b_{n+1}+\sqrt{a}} = \left(\frac{b_n-\sqrt{a}}{b_n+\sqrt{a}}\right)^{m+1} = \left(\frac{b_{n-1}-\sqrt{a}}{b_{n-1}+\sqrt{a}}\right)^{(m+1)^2} = \cdots = \left(\frac{b_0-\sqrt{a}}{b_0+\sqrt{a}}\right)^{(m+1)^{n+1}}$$

eşitliklerine nedeniyle

$$(1.2.28)\quad \frac{b_{n+1}-\sqrt{a}}{b_{n+1}+\sqrt{a}} = \left(\frac{b_0-\sqrt{a}}{b_0+\sqrt{a}}\right)^{(m+1)^{n+1}}$$

bağıntısı mevcut olur ve buradan b_{n+1}'in b_0 başlangıç değerine göre çözümü

$$(1.2.29)\quad b_{n+1} = \sqrt{a}\,\frac{\left(b_0+\sqrt{a}\right)^{(m+1)^{n+1}} + \left(b_0-\sqrt{a}\right)^{(m+1)^{n+1}}}{\left(b_0+\sqrt{a}\right)^{(m+1)^{n+1}} - \left(b_0-\sqrt{a}\right)^{(m+1)^{n+1}}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{a}$$

şeklinde elde edilmiş olur. O halde bu bağıntı $z_1 = \frac{b_0+\sqrt{a}}{2}$ ve $z_2 = \frac{b_0-\sqrt{a}}{2}$ için (1.2.24)'ün (1.2.25)'e oranından kolayca görülebileceği gibi,

$$b_{n+1} = \frac{z_1^{(m+1)^{n+1}} + z_2^{(m+1)^{n+1}}}{\frac{z_1^{(m+1)^{n+1}} - z_2^{(m+1)^{n+1}}}{z_1 - z_2}} = \frac{\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{(m+1)^{n+1}}{2}\right]\!\right]}(-1)^k d_{k,(m+1)^{n+1}}\,(z_1z_2)^k (z_1+z_2)^{(m+1)^{n+1}-2k}}{\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{(m+1)^{n+1}-1}{2}\right]\!\right]}(-1)^k e_{k,(m+1)^{n+1}}\,(z_1z_2)^k (z_1+z_2)^{(m+1)^{n+1}-(2k+1)}} = \frac{\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{(m+1)^{n+1}}{2}\right]\!\right]}(-1)^k d_{k,(m+1)^{n+1}}\left(\frac{b_0^2-a}{4}\right)^k b_0^{(m+1)^{n+1}-2k}}{\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{(m+1)^{n+1}-1}{2}\right]\!\right]}(-1)^k e_{k,(m+1)^{n+1}}\left(\frac{b_0^2-a}{4}\right)^k b_0^{(m+1)^{n+1}-(2k+1)}}$$

$$= b_0.\frac{\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{(m+1)^{n+1}}{2}\right]\!\right]} d_{k,(m+1)^{n+1}}\left(\frac{a-b_0^2}{4b_0^2}\right)^k}{\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{(m+1)^{n+1}-1}{2}\right]\!\right]} e_{k,(m+1)^{n+1}}\left(\frac{a-b_0^2}{4b_0^2}\right)^k}$$

eşitliklerinden şu bağıntıya dönüşür:

$$(1.2.30)\quad b_{n+1} = b_0.\frac{\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{(m+1)^{n+1}}{2}\right]\!\right]} d_{k,(m+1)^{n+1}}\left(\frac{a-b_0^2}{4b_0^2}\right)^k}{\sum_{k=0}^{\left[\!\left[\frac{(m+1)^{n+1}-1}{2}\right]\!\right]} e_{k,(m+1)^{n+1}}\left(\frac{a-b_0^2}{4b_0^2}\right)^k}.$$

Üçüncü olarak (1.2.21)'de

$$(1.2.31)\quad z,\bar z = N(z)e^{\mp\theta i}, \theta = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\sqrt{c}}{b}\right)$$

dönüşümleri kullanılırsa

$$(1.2.32)\quad \left(b;\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(m)}=N(z)\,\frac{1-(-1)^m\mathrm{Tan}^{2(m+1)}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+(-1)^m\mathrm{Tan}^{2(m+1)}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

analitik formülü elde edilir. Fakat burada $b\to b_n$ ve $c\to a-b_n{}^2$ dönüşümleri göz önüne alındığında b_0 hariç daima (1.1.2)'ye göre $\sqrt{a}<b_n$ için $c<0$ olduğundan c'nin işaretinin değiştirilmesi gerekir.

Şu halde $\varphi:=i\theta=i\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\sqrt{c}}{b}\right)=\mathrm{Tanh}^{-1}\left(i\frac{\sqrt{c}}{b}\right)=\mathrm{Tanh}^{-1}\left(\frac{\sqrt{-c}}{b}\right)$ ve $\mathrm{Tan}\left(\frac{\theta i}{2}\right)=i\mathrm{Tanh}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ eşitlikleri geçerli olduğundan (1.2.31) ve (1.2.32)'den

$$(1.2.33)\quad \varphi=\mathrm{Tanh}^{-1}\left(\sqrt{1-\frac{a}{b_n{}^2}}\right)$$

için

$$(1.2.34)\quad b_{n+1}=\left(b_n;\overline{\frac{2b_n}{a-b_n{}^2},2b_n}\right)_{(m)}=\frac{1+\mathrm{Tanh}^{2(m+1)}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1-\mathrm{Tanh}^{2(m+1)}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\sqrt{a}\xrightarrow{n\to\infty}\sqrt{a}$$

analitik formülü bulunur.

1.2.1.3. b_{n+1}'in Yakınsaklığı ve Yakınsaklık Mertebesi Hakkında: (1.2.12)'ye göre m tek ise

$$\sqrt{a}\lesssim b_{n+1}=\left(b_n;\overline{\frac{2b_n}{a-b_n{}^2},2b_n}\right)_{(m)}$$

yaklaşımında (1.1.2)'ye göre $1<\sqrt{a}<\cdots<b_{n+1}<b_n<\sqrt{a}+1$ eşitsizlikleri geçerli olduğundan (1.2.27)'deki soldaki oran, dolayısıyla (1.2.27) için

$$0\lesssim\frac{b_{n+1}-\sqrt{a}}{b_{n+1}+\sqrt{a}}\lesssim\frac{b_{n+1}-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}<\frac{1}{2\sqrt{a}}<\frac{1}{2}$$

tanım aralığı geçerli olur ve (1.2.27)'deki içlerin yer değiştirmesiyle

$$0<\frac{b_{n+1}-\sqrt{a}}{\left(b_n-\sqrt{a}\right)^{m+1}}\left(=\underbrace{\frac{b_{n+1}+\sqrt{a}}{\left(b_n+\sqrt{a}\right)^{m+1}}}_{=:\rho_{m+1,n+1}}<\frac{2\sqrt{a}+1}{\left(2\sqrt{a}\right)^{m+1}}<\frac{3}{2^{m+1}}\right)<1$$

eşitsizlikleri geçerli olur ki, b_{n+1}'in mutlak hatasına göre,

$$(1.2.35)\quad b_{n+1}-\sqrt{a}=\rho_{m+1,n+1}\left(b_n-\sqrt{a}\right)^{m+1}\quad\left(0<\rho_{m+1,n+1}<\frac{2\sqrt{a}+1}{\left(2\sqrt{a}\right)^{m+1}}<1\right)$$

eşitliğinden b_{n+1}'in bir önceki adıma göre $\sqrt{a}$'ya $(m+1)$-inci mertebeden yakınsadığı sonucu çıkar.

Aynı şekilde, (1.2.28)'deki soldaki oran, dolayısıyla (1.2.28)'deki oranlar $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ aralığında tanımlı olduklarından ve (1.2.28)'deki içlerin yer değiştirmesinde $1<\sqrt{a}<\cdots<b_{n+1}<b_n<\cdots<b_0<\sqrt{a}+1$ eşitsizlikleri göz önüne alınırsa,

$$0<\frac{b_{n+1}-\sqrt{a}}{\left(b_0-\sqrt{a}\right)^{(m+1)^{n+1}}}\left(=\underbrace{\frac{b_{n+1}+\sqrt{a}}{\left(b_0+\sqrt{a}\right)^{(m+1)^{n+1}}}}_{=:\varepsilon_{m+1,n+1}}<\frac{2\sqrt{a}+1}{\left(2\sqrt{a}\right)^{(m+1)^{n+1}}}<\frac{3}{2^{(m+1)^{n+1}}}\right)<1$$

eşitsizlikleri geçerli olur ve yine b_{n+1}'in mutlak hatasına göre,

$$(1.2.36)\quad b_{n+1}-\sqrt{a}=\varepsilon_{m+1,n+1}\left(b_0-\sqrt{a}\right)^{(m+1)^{n+1}}\quad\left(0<\varepsilon_{m+1,n+1}<\frac{3}{2^{(m+1)^{n+1}}}<1\right)$$

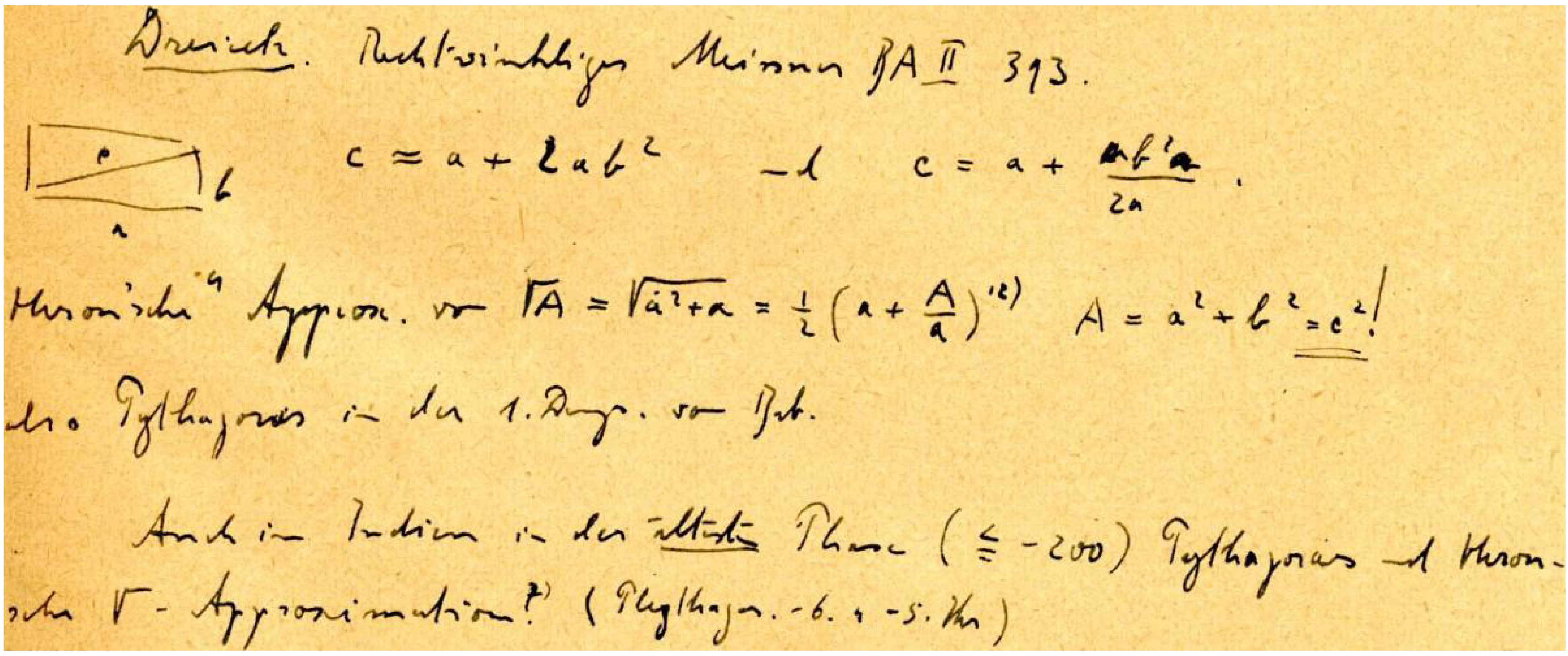
eşitliğinden b_{n+1}'in b_0 başlangıç değerine göre $\sqrt{a}$'ya $(m+1)^{n+1}$-inci mertebeden yakınsadığı sonucu çıkar.

Sonuçta (1.2.35) ve (1.2.36)'daki b_{n+1}'in $\sqrt{a}$'ya anılan mertebelerde kaç basamak yakınsadığını eşitliklerin her iki tarafında logaritma alarak kolaylıkla görebilirsiniz. Ayrıca m çift için $b_{n+1}\lesssim\sqrt{a}$ yaklaşımına göre (1.2.27) ve (1.2.28) için $\left]-\frac{1}{2},0\right]$ tanım aralığı ve b_{n+1}'in mutlak hatasındaki $\rho_{m+1,n+1}$ ve $\varepsilon_{m+1,n+1}$ katsayılarının $(-1,0)$ aralığında tanımlı oldukları benzer şekilde gösterilebilir. Dolayısıyla buradan b_{n+1}'in $b_{n+1}\lesssim\sqrt{a}$ haline göre de anılan mertebelere sahip olduğu sonucu çıkar!

Babilliler tam kare olmayan a sayısının karekökü için genellikle (1.1.1)'deki x_1'e ya da (1.1.3)'teki ilk yaklaşım formülüne başvuruyorlardı. ***Neugebauer*** 1928-1945'te Eski Babil tabletlerine çalışırken bu ilk yaklaşım formüllerine ait prosedürleri çıkartır!

Şimdi ***Neugebauer***'in çıkarttığı prosedürleri aşağıda teker teker inceleyelim.

1.3.1. *Neugebauer*'in Tabletlerden Çıkarttığı Prosedürler. ***Neugebauer***, ilkin "*Vorlesungen über Geschichte der vorgerische Mathematik*" adlı kitabına ait notlarında "*Bölüm 6: Babil Geometrisi*"ne girişini yazarken 4 Mayıs 1928'de el yazısıyla bir not çıkartmış ve bu sayfanın altına yakın bir yerde, dik kenarları rasyonel olan bir dik üçgenin kökü alınamayan hipotenüsü için ***Heron***'un yaklaşım formülünün Eski Babil döneminde ya da I. Hanedanlıkta (MÖ 1894-1595) bilindiğini hayretle şöyle gözlemler (ki aşağıdaki sayfadaki çalışmayı yorumlayan kişinin "***Neugebauer***'in Pisagor bağıntısını hayretle gözlemlediği"ne ilişkin çıkarımı yeterli değildir. Çünkü ***Neugebauer***, hipotenüsü $b < a$ için $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \lesssim a + \frac{b^2}{2a}$ şeklinde yazarak daha ötesindeki bir gelişmeden bahseder: ***Heron***'un yaklaşım formülü):



Resim 1.3.1. ***Neugebauer***, 12. maddede Pisagor bağıntısının I. Babil Hanedanlığında mevcut olduğunu yazar: **"$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$ also Pythagoras in der 1. Dyn. von Bab. ($\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$, dolayısıyla I. Babil Hanedanlığındaki Pisagor bağıntısı)"**. Fakat o, bu bağıntıyı $A = a^2 + b^2 = c^2$ şeklinde ele alarak A'nın karekökü için $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + \alpha} \lesssim \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right) = a + \frac{\alpha}{2a}$ şeklinde bir ilk yaklaşımda bulunur (ki bu son bağıntıyı 12. maddede $\sqrt{A} \lesssim a + \frac{\alpha}{2a}$ şeklinde verdikten sonra bunun da I. Babil Hanedanlığında mevcut olduğunu "Dyn." kısaltmasıyla belirtir).

Resim 1.3.2. *Otto Neugebauer* 1922-1934'te Babil Matematik ve Astronomisi'ne çalışırken Götingen Üniversitesi'nde anısına plaket asılan (ki plaket açılışı 1 Temmuz 2010'da Prof. Dr. ***Hermann Hunger*** tarafından yapıldı) odada çalışıyordu. O çalışırken Nazi döneminde hoş olmayan birçok olayı burada yaşadı. Örneğin *"Siz sokağınızın aşağısında Nazi botlarının sesini duymadıysanız, dönem tarihini anlayamazsınız (Davis, 1934)"* sözünü söylerken tam olarak bu odanın aşağısındaki sokakta duyduğu Nazi botlarının sesini kast ediyordu (Bkz. "*YBC 7289 No'lu Tableti ve 2. Çözümü*", "***Neugebauer****'in Nazi Dönemindeki Mücadelesi*", S. 2).

Burada ***Neugebauer*** aslında **"Heronischen Approx. von $\boldsymbol{\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + \alpha} \lesssim \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)}$"** yaklaşımının Eski Babil döneminde nasıl kullanılmış olduğunu gözlemliyordu. Çünkü Pisagor bağıntısı I. Babil Hanedanlığında bilinen bir gerçekti zaten. Örneğin "*Metrica*"yı 1896'da İstanbul'da keşfeden ***H. Schöne***'nin "*HERO ALEXANDRINUS III*" kitabının 19. sayfasında kenarları 7, 8 ve 9 birim olan bir üçgenin alanı, ***Heron***'un formülüne göre (ki bu formülün nereden geldiği tartışmalıdır. Örneğin İslam matematikçileri bu formülün ***Arşimet***'ten geldiğini söylerler), $\sqrt{720}$ oluyor ve ***Heron***, bunun için $26 < \sqrt{720} < 27$ olduğundan $\sqrt{720} \lesssim \frac{1}{2}\left(27 + \frac{720}{27}\right) = 26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(= 26\frac{5}{6}\right)$ yaklaşık sonucunu veriyordu. Ama aynı formülün kullanıldığı Eski Babil tabletleri de mevcut idi, dolayısıyla ***Neugebauer*** Eski Ahit'teki Tufan olayını tabletlerde okuyan ***George Smith*** ile aynı şokun içerisine girmişti (Bkz. "*Dünyanın İlk Süper Kahramanı: Gılgamış*").

Neugebauer'in bu şoku atlatıp atlatmadığı bilinmez ama, 6-9 Mart 1934'te "*Vorgerische Mathematik*" adlı kitabının 8. sayfasındaki "*2) Approx. von irrational. √a*" parçasında yeni bir prosedür tanımlarken bu prosedürdeki α_2 ve β_2 yaklaşıklık çiftini (1.2.2) ve (1.2.5)'teki $\left(b; \frac{2b}{c}, 2b\right)_{(1)}$ ve $\left(b; \frac{2b}{c}, 2b\right)_{(3)}$ sürekli kesirleri olarak verir. Bu, ***Neugebauer***'in 1. prosedürüdür (Bkz. Daha fazla bilgi için Bölüm 2). ***Neugebauer***, aynı kitapta $\left(b; \frac{2b}{c}, 2b\right)_{(1)}$ ilk yaklaşımıyla AO 6484 no'lu tabletinde geçen 0;42,30 ve bunun 2 katı olan 1;25 değerlerinin nasıl elde edildiğini gösterir (Bkz. Not 1.3.5).

1.3.1.1. 2. Prosedür. ***Neugebauer***, bu prosedürü ilkin 6-9 Mart 1934'te kullanır ama tam tanımını 1 Ocak 1945'te "*Mathematical Cuneiform Texts (Matematiksel Çivi Yazıtları)*" kitabının 42-43. sayfalarında yer alan "*§ 4: Geometrical Problems/Simple Problems: a. Diagonal of a Square*" parçasında şöyle verir (Bkz. "*YBC 7289 No'lu Tableti ve 2. Çözümü*", "*1.1.1.1.* ***Neugebauer****'in Prosedürü*", S. 1-2): İrrasyonel $\sqrt{a}$ sayısına rasyonel yaklaşıklar için ilkin

$$\text{(1.3.1)} \quad \sqrt{a} < \alpha_1$$

üst sınırını göz önüne aldıktan sonra buna karşılık gelen

$$\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} < \alpha_1 \Rightarrow \text{(1.3.2)} \quad \sqrt{a} > \frac{a}{\alpha_1} = \beta_1$$

alt sınırını veriyordu!

Şimdi, α_2 ve β_2 yeni yaklaşıklıklarını

$$\text{(1.3.3)} \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \beta_2 = \frac{a}{\alpha_2}\left(= \frac{2\alpha_1\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1}\right)$$

aritmetik ve harmonik ortalamalarından türetir ve işlemi bu şekilde devam ettirirsek,

$$(1.3.4)\quad \alpha_3=\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}, \beta_3=\frac{a}{\alpha_3}\left(=\frac{2\alpha_2\beta_2}{\alpha_2+\beta_2}\right)$$

şeklinde yeni yaklaşıklıklar söz konusu olur ve aynı türetme sonucunda $\sqrt{a}$'ya yakınsayan şu rasyonel yaklaşıklık çifti elde edilir:

$$(1.3.5)\quad \alpha_{n+1}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}=\frac{\alpha_n+\frac{a}{\alpha_n}}{2}\xrightarrow{n\to\infty}\sqrt{a},\quad \beta_{n+1}=\frac{a}{\alpha_{n+1}}=\frac{2\alpha_n\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\xrightarrow{n\to\infty}\sqrt{a}.$$

Burada $\forall n\in\mathbb{N}^+$ için α_n ve β_n'ler $\sqrt{a}$'ya kuadratik olarak yakınsama yaparlar. Bu, Matematik Tarihi'nde bilinen ilk AHM (Aritmetik-Harmonik Ortalama) algoritmasıdır! ***Gauss*** ve ***Legendre***, AGM (Aritmetik-Geometrik Ortalama) algoritmasıyla π'ye kuadratik olarak yakınsama yapıyorlardı. Daha sonra ***Brent*** ve ***Salamin***, bu algoritmayı 1975'te geliştirdiler ve π'nin 206,158,430,000 basamağını hesapladılar (Bkz. "*Gauss-Legendre algorithm*"). Fakat ***Newton*** ve ***Raphson***'un Eski Babillilerden 34 yüzyıl sonra aynı yöntemi kullanmış olmaları daha dikkat çekiciydi (Bkz. "*Newton-Raphson Metodu*").

Acaba ***Neugebauer*** bizimle matrak mı geçiyordu? Çünkü modern bir algoritma olan AHM'yi Eski Babilonya'ya postalamak hiç de akıl kârı değildi. Peki her şeyden önce ***Neugebauer***, bu prosedürü nasıl bulmuştu?

Bu algoritma hakkında ***Neugebauer***'in 1928-1945 arasında araştırmalar yaptığını biliniyor, dolayısıyla birçok tablete çalıştıktan sonra edindiği engin tecrübesi sonunda bulduğunu varsayıyoruz. Gerçekten Babil algoritmasının orijini için $\sqrt{a}<\alpha_n$ eşitsizliğini gözönüne alırsak cebrik olarak,

$$(1.3.6)\quad \begin{cases}\sqrt{a}<\alpha_n\Rightarrow 0<\left(\alpha_n-\sqrt{a}\right)^2={\alpha_n}^2-2\alpha_n\sqrt{a}+a\Rightarrow\sqrt{a}<\dfrac{\alpha_n+\frac{a}{\alpha_n}}{2}=\alpha_{n+1}\\ \Rightarrow\beta_{n+1}=\dfrac{a}{\alpha_{n+1}}=\dfrac{2\alpha_n\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}<\sqrt{a}\end{cases}$$

ya da geometrik olarak $\sqrt{a}$'nın alt ve üst sınırlarının aritmetik ortalamasıyla,

$$(1.3.7)\quad \begin{cases}\sqrt{a}<\alpha_n\Rightarrow\dfrac{a}{\sqrt{a}}<\alpha_n\Rightarrow\dfrac{a}{\alpha_n}<\sqrt{a}\Rightarrow\dfrac{a}{\alpha_n}<\sqrt{a}<\alpha_n\Rightarrow\sqrt{a}<\alpha_{n+1}=\dfrac{\alpha_n+\frac{a}{\alpha_n}}{2}<\alpha_n\\ \Rightarrow\beta_n<\beta_{n+1}=\dfrac{a}{\alpha_{n+1}}=\dfrac{2\alpha_n\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}<\sqrt{a}\end{cases}$$

şeklinde (1.3.5)'teki çifte iterasyonunu elde ederiz. Buna ilişkin kare açılımını gösteren Eski Babil tabletleri vardır. Ayrıca Eski Babil tabletlerinde küp açılımının ve zayıf da olsa küpkök yaklaşımlarının verilmesi, bunu kesinlikle doğrular!

1.3.1.2. 1. Prosedür. ***Neugebauer*** bu prosedüre ait ilk yaklaşıklıklığı 4 Mayıs 1928'de verir (bkz. Resim 1.3.1) ve 6-9 Mart 1934'te de "*Vorgerische Mathematik*" adlı kitabının 8. sayfasındaki "*2) Approx. von irrational. √a*" parçasında yukarıdaki 2. prosedüre bağlı olarak $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ yaklaşıklıklarını sürekli kesirler olarak şu şekilde bulur: $h^2+v^2=d^2$ Pisagor bağıntısında $v<h$ olduğundan

$$(1.3.8)\quad \alpha_1=h<d$$

şeklinde bir başlangıç değerini ya da ilk yaklaşıklıklığını (alt sınır) göz önüne aldıktan sonra buna karşılık gelen üst sınır yaklaşıklıklığını (1.3.2)'ye göre şöyle verir:

$$(1.3.9)\quad d<\beta_1=\frac{d^2}{\alpha_1}=\frac{h^2+v^2}{h}=h+\frac{v^2}{h}.$$

Neugebauer, (1.3.8) ve (1.3.9)'daki α_1 ve β_1'i (1.3.3)'te yerlerine koyup gerekli düzenlemeleri yaptıktan sonra 2. yaklaşıklıkları şöyle bulur:

$$(1.3.10)\quad \begin{cases}\alpha_2=\dfrac{\alpha_1+\beta_1}{2}=\dfrac{h+h+\frac{v^2}{h}}{2}=h+\dfrac{v^2}{2h},\\ \beta_2=\dfrac{2\alpha_1\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}=\dfrac{2h\left(h+\frac{v^2}{h}\right)}{h+h+\frac{v^2}{2h}}=\dfrac{2h^3+2v^2h}{2h^2+v^2}=h+\dfrac{v^2h}{2h^2+v^2}.\end{cases}$$

Şimdi ***Neugebauer***'in bulduğu bu yaklaşıklıkları $b\to h$ ve $c\to v^2$ dönüşümlerine göre yazarsak (1.2.1) ve (1.2.2)'ye göre α_1 ve α_2 şu şekilde ortaya çıkarlar:

$$(1.3.11)\quad \begin{cases}\alpha_1=\left(h;\overline{\frac{2h}{v^2},2h}\right)_{(0)}=h<\sqrt{h^2+v^2},\\ \sqrt{h^2+v^2}\le h\dfrac{v^2}{2h}=\left(h;\overline{\frac{2h}{v^2},2h}\right)_{(1)}=\alpha_2.\end{cases}$$

Fakat ***Neugebauer***'in 1. ve 2. prosedürü birleştirip bulduğu bu yaklaşıklıklar için yeni bir prosedür tanımlamamız gerekir ki, bu bize 1.2.1'de sözüne ettiğim yüksek mertebeden iterasyonlardan kuadratik olanlarını verir.

1.3.1.3. 3. Prosedür: ***Hitler***'in mesajı açık ve net, pardon ***Neugebauer***'in prosedürü çok açık: Eğer (1.1.1) için $x_0=b<\sqrt{b^2+c}=\sqrt{a}$'ya karşılık $\sqrt{a}<y_0=\frac{a}{x_0}=\frac{b^2+c}{b}=b+\frac{c}{b}$ başlangıç değerlerini göz önüne alırsak $n\in\mathbb{N}$ için x_n ve y_n'nin sürekli kesirlere ayrılışları şu şekilde elde edilirler:

$$(1.3.12)\quad \begin{cases} x_0 = b, y_0 = \dfrac{b^2 + c}{x_0} = b + \dfrac{c}{b}, \\ x_1 = \dfrac{x_0 + y_0}{2} = b + \dfrac{c}{2b}, y_1 = \dfrac{2x_0y_0}{x_0 + y_0} = b + \dfrac{c}{2b + \frac{c}{b}}, \\ x_2 = \dfrac{x_1 + y_1}{2} = b + \dfrac{c}{2b + \dfrac{c}{2b + \frac{c}{2b}}}, y_2 = \dfrac{2x_1y_1}{x_1 + y_1} = b + \dfrac{c}{2b + \dfrac{c}{2b + \dfrac{c}{2b + \frac{c}{b}}}}, \\ x_3 = \dfrac{x_2 + y_2}{2} = b + \dfrac{c}{2b + \dfrac{c}{2b + \dfrac{c}{2b + \dfrac{c}{2b + \dfrac{c}{2b + \dfrac{c}{2b + \frac{c}{2b}}}}}}}, y_3 = \dfrac{2x_2y_2}{x_2 + y_2} = b + \dfrac{c}{2b + \dfrac{c}{2b + \dfrac{c}{2b + \dfrac{c}{2b + \dfrac{c}{2b + \dfrac{c}{2b + \dfrac{c}{2b + \frac{c}{b}}}}}}}}, \\ \vdots \end{cases}$$

Bu sürekli kesirler AHM nedeniyle $\sqrt{a} = \sqrt{b^2 + c}$'ye kuadratik olarak yakınsarlar.

Şu halde bu son prosedüre göre ***Neugebauer***'in bulduğu yaklaşıklıkları artık tam olarak verebiliriz: Yine burada $b \to h$ ve $c \to v^2$ dönüşümlerine göre

$$(1.3.13)\quad \begin{cases} \alpha_0 = h, \beta_0 = \dfrac{h^2 + v^2}{h} = h + \dfrac{v^2}{h}, \\ \alpha_1 = \dfrac{\alpha_0 + \beta_0}{2} = h + \dfrac{v^2}{2h}, \beta_1 = \dfrac{2\alpha_0\beta_0}{\alpha_0 + \beta_0} = h + \dfrac{v^2}{2h + \frac{v^2}{h}} = h + \dfrac{v^2h}{2h^2 + v^2}, \\ \vdots \end{cases}$$

sonuçları elde edilir ki, ***Neugebauer***'in diğer yaklaşıklıkları neden vermediği (1.3.12)'den açıkça görülür. Çünkü AHM nedeniyle α_n ve β_n'nin rasyonel polinomal ifadelerindeki polinomların dereceleri (1.3.12)'deki sürekli kesirlerdeki gibi inanılmaz büyürler!

Şimdi $\sqrt{a}$ için yukarıda 3 farklı prosedür verdiğime göre, artık Antik Dönem'deki örnekleri inceleyebiliriz.

1.3.2. Tarihi Örnekler

1.3.2.1. VAT 6598 No'lu Tablet: Berlin Müzesi'nde bulunan tablet Erken Babilonya Dönemi (M.Ö. 2000-1700) tarihlenmesine karşın en iyi teklif M.Ö. 2000 civarıdır.

Problem 5-a ve 6-a: Bir kapının eni $w = 2$ Kuš $= 0; 10$ Nindan ve boyu $h = 0; 40$ Nindan (~~Kuš~~) ise d köşegeni nedir?

Tablette her 2 problemde kapının boyu için $h = 40$ Kuš verilir ama çözümlere bakıldığında $h = 0; 40$ Nindan olduğu görülür. Burada 1 Kuš ya da 1 (Kısa) Kübit yarım metreye civarında temel uzunluk ölçüsü olduğundan ebatları $w \times h \approx 1\ \mathrm{M} \times 4\ \mathrm{M}$ olan büyük bir kapıyla, daha doğrusu şehre bir geçit girişiyle (Gate) karşı karşıya olduğumuzu anlarız. Tabletteki sayılara geçtiğimizde ise şu okumaların yapılmış olduğunu görürüz: ***Neugebauer*** kapının boyutlarını ilkin 6-9 Mart 1934'te "*Vorgerische Mathematik*" adlı kitabının 8. sayfasındaki "*II. VAT 6598*"de 0;10 ve 0;40 okuyor ve sonra "*Mathematische Keilschrift-Texte I (MKT I), 1935*"deki 34-36. sayfalarında 10 ve 40 olarak okuyor, dolayısıyla 2 farklı çözüm yapıyor. ***Jöran Friberg*** ise BM 96957 no'lu tabletin desteğinde VAT 6598 no'lu tabletteki problemleri okuyarak ***Neugebauer***'in ilk okumasına sadık kalır (Bkz. "*A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts*", S. 304-307. ***Jens HØYRUP*** bu okumayı esas alır. Bkz. "*Pythagorean Rule and Theorem*", S. 397-399).

Çözümler: Problem 5-a ve 6-a'daki kapının köşegen uzunluğu için şu çözümler söz konusu olmaktadır:

1. **Problem 5-a'nın Orijinal Çözümü:** ***Neugebauer***'e göre bu problem şu şekilde çözülmüştür (Bkz. "*MKT I, 1935*", S. 34-36):

$$(1.3.14)\quad \sqrt{40^2 + 10^2} < 40 + \frac{10^2}{2 \times 40} = 40 + 1; 15 = 41; 15.$$

Fakat ***Friberg***'e göre bu çözüm şu şekilde olmalıdır (ki bu çözüm, ***Neugebauer***'in ilk okumasına bağlı olan çözümdür. Bkz. S. 8'deki "*II. VAT 6598*, 1)". ***Neugebauer*** orada 1 Nindan'a (Uzun Kübit) karşılık gelen 1 GAR'ı yaklaşık 6 M alır):

$$(1.3.15)\quad \sqrt{0; 40^2 + 0; 10^2} < 0; 40 + \frac{0; 10^2}{2 \times 0; 40} = 0; 40 + 0; 1{,}15 = 0; 41{,}15.$$

Not 1.3.1 (Problem 5-a'nın 2. Çözümü). Kapının eni ve boyu 0;10'nun katları olduğundan köşegen uzunluğu $\sqrt{0; 40^2 + 0; 10^2} = 0; 10\sqrt{4^2 + 1^2}(= 0; 10\sqrt{17})$ Nindan olur, dolayısıyla problemin çözümü $\sqrt{17}$ için 60 tabanında bir yaklaşıklık aramaya indirgenmiş olur. Yani $4 < \sqrt{17} = \sqrt{4^2 + 1^2} < 5$ aralığında tanımlı $\sqrt{17}$ sayısı alt sınıra daha yakın olduğundan $x_0 = 4$ ve $a = 17$ için $y_0 = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4} = 4; 15$ olup (1.1.1)'e göre

$$(1.3.16)\quad x_1 = \frac{x_0 + y_0}{2} = \frac{4 + 4; 15}{2} = \frac{8; 15}{2} = 0; 30 \times 8; 15 = 4; 7{,}30$$

ilk yaklaşık değeriyle

$$(1.3.17)\quad \sqrt{0; 40^2 + 0; 10^2} = 0; 10\sqrt{17} < 0; 10x_1 = 0; 10 \times 4; 7{,}30 = 0; 41{,}15$$

olarak elde edilirken, bu sonuç (1.1.3)' e göre $b = 4$ ve $c = 1$ için derhal elde edilir:

$$(1.3.18)\quad \sqrt{0; 40^2 + 0; 10^2} = 0; 10\sqrt{4^2 + 1^2} < 0; 10 \times \left(4 + \frac{1}{2 \times 4}\right) = 0; 10 \times 4; 7{,}30 = 0; 41{,}15.$$

2. **Problem 6-a'nın Orijinal Çözümü (28.02.2008, 23:40):** Bu problemin çözümünde hem ***Neugebauer***'de hem de ***Friberg***'de hata vardır. ***Friberg***, VAT 6598'deki 6-a problemini çeviri yazısıyla birlikte ***Neugebauer*** gibi çözerken şu sonuçları verir (Bkz. "*A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts*", S. 306): İlkin kapı genişliğini $w = 2\ Ku\check{s} = \frac{2}{12} = \frac{1}{\underbrace{6}_{(10)}} = \frac{10}{60} = 0;10\ Nindan$ olarak verir. Bu, tablet metninin 2. cümlesinin başında geçer. Sonra kapının genişliğinin karesini yani $w^2 = (0;10\ Nindan)^2 = 0;10^2\ Nindan^2 = 0;1{,}40\ \check{s}ar$ şeklinde aldıktan sonra bunu $h = 40$ Kuš'luk kapı yüksekliğiyle çarparak $w^2h = 0;1{,}40\ \check{s}ar \times 40$ Kuš $=$ $0;1{,}6{,}40$ sonucunu verir. Fakat bu işlemin doğru sonucu 1;6,40'tır. Bu sonuç tablet metninin 3. cümlesinin başında verilir ama konumlu olarak nasıl yazıldığı belli değildir. Buradaki hata şu: h yüksekliği Nindan'a çevrilmeden çarpma işlemi yapılamaz. Dolayısıyla ya tableti yazan kâtip bir hata yapmış ya da tableti okuyan yorumcular tabletteki metrolojiyi doğru çözemedikleri için bir hata yapıyorlar: ***Neugebauer*** 1934'te bu problemi çözerken birimlere aldırmadan işlemleri sadece sayılar üzerinden yürütürken, ***Friberg*** 2007'de tabletteki çeviri yazısıyla birlikte hem birimleri verir hem de ***Neugebauer***'in çözümünü tekrarlar. Ancak her ikisinin, bu son bulunan sonucun 2 katını $2w^2h = 2 \times 0;1{,}6{,}40 = 0;2{,}13{,}20$ almak ve buna da h yüksekliğini eklemesiyle $h + 2w^2h = 0;40 + 0;2{,}13{,}20 = 0;42{,}13{,}20$ sonucunu vermesi hata olmuş. Çünkü bu sonucun birimi d köşegeninde Nindan'dır ve 1. terimdeki kapı yüksekliği $h = 0;40$ Nindan iken 2. terimdeki $2w^2h$ Nindan değil šar'dır!

Şimdi her 2 araştırmacının (ortak) hatasını düzelmek için kapının genişliği $\mathrm{w} = 2$ Kuš $= 0;10$ Nindan ve yüksekliği $\mathrm{h} = 0;40$ Nindan olmak üzere

$$(1.3.19)\quad \sqrt{2\mathrm{h}^2 + (2\mathrm{w})^2} < 2\mathrm{h}$$

yaklaşımını göz önüne alırsak d köşegenini şu şekilde bulabiliriz:

$$(1.3.20)\quad \begin{aligned} \mathrm{d} &= \sqrt{\mathrm{h}^2+\mathrm{w}^2} < \mathrm{h} + \frac{\mathrm{w}^2}{2\mathrm{h}} = \mathrm{h} + \frac{2\mathrm{w}^2\mathrm{h}}{(2\mathrm{h})^2} < \mathrm{h} + \frac{2\mathrm{w}^2\mathrm{h}}{2\mathrm{h}^2 + (2\mathrm{w})^2} = 0;40\ \mathrm{Nindan} + \frac{2 \times (0;10\ \mathrm{Nindan})^2 \times 0;40\ \mathrm{Nindan}}{2 \times (0;40\ \mathrm{Nindan})^2 + (2 \times 0;10\ \mathrm{Nindan})^2} \\ &= 0;40\ \mathrm{Nindan} + \frac{0;2{,}13{,}20\ \mathrm{Nindan}^3}{1\ \mathrm{Nindan}^2} = 0;40\ \mathrm{Nindan} + 0;2{,}13{,}20\ \mathrm{Nindan} = 0;42{,}13{,}20\ \mathrm{Nindan}. \end{aligned}$$

Sonuç 1.3.1. Bu çözüme göre Problem 5-a ve 6-a'daki yaklaşıklıkların arasında kalan, dolayısıyla aritmetik ortalamasına yakın olan 3. yaklaşıklıkları şu şekilde bulabiliriz:

$$(1.3.21)\quad \begin{aligned} \mathrm{d} &= \sqrt{\mathrm{h}^2+\mathrm{w}^2} < \mathrm{h} + \frac{\mathrm{w}^2}{2\mathrm{h}} < \mathrm{h} + \frac{\mathrm{w}^2}{\sqrt{2\mathrm{h}^2 + (2\mathrm{w})^2}} = 0;40\ \mathrm{Nindan} + \frac{(0;10\ \mathrm{Nindan})^2}{\sqrt{2 \times (0;40\ \mathrm{Nindan})^2 + (2 \times 0;10\ \mathrm{Nindan})^2}} = 0;40\ \mathrm{Nindan} + \frac{0;1{,}40\ \mathrm{Nindan}^2}{1\ \mathrm{Nindan}} \\ &= 0;40\ \mathrm{Nindan} + 0;1{,}40\ \mathrm{Nindan} = 0;41{,}40\ \mathrm{Nindan}. \end{aligned}$$

Bu çözümün değeri ***Neugebauer***'in 2. okumasına bağlı olarak $h = 40$ ve $\mathrm{w} = 10$ alınırsa (1.3.20), dolayısıyla (1.3.21) daha iyi anlaşılır!

Not 1.3.2. ***Ernst F. Weidner***, yukarıdaki 5-a ve 6-a problemlerini Eylül 1916'da çıkan "*Orientalische Literaturzeitung*"un 256-263. sayfalarında yer alan "*Die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke bei den Akkadern um 2000 (Akadlar'da 2000 Yılı Civarında Dik Üçgenlerin Hesaplanması)*" adlı makalesinde inceler. O, 5-a ve 6-a problemlerinin çözümü için (dikdörtgenin boyu a, eni b ve köşegeni c'dir) $c = a + \frac{\mathrm{b}^2}{2\mathrm{a}}$ ve $c = a + \frac{2\mathrm{ab}^2}{3600}$ yaklaşım formüllerini önerir. ***Neugebauer*** bunlardan ilkini aynen kullanırken ikincisinde paydadaki 3600'ü atarak $c = a + 2\mathrm{ab}^2$ şeklinde kullanır (ki bunun için ilkin 1931'de $c = a + \frac{2\mathrm{ab}^2}{2\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}$ formülüyle imkânsız olan bir denemede bulunmuştu). Burada ***Weidner***'ın 3600 bölenini, kesirler için bile basamak değeri sisteminin kullanımını kesinlikle az çok anladığı, ancak yine de bu anlayıştan etkilenmemiş bir ruhla bir anda yazdığının belirtisi olmakla birlikte, (1.3.20) ve (1.3.21)'i bu durumu açıklamak için verdim (Bkz. Daha geniş bilgi için "*A Mathematician's Journeys: Otto Neugebauer and Modern Transformations of Ancient Science*", S. 169-175). Söz konusu VAT 6598 no'lu tabletin çevirisi ***Weidner*** tarafından 258. sayfada dikdörtgenin altında verilirken, ***Neugebauer***'in çevirisi ***Weidner***'ın çevirisiyle birlikte 170. sayfada verilir. Sonraki gelişmeler için "*ICETIS 2021: STEM education in ancient Mesopotamian period: Looking through few Mathematics Problems*" sonuç bildirgesine bakınız.

1.3.2.2. Metrica'daki Örnekler. ***İskenderiyeli Heron***'un MS 62'de İskenderiye Kütüphanesi'nde pek çok icat yaparak, bu arada bilimin pratik ve amprik (deneysel) niteliği üzerinde durarak büyük bir ün kazandığı söylenir. Yani ***Heron*** tıpkı ***Arşimet*** gibi hem bir matematikçi hem de bir mucit idi. Geometri alanındaki en önemli eseri olan ***"Metrica (Ölçüm)"***'nın bir kopyası 1896'da İstanbul'da Alman araştırmacı ***H. Schöne*** tarafından keşfedildi. Fakat keşfedilir keşfedilmez kitaptaki bilgiler Batılı emperyalist ideologları tarafından esaslı bir araştırmaya tabi tutulmaz, çarpıtmalarla Matematik Tarihi'ne ilk bilgiler olarak geçilir. Ancak 1 Ocak 1945'te ***O. Neugebauer*** ve ***A. J. Sachs***'ın "*Matematiksel Çivi Yazıtları (Mathematical Cuneiform Texts), New Heaven, Conn., 1945*" adlı kitabında başta Plimpton 322 ve YBC 7289 olmak üzere yayınlanan tabletlerin çevirilerinin verilmesiyle birlikte ortaya çıkan gelişme, tüm bu yorumlara ve beraberinde gelen tartışmalara son noktayı koyar. Örneğin bu çevirilerden hareket eden araştırmacılar, ***"Heron'un Algoritması"*** olarak anılan algoritmanın esaslı bir şekilde Babil kaynaklı olabileceğini düşünmeye başladılar, hatta ellerindeki bulgularla bunu iddia bile ettiler. Fakat kitabın keşfiyle başlangıçta Batılı emperyalist ideologlarca kopartılan fırtınanın kimseyi dinlemeye hiç mi hiç niyeti yoktu!

Oysa Antik Yunanlılar, kendilerinin (eserlerinde açıkça belirtmeseler de) eski medeniyetlerin devamı olduklarını, dolayısıyla bu bilgilerin oralardan geldiğini defalarca söylemişlerdi. Bu konuda ***Sitchin***, "*Birdenbire Uygarlık*" bölümünün başlangıcında şöyle der: "*Uzun zaman boyunca Batılı insanlar, uygarlığının Roma ve Grek uygarlıklarının bir hediyesi olduğuna inandılar. Ama Grek filozofları, tekrar tekrar daha erken kaynaklardan yararlandıklarını yazmışlardı. Daha sonraları Avrupa'ya dönen seyyahlar Mısır'da yarı yarıya kumlara gömülmüş ve Sfenks denilen garip taştan hayvanlar tarafından korunan piramitler ve tapınak şehirlerin varlığını bildirdiler*". Bkz. "*Altını Çizdiğim Satırlar: 12. Gezegen*".

Buna göre Metrica'dan Matematik Tarihi'ne geçilen ilk bilgilerden biri kareköklü sayılara rasyonel yaklaşıklar veren ***"Heron'un Algoritması"*** idi. Bunun için Metrica'da bir sürü örnek vardır. Bunlardan ***Heron***'un 5-a tipindeki $\sqrt{720}$ sayısına rasyonel yaklaşım olarak verdiği $26\frac{5}{6}$ kesrini örnek olarak ele alabiliriz. Metrica'da bu yaklaşıklığın nasıl bulunduğuna ilişkin hesap adeta bir yemek tarifi gibi şu şekilde anlatılır (ki bu hesabı ***H. Schöne***'nin 1903 tarihli "*HERONIS ALEXANDRINI OPERA QVAE SVPERSVNT OMNIA*" kitabındaki "*METRIKON*" bölümündeki 18. sayfada ve daha fazla bilgi için ***J. L. Heiberg***'in 1912 tarihli "*HERO ALEXANDRIUS IV*" kitabındaki "*GEOMETRICA*" bölümündeki 325. sayfada bulabilirsiniz): $\sqrt{720}$'ye rasyonel bir yaklaşım için 19. sayfada adım adım şu işlemler yapılır ve bunlar orijinalde Yunanca olarak 18. sayfadaki 10, 15, 20 ve 25 no'lu satırlarda karşılıklı olarak aynen geçer.

1. İlkin kenarları üzerinde 7, 8 ve 9 düğüm olan üçgenin üzerindeki düğümlerin sayısı yani üçgenin alanı ***Heron***'un formülüne göre $\sqrt{720}$ olarak bulunuyor.

Bu formülün ispatı ***H. Schöne***'nin kitabında bir sonraki sayfada verilir. Ama bu düğümlerin sayısı kareköklü sayılar olsaydı, ***Heron***'un çaresiz kalacağı açık olacaktı ki bu durumda Ata Formülü geçerlidir. ***Büyük İskender***'in büyüdüğü topraklarda yetişen ***Atatürk***, 1921'de Türkiye'yi istila eden Yunanlıları ezici bir yenilgiye uğratmıştı ve 1922'de de yurttan tamamen söküp atmıştı (Bkz. "*Yunanlıların Gözünden Kurtuluş Savaşı*"). Fakat ***Venizelos*** 1928'de iktidara geldikten sonra "*Megali İdea*"yı gerçekleştirebilmek için Türkiye'ye karşı takip ettiği yayılmacı dış politikadan vazgeçerek, Türk-Yunan dostluğunu kurabilmek için bazı girişimlerde bulundu ve bu girişimler ***Atatürk*** tarafından memnuniyetle karşılandı (Bkz. "*Venizelos'un Atatürk'ü Nobel Barış Ödülüne Aday Göstermesi*").

Burada altını çizdiğim yer "*Avrupa Rönesansı'ndaki 'Mükemmel Adam' Figürleri*" adlı makalemin 29. sayfasındaki "*El yazmaları İstanbul'dan kaçırıldı!*" parçasının sonundan alınmadır. O sayfadaki Arşimet Palimpsesti ile ilgili bilgiler T24'ün "Ayasofya'nın mimarları Arşimet'in kitabından faydalandı" makalesinden alınmıştır ve T24 de, "*THE ARCHIMEDES CODEX*"ten almıştır.

Peki nasıl?

Şöyle: T24'ün makalesinin sonundaki,

"Metochoin'deki el yazmaları 1938 yılına kadar Atina'daki Yunanistan Ulusal Kütüphanesi'ne taşınmıştı. Bu nakil, böyle şeylerin yurt dışına çıkartılmasını özellikle yasaklayan Türk yetkililerin burunlarının dibinde gerçekleşti. ***Atatürk****, 1921'de Türkiye'yi istila eden Yunanlıları ezici bir yenilgiye uğratmıştı. Türkiye'de yaşayan binlerce Yunanlı karşılıklı mübadele ile Yunanistan'a göç etti. Metochion'daki kitapların gizlice Atina'ya kaçırılması bu ortamda gerçekleşti…"*

parçası "*THE ARCHIMEDES CODEX*"in şu parçasından alınmıştır (ki bunun böyle olduğunu bir sonraki parçada, "*Tarihi kayıtların izinde!*"nin ilk paragrafında söylemiştim):

"Paris'te Kayıp

1938 yılına gelindiğinde Metochion'un el yazmaları Atina'daki Yunanistan Ulusal Kütüphanesi'ne taşınmıştı. Bu işlem, bu tür ihracatı özellikle yasaklamış olan Türk yetkililerin burnunun dibinde yapıldı. Kuşkusuz bu, kitapların Metochion'da kalmasından daha güvenliydi, çünkü oradaki yaşam çok tatsız hale gelmişti.

I. Dünya Savaşı'nın sonunda, İstanbul'daki İngiliz ve Fransız askeri varlığı, güçten düşmüş bir Osmanlı İmparatorluğu'nun Sultanını destekliyordu. ***Mustafa Kemal*** *- daha sonra* ***Atatürk****- başkenti terk etti ve modern Türkiye devletini kurmak için Türk milliyetçilerini bir araya getirdi. 1923 yılında Müttefikler ve Sultan Konstantinopolis'ten çıkarıldı. Bu süreçte* ***Atatürk****, 1921'de Türkiye'yi aceleyle işgal eden Yunanlıları yenilgiye uğrattı. Etnik temizliğin erken bir örneği olarak, Türkiye'de yaşayan yüz binlerce Rum zorla Yunanistan'a nakledildi (Bkz. "Balkan Göçü-1912"). 1925'te,* ***Atatürk*** *dini emirleri kaldırdı ve İstanbul Rum Patriğini astırdı (In 1925, Ataturk abolished religious orders and hanged the Greek Patriarch of Constantinople). (Bkz. Hata yapmışım: İdam ettiğimiz Patrik sayısı 2 değil 3'müş!).*

İşte bu atmosferde Metochion'daki kitaplar gizlice Atina'ya taşındı. Bunun nasıl yapıldığına dair hiçbir kayıt yok, ancak çok sessiz bir şekilde yapıldı. 20'li ve 30'lu yıllarda Metochion el yazmalarını çevreleyen sessizlik perdesi birilerine çok cazip gelmiş olmalı, çünkü Palimpsest Atina'ya asla ulaşamayan bir dizi muhteşem el yazmasından biriydi…", THE ARCHIMEDES CODEX/THE HISTORY OF THE PALIMPSEST, S. 133.

Venizelos ve _Atatürk_'ün Başlattığı Türk-Yunan Dostluğunu Anlamak!

Resim 1.3.3. Fener Rum Ortaokulu ve Lisesi 1 günlüğüne halka açıldı. Halk arasında "Kırmızı Mektep" olarak bilinen Fener Rum Ortaokulu ve Lisesi, bugün 1 günlüğüne yeni yıl kermesiyle ziyaretçilere açıldı. Ziyarete gelenler, kapıda uzun kuyruklar oluşturdu, sokaklar dolup taştı.

Fakat T24'te yayınlanan bu makaleyi yazan ***Bülent Günal***, yukarıdaki özellikle 2. paragraftaki ***Atatürk*** ile ilgili hoş ve doğru olmayan yerleri makalesine almazken (ki bunda ***Atatürk***'ün ortak değerimiz olması rol oynar), buradaki kırmızı renkli ifade tam bir faciadır. Çünkü bu ifade doğru değildir. Doğrusu ***Mustafa Bardakçı***'nın makalesinde geçer. Burada şurası çok açıktır ki AB-D, Türkiye ile Yunanistan'ı emperyalist amaçları için kapıştırmaya çalışıyor. Ama biz onların oyununa gelmeyeceğiz. Tabii ki bu son sözü söylerken ahmak değiliz; dünyadaki tüm gelişmeleri izliyor, ona göre adımlarımızı atıyoruz. Örneğin, "*THE ARCHIMEDES CODEX*" kitabını yazan ***Reviel Netz*** ve ***William Noel***'in Türk düşmanı olduklarını Arşimet Palimpsesti'nin tarihi gelişimindeki olaylardan biliyoruz (Bkz. "*Arşimet Palimpsesti'ne Bakmak Gerekiyor!*", S. 10-11, "*Atatürk Hedef Alınıyor!*", S. 30-31, "*Arşimet Palimpsesti*", S. 29-30). Bununla birlikte 100 yıl önce İngiltere'nin hegemonyası altına giren Yunanistan'ın, 100 yıl sonra topraklarını ABD üssüne çevirerek Türkiye ile gerginliği tırmandırması son derece dikkat çekicidir. Cumhurbaşkanımız ***Recep Tayyip Erdoğan***, bu sonuçla ***Miçotakis***'in kendisini "Yok!" saydığını ilan etmekte ve Yunanistan adaları silahlandırarak başta Lozan Antlaşması olmak üzere uluslararası anlaşmalar da çiğnenmiştir (Bkz. "*İşte ABD Üslerinin Hedefi!*"). Yunanistan'ı defalarca uyaran Milli Savunma Bakanımız ***Hulusi Akar***, son tweetinde, "*(Yunanistan'a) Güvendiğiniz dağlara karlar yağmadan aklınızı başınıza alın, ayaklarınız yere bassın. Biz gerçekten samimi olarak dostluk elimizi uzatıyoruz, bu dostluk elimizi tutmakta gecikmeyin, tereddüt etmeyin!*" derken İçişleri Bakanımız ***Süleyman Soylu*** da, "*Lanet olsun insanlığınıza. Bu görüntüleri verdiğimiz için üzgünüz… Lübnan'dan İtalya'ya* *geçmek isteyen göçmenlere ve masum çocuklara yine Yunan katliamı!*" dedi ve TBMM'nde şöyle devam etti: "*Yunanistan, 100 yıl önce yaptığı gibi sırtını ağabeylerine dayayarak 9 aylık **Asım** bebek ile 4 yaşındaki **Abdulvahap**'ı ve onlara benzeyen masumları Ege Denizi'nde ölüme itti. 100 yıl önceki diğer müttefikleriyle de el birliğiyle yaptıkları gibi Akdeniz'i bir göçmen mezarlığına çevirdiler. **Akif**'in söylediği gibi tek dişi kalmış canavar, 100 yıl önce neyse bugün de aynı. Değişen, yalnızca ürettikleri sorunlarla artık kendileri de yüzleşiyorlar. Biz ise Allah'a şükür bugün daha güçlüyüz, eminiz, daha güçlü bir geleceğe yürüyoruz.*"

2. 720 bir tam kare değil, dolayısıyla karekökü tam sayı değildir ve ona en yakın kare sayı $729 = 27^2$'dir. Bu nedenle ilkin $x_0 = 27$ başlangıç değeri seçiliyor.

3. Sonra üst sınır x_0'a karşılık $y_0 = \frac{a}{x_0} = \frac{720}{27} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$ alt sınırı elde ediliyor.

4. Bu sınırların toplamı $x_0 + y_0 = 27 + 26\frac{2}{3} = 53\frac{2}{3}$'tür.

5. Buna göre sınırların aritmetik ortalaması $x_1 = \frac{x_0+y_0}{2} = \frac{53\frac{2}{3}}{2} = 26\frac{5}{6}$ olur. Fakat ***Heron*** bu sonucu bu şekilde değil şöyle yazar: $26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Çünkü ***Heron***'un zamanında kesirler halen Eski Mısır'daki gibi birim kesirlere göre yazılıyordu!

Resim 1.3.4. *Arşimet* öldürülmeden önce bir Romalı askerle, 18. yy bir mozaik çalışması.

Önerme 3'ün ispatı orijinal değil!

Bu durumda ***Arşimet***'in palimpsestindeki, özellikle Önerme 3'teki kesirlerin MS 5. yy'da ***Eutokios*** tarafından sonradan düzeltilmiş olduğu sonucu çıkar ve bu da bizi hesapların ***Eutokios*** tarafından revize edilmiş olduğu sonucuna götürür (ki buna **"Eutokios'un Yorumu"** derler). Bu durumu ilk kez 31 Ağustos 2002, 13:30'da yayımladığım Önerme 3'ün yeni bir yorumu yaparken fark etmiştim. Çünkü $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ sınırlarına ulaşılmasında hesaplarda hem yöntem farkı vardı hem de üst sınır tam sayılı birim kesirlerden elde edilirken alt sınır tam sayılı ama birim olmayan, ***Diofant***'takine benzer yeni kesirlerden elde edilmişti. Yani bu 2 anomali $3\frac{10}{71}$'in ***Eutokios***'un yorumundan geldiğini gösteriyordu! Diğer taraftan ***Heron***, Metrica'da π için (4.1)'de görüldüğü gibi çifte sınır verirken (ki (4.1)'deki sınırlar ondan sonra verilmiş olup yanlıştır ve bu sınırların verildiği çokgenler de yanlış çizilmiştir) ***Arşimet***'e ithaf edilen (4.2)'deki yalnızca üst sınırı kullanıyor ve alt sınırdan söz etmiyordu. Alt sınır ilk kez ***Eutokios***'un yorumundan sonra gözükür (Bkz. RİK 4: EK 1, S. 48-58).

Fakat bu bulguları ***Atatürk***'ün, "*Tarih yazarken gerçek olayları bulmalıyız. Eğer bunları bulamazsak, meçhuliyeti ve bu noktadan cehlimizi itiraf etmekten çekinmemeliyiz. Biz daima hakikat arayan ve buldukça, bulduğumuza kani oldukça ifadeye cüret gösteren adamlar olmalıyız.*" sözüne göre itiraf etmemiz gerekiyordu. Diğer taraftan bugün ***Atatürk***'ü anmamıza vesile olan İtilaf Devletleri'nin Gelibolu'dan tahliyesinin 107. yıl dönümünü kutladık. Tarih derslerimizden hatırlayacağınız üzere Albay ***Mustafa Kemal (Atatürk)*** 35 gün önce, 10 Aralık 1915'te bir kahraman olarak İstanbul'a dönmüştü ama ünü kendisinden önce İstanbul'a ulaşmıştı. Çünkü 29 Ekim 1915 tarihli Tasvir-i Efkar'da ***Mustafa Kemal***'in portresinin altında şunlar yazılıydı: "*Çanakkale Kara Savaşları'nda yararlılıkları görülen ve savunma emrindeki iktidar ve mahareti ile hakkıyla şan ve şeref ile boğazları ve Hilafet Makamı'nı (İstanbul) kurtaran kumandanlarımızdan doğuştan bahadır ve üstün kahramanlık sahibi Albay **Mustafa Kemal** Beyefendi*", *Çanakkale'deki Atatürk Etkisi*. ***Hulusi Paşamız*** çok haklı: Yunanlıların ***Atatürk***'ten bugüne kadar uzattığımız dostluk elimizi tutması gerekiyordu. Yoksa güvendiğiniz dağlara karlar yağacaktır. Bizden söylemesi!

Söz konusu ***Heron***'un zamanında kesirlerin tam sayılı birim kesirlere göre yazılışı ***Diofant***'ın zamanında bile tamamen düzeltilememişti. Örneğin ***Diofant***, $370\frac{9}{16}x^2 - 10$ tam karesindeki katsayıyı $370\frac{9}{16}$ olarak değil $370\frac{1}{8}\frac{1}{16}$ olarak yazar ve bu durum Avrupa'da 16 yy'a kadar devam eder. Yani kesirlerin $\frac{a}{b}$ şeklindeki genel yazımı Avrupa'da 16. yy'dan sonra başlar (Bkz. "*THE ARITHMETICA*", S. 160, "*Rhind Papirüsü*").

6. Bulunan bu yaklaşıklıklığın doğrulaması 325. sayfada verilir. Ancak bu hesabı modern şekilde şöyle verebiliriz: Ters işleme göre $26\frac{5}{6}\times 26\frac{5}{6} = \left(26\frac{5}{6}\right)^2 = \left(26+\frac{5}{6}\right)^2 = 26^2 + 2\times 26\times\frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 676 + 43\frac{1}{3} + \frac{25}{36} = 720\frac{1}{36}$ olduğundan yaklaşım farkının karesi $\left(26\frac{5}{6}\right)^2 - 720 = 720\frac{1}{36} - 720 = \frac{1}{36}$ olur.

Şimdi yukarıda adım adım anlatılan bu hesabı modern matematikle toplu olarak ifade edersek,

$$(1.3.22)\quad \sqrt{720} < \frac{27+\frac{720}{27}}{2} = \frac{27+\frac{80}{3}}{2} = \frac{27+26\frac{2}{3}}{2} = \frac{53\frac{2}{3}}{2} = 26\frac{5}{6}(= 26;50)$$

sonucunun düzgün sayılarla 60 tabanında sonlu olarak yazılmasının tıpkı Babillilerin örneklerindeki gibi olduğu görülür. Ayrıca burada 720 sayısı 27'nin karesine yakın olduğundan Babillilerin ilk yaklaşım formülündeki başlangıç değerinin $x_0 = 27$ olarak alınmış olması bir diğer dikkat çekici husustur. Fakat Babilliler böyle bir örnekle karşılaştıklarında algoritmadaki başlangıç değerinin nasıl seçileceğini zaten biliyorlardı! Örneğin, bir başka Eski Babil tabletinde $\sqrt{3}$ sayısı için $1;45\left(= 1\frac{3}{4}\right)$ sonucu verilmiştir. Demek ki burada da 3 sayısı 2'nin karesine yakın olduğundan başlangıç değeri $x_0 = 2$ üst sınırı olarak alınmıştır!

Diğer yandan eğer bu tür örnekler için (1.2.2)'deki Babillilerin ilk yaklaşım formülünün kullanılması istenirse, örneğin Metrica'daki örnek için şu şekilde hareket edilmesi gerekir:

$$(1.3.23)\quad \sqrt{720} = \sqrt{27^2 - 9} < 27 - \frac{9}{2\times 27} = 27 - \frac{1}{6} = 26\frac{5}{6}(= 26;50).$$

Fakat Metrica'da verilen örnek bu şekilde ya da (1.2.2)'deki gibi değil de (1.1.1)'deki gibi çözülmüş olduğundan I. formdaki Babil algoritmasının uygulamalı olarak doğrudan kitaba geçirildiği sonucu çıkmaktadır. Bu sonuç ise **"Heron'un Algoritması"** olarak anılan algoritmanın kesinlikle dünyanın ilk AHM metodu olan (1.1.1)'deki **"Babil Algoritması"**ndan geldiğini gösterir. Bu sonuçla birlikte Metrica'daki daha pek çok temel matematik bilgisi Eski Babil Matematiği'nden gelir!

1.3.2.3. YBC 7289 No'lu Tableti (**Yale Babilonya koleksiyonundan MÖ 1900-1600 aralığına ama en iyi teklifle MÖ 1800 civarına tarihlenen çivi yazılı bir metin).** Araştırma sonuçlarına göre şimdiye kadar toprak altından 500,000 kadar tablet ortaya çıkarıldı ve bir o kadarının daha toprak altında olduğu tahmin edilmektedir (Bkz. "*Archive und Bibliotheken In Babylon*"). Fakat çıkarılan bu tabletlerden yaklaşık 400 kadarı matematiksel tablet olup, bunların içinde yalnızca 2 tanesi **"Muhteşem Tablet"** olarak anılmaktadır: Plimpton 322 ve YBC 7289. Her 2 tabletin önemi ilk kez 1945'te ***O. Neugebauer*** ve ***A. Sachs*** tarafından fark edildi!

1.3.2.3.1. YBC 7289 No'lu Tabletin Kısa Bir Hikâyesi

"İyi hesap yapan iyi yazamaz, iyi yazan iyi hesap yapamaz!", Bir Eski Babil Atasözü.

Bu atasözü o zamanki kâtiplerin, üzerlerindeki iş yükünün fazla olması nedeniyle iş bölümünün (hiyerarşi) yapıldığını gösterir. Örneğin bir Eski Mısır Papirüsü olan I. Anastasi Papirüsü'ndeki konuşmadan kâtibin yalnızca firavunların emirlerini yazmakla görevli olmadığını, aynı zamanda matematikçisi olduğunu da öğrenmekle birlikte gerek Eski Mısır Papirüsleri'nde olsun gerekse Eski Babil Tabletleri'nde olsun matematiksel metinlerdeki hataların çokça olmasının daha Eski Babil Dönemi'nde bu sözle ortaya çıktığını görüyoruz. Buna göre Plimpton 322 no'lu tablette 4 hata varken YBC 7289 no'lu tablette hiç hata yoktur (Bkz. "*The Babylonian tablet Plimpton 322*". Tablet üzerindeki okumalarda kırmızı renkli sayılar hataları gösterir).

Resim 1.3.5. Yale Babilonya koleksiyonundan çivi yazılı bir metin: YBC 7289 no'lu tablet, M.Ö. 1800 civarı. Bu tableti hazırlayan kâtip tarafından köşegenleri, yazı alanına müdahale etmemek için, elle ve kenarları düzgün bir şekilde, muhtemelen bir cetvelle ya da cetvel görevi gören bir çubukla, çizilmiş bir kare şekli vardır. Karenin bir kenarının uzunluğu 3 Parmak'tır.

1.3.2.3.2. Tabletteki Sayılar ve Metroloji

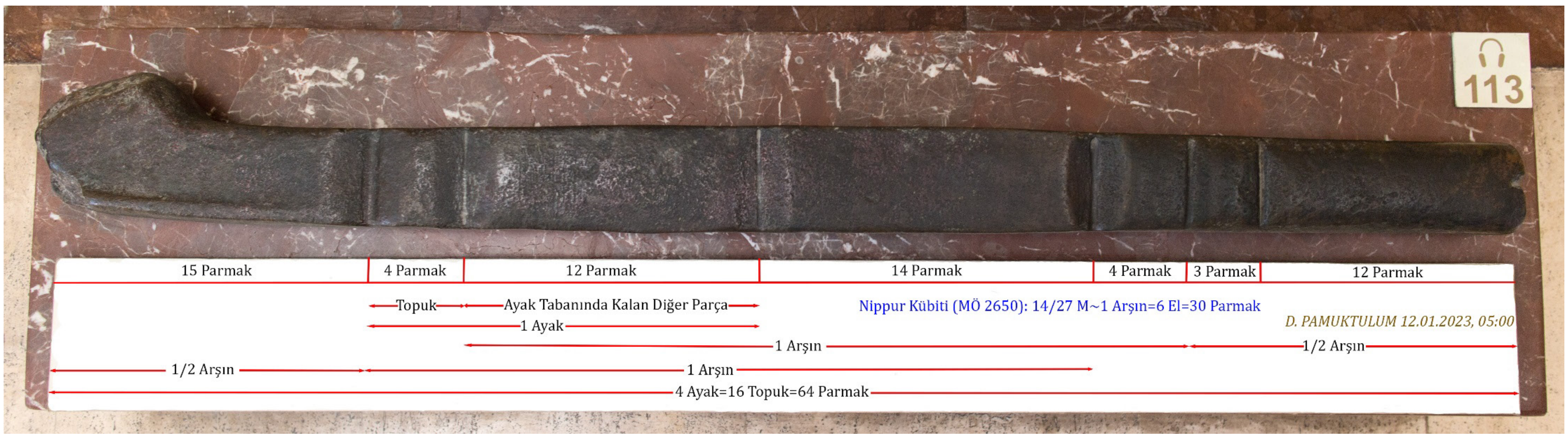
Yandaki tablette gördüğünüz üzere köşegenleriyle birlikte çizilmiş bir kare ve ilgili yerlere yazılmış 3 tane seksagesimal (60 tabanlı) sayı var: Bir köşegenin üzerinde 1;24,51,10 oranı (ki bu, $\sqrt{2}$ sayısına 60 tabanında verilmiş rasyonel bir yaklaşıktır) ve onun altında 0;42,25,35 (ki bu da, $6 \times 0;42,25,35 = 4;14,33,30$ ya da $3 \times 1;24,51,10 = 4;14,33,30$ Parmak uzunluğundaki karenin köşegeni için verilmiş sayıdır) sayıları yer alır. Üçüncü sayı karenin bir kenarı olarak verilen 0;30 Birim'dir. Çünkü Eski Babil Matematiği'ndeki "0 (Sıfır)" rakamının kullanımı nedeniyle 𒌍 Babil rakamı hem $30 \times 60^0 = 30$ sayısının hem de 2'nin tersi olan $30 \times 60^{-1} = \frac{30}{60} = 0;30$ kesrinin gösterimi için kullanılmaktaydı (Bkz. "*Uma Aula na Babilônia (Babilonya'da Bir Ders)*", Slayt 12). Fakat tableti ilk kez okuyup yorumlayan ***Otto Neugebauer*** ve ***Abraham Sachs*** bu sayıyı yanlışlıkla 30 olarak okudular ve sonraki yorumcuların çoğu günümüzde de geçerli olan bu okuyuşa sadık kaldılar. Bu yüzden tabletin resimleri üzerinde detaylı bir araştırma yaptım (**Y.N.** Bu arada şimdi Yale Babilonya Koleksiyonu'nda bulunan bu tabletin resimlerini özel aparatlarıyla birlikte Nikon CoolPix 900 marka adlı fotoğraf makinesiyle orijinale çok yakın ve büyütülmüş halde 2 farklı formatta çekerek bize sunan fotoğrafçı ***Bill Casselman***'a teşekkür etmeliyiz. Çünkü onun çalışması olmasaydı, bu gerçeği yakalamam yani karenin bir kenarının 0;30 Birim olduğunu görmem mümkün olmayacaktı. Bu arada ***Bill Casselman***'ın eşi de tablette çalıştı. Bkz. "*Jargon*", S. 12). Eğer bunun için yandaki tablete daha yakından dikkatli bir şekilde bakarsanız, tablette ilk dikkat çeken noktanın karenin kenarlarının düzgün bir şekilde çizilmiş olduğunu görürsünüz ve ben de bu biricik gerçekten hareketle fotoğrafçı ***Bill Casselman***'ın tabletin orijinaline yakın çekmiş olduğu resimler üzerinde gerek elle (cetvel ve pergel kullanarak) gerekse Photoshop ve Autocad programlarıyla birçok ölçüm yaptım. Autocad'teki araştırmama göre şu sonuçlar çıktı: Tabletteki karenin en büyük kenarı 0;30 sayısının bulunduğu kenardır ve bu kenarın uzunluğu 51 MM'den biraz büyüktür (Bkz. "*YBC 7289-Model*". Bu çizimde tabletin çapını 8 CM (ki ***Casselman***'ın ölçümüne göre yaklaşık 8 CM'dir) aldım. Eğer bu bilgilere rağmen hâlâ bu bulgunun doğru olup olmadığını merak eden varsa, burada özetle aktardığım bu karmaşık işlemlere girmek yerine karenin herhangi bir kenarına 3 parmağını koyarak bu gerçeği ya da normal yetişkin bir erkeğin 3 parmağını cetvelde ölçmeye çalıştığınız zaman 5 CM'den biraz büyük olduğunu derhal görebilirsiniz. Bu ölçümleri yapan insan ister Semitik olsun isterse olmasın, her 2 ölçüm de yaklaşık 5,000 yıllık insan evriminde doğru çıkacaktır). Bu kenarla birlikte karşısındaki kenar, tablet kırık olmasına rağmen, hemen hemen aynı uzunluktadır; çünkü diğer 2 kenarın da birbirine paralel olması nedeniyle aynı uzunlukta ama çok küçük sapmalarla bu kenarlardan biraz daha küçük olduklarını gördüm. Bunun nedeni ise, karenin kenarlarının birbirine tam dik bir şekilde çizilememiş olmasıdır. Diğer yandan bu işin metrolojisine giriştiğimizde, gerek Eski Babil Dönemi'nde (M.Ö. 2000-1600) gerekse önceki dönemlerde (Erken Hanedanlık Dönemi ve Sargon Dönemi (M.Ö. 2350-2200)) kullanılan kübitlere baktığımızda, Sargon Dönemi'nde de geçerli olan ve uzunluğu 0.5 M'den biraz büyük olan 1 Kübit'in 3 Çift El'e ve 1 Çift El'in de 10 Parmak'a bölündüğü görürüz. Buna göre 1 Parmak 17 MM'den biraz büyük olmak üzere 1 Kübit 30 Parmak yani 510 MM'den biraz büyüktür. Ama ne ilginçtir ki Autocad ölçme işlemlerimin sonucunda da karenin bir kenar uzunluğu, sayının bulunduğu kenarda, 51 MM'den biraz büyük çıkmıştı. Buradan karenin bir kenar uzunluğu için $3\ Parmak = \frac{1}{10}\ Kübit$ (Kuš) sonucu çıkar.

Şimdi karenin bir kenar uzunluğu için bu araştırmadan elde edilen şu sonuçların ne anlama geldiğini aşağıdaki Nippur kübitinden öğrenmeye çalışalım:

$$(1.3.24) \quad \frac{1}{2}\ Birim = 3\ Parmak = \frac{1}{10}\ Kübit$$

Nippur Kübiti. Öncelikle bu tabletteki karenin çiziminde kullanılan cetvel ya da cetvel görevi gören bir çubuk Eski Babil Dönemi'ndeki bir kübite göre birimlendirilmiştir. Fakat bu kübit Erken Hanedanlık ve Sargon dönemlerinde de kullanıldı. Çünkü bu dönemlerde 1 Kübit 6 El'e ve her El de 5 Parmak'a, dolayısıyla 30 Parmak'a bölünürken sonraki dönemlerde kübitte standartlaştırma nedeniyle 1 Kübit 6 El'e ve her El de 4 Parmak'a, dolayısıyla 24 Parmak'a bölündü (Bkz. "*Eski Mezopotamya Ölçü Birimleri*". ***Da Vinci***, ***Cesare Cesariano*** ve çağdaşları, "Mükemmel Adam" çizimlerinde bu yeni kübiti kullanmışlardır).

Örneğin M.Ö. 2650'ye tarihlenen Nippur kübiti ve üzerindeki parçalar şu şekildedir:



Resim 1.3.6. Nippur kübiti, *İstanbul Arkeoloji Müzesi*. İlk satırdaki bölmeler kübit çubuğunun ayrıldığı parçaları ve altındakiler temel uzunluk ölçüsü birimi olan Kübit (Arşın) ve Ayak ölçü birimlerine göre verilmiştir. Bu etiket şimdi İstanbul Arkeoloji Müzesi'ndeki etikete göre hem daha doğru (ki etikette 3. satırdaki 1 Arşın yerine yanlışlıkla ½ Arşın yazılmıştır) hem de daha geniş bir bilgilendirme verir. İTÜ'den ***Z. Duran*** ve ***U. Aydar*** tarafından çubuk üzerinde 3-boyutlu dijital modelleme ve ölçümler (gerçek ölçümlerin yanında fotogrametri ve lazer taramadan elde edilen ölçümler) yapılmıştır (Bkz. *"Measurement And 3D Modelling of An Ancient Measuring Device: Nippur Cubit Rod"*, 2008, 2012).

Kübit çubuğu üzerinde yapılan ölçümler bölmelerin hassas bir şekilde yapılmadığını gösteriyor. Araştırmacılar bu yüzden 1 Kübit'in kaç CM olduğuna ilişkin çeşitli hesaplamalar yaptılar (Bkz. "*The Measures of the Nippur Cubit*", "*On the Mathematical Connections of Ancient Measures of Length*" vb.). Çünkü çeşitli parçaların bir araya getirilip 1 Kübit'e ilişkin yapılan hesaplamalar ağırlıklı olarak 51.80 CM ve 51.85 CM sonuçlarını veriyordu. Bana göre aranılan sonuç,

$$(1.3.25)\quad 16\text{ Parmak} = 4\text{ Parmak} + 12\text{ Parmak} = 6.70\text{ CM} + 20.95\text{ CM} = 27.65\text{ CM} \Rightarrow 1\text{ Kübit} = 30\text{ Parmak} = \frac{30}{16}\times 27.65\text{ CM} = 51.84375\text{ CM}$$

dir. Bu, yaklaşık olarak şuna karşılık gelir:

$$(1.3.26)\quad 1\text{ Kübit} \cong \frac{14}{27} = 0.\overline{518518}\text{ M.}$$

İşte bu kübit YBC 7289 no'lu kübitin üzerindeki karenin bir kenar uzunluğunun 3 Parmak olduğunu tamamen açıklar durumdadır. Ama bunun için 4673 yıl geriye (ki bu, Eski Mısır'da ***Zoser***'in dönemine karşılık gelir) gitmemize gerek yok; 3 parmağınızı tabletteki karenin bir kenarına koyarsanız tam olarak oturduğunu göreceksiniz (Bkz. Bu sonucu ilk gördüğümde ben). Çünkü insan o kadar hızla evrimleşemez!

Şu halde karenin çiziminde kullanılan birimlendirmeler Sargon zamanındaki kübitlerde bile kullanıldığına göre, (1.3.24)'e göre karenin bir kenar uzunluğundan

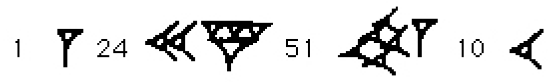
$$\frac{1}{2}\text{ Br} = 0;30\text{ Br} = \frac{1}{10}\text{ Kübit} \Longrightarrow 1\text{ Br} = \frac{1}{5}\text{ Kübit} = \frac{30}{5}\text{ Parmak} = 6\text{ Parmak} = 1\text{ El }1\text{ Parmak}$$

eşitliklerine göre

$$(1.3.27)\quad 1\text{ Br} = 6\text{ Parmak} = 1\text{ El }1\text{ Parmak}$$

sonuçları çıkar. Burada karenin bir kenarına karşılık gelen 3 Parmak'ın, dolayısıyla 1 Birim'e karşılık gelen 6 Parmak'ın Eski Babil Metrolojisi'nde hangi birimlerle gösterildiğini bilmiyoruz ama Nippur kübitinde ayrı birer bölmeyle gösterildiğini gayet iyi biliyoruz. Bana göre bunları keşfetmek zor olmasa gerek. Örneğin 1 Ayak'taki 4 Parmak topuk uzunluğunu ve geri kalan 12 Parmak da ayakta tabanındaki diğer parçayı gösterir!

Sonuçta tabletteki metrolojiye göre, 60 tabanında verilen karenin bir kenarına yazılan sayı $\frac{1}{2} = \frac{30}{60} = 0;30$ ve $\sqrt{2}$ için bir köşegeni üzerine

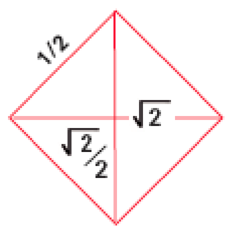


şeklinde yan yana yazılmış 1;24,51,10 yaklaşıklığı verildiğine göre, hemen onun altında

şeklinde yazılmış sayısı da $\frac{1}{2}\times\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \gtrsim 0;42,25,35$ olacak şekilde köşegenin uzunluğunu gösterir. Bu arada yeri gelmişken burada belirtmek gerekir ki, Anglosakson kültüründen gelen İngilizler ve Amerikalılar'ın, başında ve sonunda 0 rakamı bulunan bir ondalık sayıyı yazarlarken, 0 rakamını yazmamaları boşuna değil; gereksiz olduğu için bir kural gereğidir. Örneğin İngiliz Ejiptolog ***Sör William Matthew Flinders Petrie***'nin *"Giza Piramitleri ve Tapınakları, 1883"* adlı çalışmasındaki ölçümlerde elde ettiği ondalık sayılarda bu temel ilkeyi daima kullandığını görebilirsiniz. Ama sonuç ne olursa olsun, bu kuralın Matematik Tarihi'nde bilinen ilk kullanım yerleri başta bu tablet ve Plimpton 322 no'lu tablet olmak üzere diğer ilgili Eski Babil tabletleridir.

Burada Eski Babil Metrolojisi adına son olarak şu soruya bir el atalım: Bir kenar uzunluğu 3 Parmak olan karenin köşegen uzunluğu kaç El ve kübittir?

Çözüm. Bu problemin çözümü AO 6484 no'lu tablettekinin tersine olup, $\sqrt{2}$ için bu tabletin bir köşegeni üzerine yazılmış 1;24,51,10 yaklaşıklığını alırsak sağdaki karenin köşegen uzunluğu için

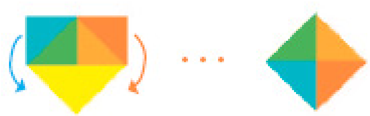


$$(1.3.28)\quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > x_5 = 1;24,51,10 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1;24,51,10}{2} = 0;30\times 1;24,51,10 = 0;42,25,35$$

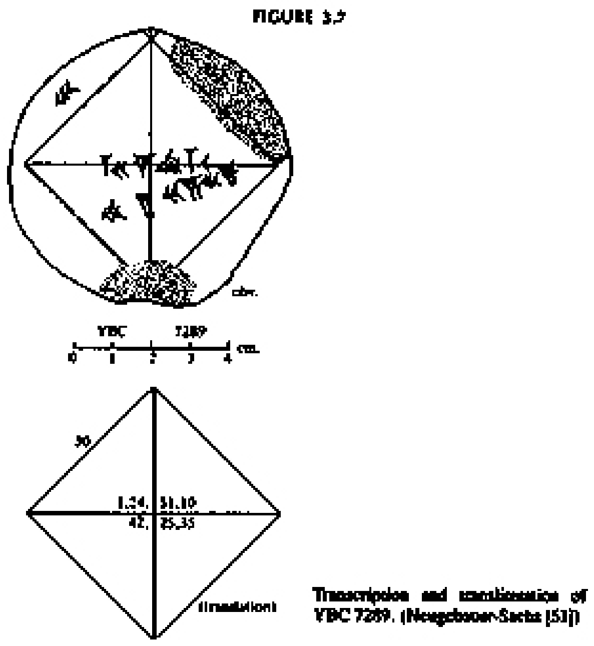
yaklaşıklığından şu sonuçlar geçerli olur:

$$(1.3.29)\quad 6\times 0;42,25,35 = 4;14,33,30\text{ Parmak} = 0;50,54,42\text{ El} = 0;8,29,7\ (\lesssim \pi - 3)\text{ Kübit.}$$

Burada tabletteki kareyi ve ilgili yerlere yazılan sayıları günümüzdeki gibi gösterirsek Resim 1.3.5'teki şekil bize, tablette ele alınan asıl problemin $\sqrt{2}$'nin tersi olduğunu açık bir şekilde gösterir. Tabii ki bu geometrik gösterim, Pisagor Teoremi'nin özel bir hali olan **"Kare içindeki kare (bir karenin orta noktalarından oluşan kare)"** şeklindeki geometrik ispatın sonucunda elde edilmekteydi! Söz konusu bu geometrik dönüşüm yalnızca matematikte değil, mimari yapılarda da kullanılmıştır. Bunu gösteren tabletler ve harabe yapılar vardır. Örneğin Resim 1.4.2'deki tablette bir karenin orta noktalarından oluşan ve iç içe geçmiş 2 kare ve 3 kareden meydana gelen geometrik çizimler vardır (Bkz. *BM 15285: 2. Parça*, *4. Parça* ve *5. Parça*). Bu linklerdeki anılan şekillerde Eski Babillilerin yukarıdaki geometrik dönüşümde geçen bir karenin orta noktalarından geçen kareyi bildikleri gibi, bu metotla elde edilen geometrik seriyi de bildikleri anlaşılmaktadır. Ayrıca bu şeklin genel durumu için yani Eski Babillilerin Pisagor bağıntısını genel halde bildiklerini gösteren tablet için Eski Babil Dönemi'ne ait BM 13901 no'lu tabletine de bakabilirsiniz (Bkz. "*Jöran Friberg: Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics, Copyright © 2007 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*", S. 40, Şekil 1.12.3).



1.3.2.3.3. Eski Babil Matematiği'ndeki "0 (Sıfır)" Rakamının Kullanımı. Öncelikle bu konuda yorumcuların Eski Babil tabletlerindeki "0" rakamını okuyuşlarına ve sonuçlarına kısaca bir göz atarak başlayalım işe. Eski Babil tabletlerinde eğer sıfır rakamı bir sayının ara basamaklarından birindeyse, bir karakterlik boşlukla sıfırın yeri belirtildiğinden okuma sorunu yoktu. Örneğin ilk zamanlarda Plimpton 322 no'lu tabletinde 2 tane böyle boşluk vardı ve bu boşlukların sıfır rakamını gösterdiği birçok yorumcu tarafından kabul görmemişti. Çünkü Sıfır'ın Tarihçesi'ne göre bu mümkün değildi. Dolayısıyla bu ve diğer tabletlerdeki sıfır rakamı yerine konulan boşlukların onlara göre bir anlamı yoktu. Daha sonra yapılan detaylı araştırmalarda bu boşlukların sıfır rakamı yerine konduğu anlaşıldıysa da günümüzde hâlâ buna muhalefet eden büyük bir kitle mevcuttur (Bkz. "*Note: The scribe does not use zero*, *California State University, Los Angeles*". Bu link şimdi ölü durumdadır ama 2008'de Plimpton 322'deki anılan sıfırların kabul edilmediğini görmüştüm! Günümüzde ise şu sayfaya bakabilirsiniz: "*Ancient Babylonian Number System Had No Zero*". Araştırırsanız bunlardan mebzul miktarda bulabilirsiniz. Sizce hepsinin Amerikan ve İngiliz olması bir tesadüf mü?).



Resim 1.3.7. YBC 7289 no'lu tabletteki sayıların ***Neugebauer*** ve ***Sachs*** tarafından okunması. Onlar 1945'te karenin bir kenar uzunluğunu yanlış okuduklarından doğal olarak köşegen uzunluğunu da yanlış okumuş oldular!

İkinci olarak eğer sıfır rakamı bir sayının başında ise, ki ara basamaklarından birinde olduğunda bile sıkı bir muhalefet vardı, probleme göre okuma sorunu vardı. Örneğin Standart Ters Sayılar Tablosu'ndaki 2'den 81'e kadar olan düzgün sayıların terslerinin "0" rakamı ile başladığı açık iken, YBC 7289 no'lu tabletindeki karenin bir kenar uzunluğunu veren sayıyı okumada problem vardı. Çünkü bu tabletteki karenin bir kenar uzunluğunu veren sayıyı "30" değil de 2'nin tersi olan "0;30"u okuyabilmeniz için epeyce sağlam delillere sahip olmanız gerekiyordu ve bu da ancak tabletin tam bir analizi yapıldıktan sonra anlaşılabilindi. Dolayısıyla bu tableti ilk kez okuyup yorumlayan ***Neugebauer*** ve ***Sachs***'ın böyle bir analize girmeden, doğrudan problemin içine dalmaları nedeniyle karenin kenarındaki sayıyı "0;30" değil yandaki resimde gördüğünüz gibi yanlışlıkla "30" olarak okumaları açık bir hatayı göstermekteydi. Fakat şimdi bunun doğrusunu Resim 1.3.5'te (ya da Resim 1.1.2'deki kapakta) tamamen sağlam delillerle görebilirsiniz!

Diğer taraftan aynı araştırmacıların incelediği bir başka muhteşem tablet olan Plimpton 322 no'lu tabletindeki, hiç olmazsa, son sütuna yakından bir göz atalım. Çünkü "0" rakamının kullanımı nedeniyle orada da çok ilginç gelişmeler var. Bunun için öncelikle Plimpton 322 no'lu tabletin son sütun başlığının,

"(Robson) Köşegen kareden (ÎB.SI şiliptim) 1 çekildiğinde (çıkarıldığında) kısa kenar kare (ÎB.SI SAG), daha doğrusu kısa kenar kareye 1 br^2 eklendiğinde köşegen kare gelir ([ta]-ki-il-ti şi-li-ip-tim [ša 1 in]-na-as-sà-hu-ma SAG i-il-lu-ú)"

çözümlenmiş şeklini göz önüne alırsak (bkz. "*Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322*", S. 192), tabletteki 15 dik üçgenin tabanları a_n, yükseklikleri h_n ve hipotenüsleri r_n olmak üzere $a_n^2 + h_n^2 = r_n^2$ bağıntısından

$$(1.3.30) \quad 1 + \left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2 = \left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2$$

şeklinde sütun başlığında verilen kural elde edilir ve bu durumda aşağıda 2 ana başlıkta topladığım şu inanılmaz gelişmeler ortaya çıkar:

1. **"0" Rakamının Kullanımı:** 1. Satır-4. Sütun'daki

$$(1.3.31) \quad \left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a_1}{h_1}\right)^2 = 1 + \left(\frac{119}{120}\right)^2 = 1 + 0;59{,}0{,}15 = 1;59{,}0{,}15$$

sayısının hesabında 0 rakamının kullanımı 2 farklı yerde karşımıza çıkar. İlkin sütun başlığında verilen hesap kuralı nedeniyle 0;59,0,15 sayısının başında (tam kısmında) 0 rakamı vardır. İkinci olarak hem bu sayının hem de kural nedeniyle bu sayının 1 ile toplamından elde edilen 1;59,0,15 sayısının 3600'de 1'ler basamağında 0 rakamı bulunmaktadır. Fakat tabletin bu bölümü hasarlı olduğundan bu sayıdaki 0 rakamına karşılık gelen boşluk belli-belirsiz görülmektedir. Dolayısıyla oraya 0 için konulan boşluk açık bir şekilde görülemiyor!

Aynı şekilde, 13. Satır-4. Sütun'daki

$$(1.3.32) \quad \left(\frac{r_{13}}{h_{13}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a_{13}}{h_{13}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{161}{240}\right)^2 = 1 + 0;27{,}0{,}3{,}45 = 1;27{,}0{,}3{,}45$$

sayısında da 0 rakamı aynı pozisyonlara sahiptir. Ancak bu sayının bulunduğu bölüm hasarsız olduğundan buradaki 0 rakamı için konulan boşluk büyükçe, adeta kabak gibi görülmektedir. Ben bu durumu tablette ilk gördüğümde (ki 0 rakamını en anlamlı gördüğüm ilk yer burasıydı), aklıma 13'ün uğursuz değil uğurlu bir sayı olduğu gelmişti!

Not 1.3.3. Bu konuda ***Georges Ifrah***'ın "*Çakıl Taşlarından Babil Kulesine: Rakamların Evrensel Tarihi II*" adlı kitabının 181-185. sayfalarındaki "*Babillilerin Sıfırı Nasıl Doğdu?*" parçasını okumanızı salık veririm. Fakat ***Ifrah***'ın sıfır hakkındaki düşüncelerine tamamen katılmıyorum. Çünkü Eski Babilliler bir sayının ara basamağında/basamaklarında sıfır/lar için sadece boşluk/lar kullanırken (ki sayının başında veya sonunda sıfır varsa hapı yuttunuz demektir. Çünkü bu şekildeki sayıları YBC 7289'daki karenin kenarında gördüğünüz gibi anlamak kolay değildi), MS 3. yy'da Selökidler eski nesillerin bu geleneğinden vazgeçerek sıfır için bir sembol icat ettiler!

Resim 1.3.8. ***Edgar J. Banks.*** Fotoğraf Bismaya ya da kayıp şehir Adab'dan, 1908.

2. **"1" Rakamı İçin İlginç Bulgular:** Bu konuda bilinen bir şey varsa, o da bu tabletin sol tarafının son sütundaki sayıların 1'ler basamağındaki rakamların bulunduğu hat, daha açık bir deyişle "1" rakamlarının olduğu hat boyunca kırık olmasıdır. Fakat bu kırıklık doğal olmaktan ziyade adeta bir bıçak keskinliğinde son derece temizdir ve burada modern bir yapıştırıcı (zamk gibi) izleri görülmektedir. Bundan, kökeni meçhul olan bu tabletin toprak altından bütün olarak çıktığı ve sonradan kırıldığı, diğer parçasının belki de bilinmeyen bir yerde olduğu sanılmaktadır. Ancak İngiliz araştırmacı ***Dr. Eleanor Robson***, tableti 1922'lerde ilk Western sahibi ve The New York yayıncısı ***George Arthur Plimpton***'a (ki 1936'daki ölümünden önce tarihi matematiksel kitaplar ve sanatla ilgili parçalardan oluşan koleksiyonunu Columbia Üniversitesi'ne verilmesini vasiyet eden kimsedir) 10 $'a (şimdi 305.98 $) satan ünlü antika satıcısı ***Edgar J. Banks***'ten (şimdi arkeolojik bir site olan modern Tell Senkereh/Irak'ın güneyindeki Larsa'dan geldiğini söyleyen yandaki resimdeki kişi) şüphelenmektedir. Bu nedenle konuyla ilgili ***Robson***'ın 2001'deki ilk çalışmasının 171. ve 172. sayfalarına baktığımızda (bkz. "*Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322*"), bir zamanlar kaçak kazılarla çıkarılan Eski Mısır'a ait buluntuların başına gelenlerin ne yazık ki burada da tekrarlandığını görüyoruz!

İşte bu nedenle aşağıdaki bulgular son derece önem arz eder:

2.1. ***Neugebauer*** ve ***Sachs*** $\left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2$ oranını kullandılar. Çünkü ***Neugebauer***, *"Eski matematikçiler yalnızca Pisagor 3'lülerinin tanımıyla değil ama $\frac{r_n}{h_n}$ oranlarıyla da ilgileniyorlardı"* demişti. Bu yüzden 38. sayfadaki tablonun (Plate 25) son sütun başlığını okuyamamalarına rağmen oradaki sayıların başlarına "1" rakamının gelmesi gerektiğine inandılar. İkinci olarak, 39. sayfadaki Şekil 2'deki (Fig. 2) grafikte dik üçgenlerdeki $\frac{r_n}{h_n}$ oranlarına ilişkin eğim açılarının 45°'den 30°'ye kadar monoton azaldığını ve en düşük değerin (en küçük eğim açısı) hemen hemen 31° olduğunu (ki bu, gerçekte $31°53'27''$ dir. Yani onlar 32° yerine yanlışlıkla 31° yazdılar) söylediler (Bkz. "*Otto Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity (1951,1957,1969), 2nd ed./Princeton, NJ: Brown University Press; reprint ed./New York: Dover, 1969*", Sayfa. 38).

Fakat gerçekte son sütunda $\left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2$ oranı hiç kullanılmadı; çünkü (1.3.30) bağıntısı nedeniyle son sütundaki sayıların kesir kısmını veren $\left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2$'nin başına "1" rakamının gelmesi gerekiyordu. Ayrıca tabletteki 15 dik üçgenin eğim açıları için çifte kullanım mevcuttu: Birinci (kural gereğince tabletteki) kullanımda 45°'den 30°'ye kadar monoton azalan ve ikinci kullanımda 45°'den 60°'ye kadar monoton artan idi. Bunlardan bazıları daha önceden Mısır piramitlerinin yapımında kullanılmıştı. Örnekse 4. dik üçgen Bent piramitinin üst parçasında ve Kızıl piramitte, 11. dik üçgen Khafre piramitinde kullanıldı!

Not 1.3.4. Burada 2. paragrafta gördüğünüz üzere ***Neugebauer ve Sachs***'ın hatalarını ***"Antik Matematiksel Astronomi Plimpton 322 No'lu Tabletinde Bir Dedektiflik Çalışması, 2006"*** adlı makaleme göre düzelttim. Buna göre tabletin son sütunundaki $\left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2$ sayılarının "0" rakamı ile başladığını "*H. L. Resnikoff & Raymond O'Neil Wells: Mathematics in Civilization*, 1984, Sayfa. 74"teki tabloda ve $\left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2$ sayılarının "1" rakamı ile başladığını "*Eli Maor: The Pythagorean Theorem: A 4,000-Year History*, 2007, Sayfa. 9"daki tabloda görebilirsiniz. Bu son tablo ***Neugebauer***'in (1951) 37. sayfasındaki tablosu olup, son sütundaki 10., 11., 12. ve 14. satırlarındaki sayıların başında "1" rakamının tablette açık bir şekilde görüldüğü geçer!

2.2. ***Robson***, son sütun başlığını "I. (Hasarlı) $\left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2 \vee \left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2$" şeklinde vermiş ama bu sütundaki her sayının, tercihini ilk seçimden yana kullanarak (ki hiçbir satırda okunamayan, dolayısıyla köşeli parantezler içinde verilen), "1" rakamıyla başladığını belirtmiştir (Bkz. "*Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton 322, Historia Math. 28 (2001), 167–206*").

Robson, daha sonra M.Ö. 1900-1800 tarihli YBC 6967 no'lu tabletindeki Problem 20'den hareketle son sütun başlığını

[ṭa]-ki-il-ti ṣi-li-ip-tim [ša 1 in]-na-as-sà-ḫu-ma SAG i-il-lu-ú	ÍB.SI₈ SAG	ÍB.SI₈ ṣi-li-ip-tim	MU.BI.IM
[(1) 59] 00 15	1 59	2 49	KI.1
[(1) 56 56] 58 14 50 06 15	56 07	1 20 25	KI.2
[(1) 55 07] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	KI.3
(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	KI.4
(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	KI.[5]
(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	[KI.6]
(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	KI.7
(1) 41 33 45 14 3 45	13 19	20 49	KI.8
(1) 38 33 36 36	8 01	12 49	KI.9
(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	KI.10
(1) 33 45	45	1 15	KI.11
(1) 29 21 54 2 15	27 59	48 49	KI.12
(1) 27 00 03 45	2 41	4 49	KI.13
(1) 25 48 51 35 6 40	29 31	53 49	KI.14
(1) 23 13 46 40	28	53	KI.15

Figure 3. Transliteration of Plimpton 322.

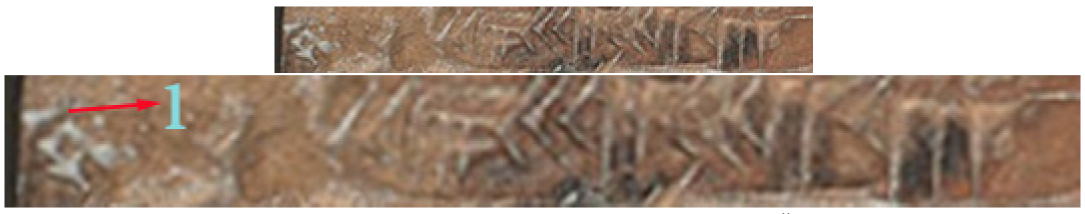
Tablo 1.3.1. ***Robson***'a göre Plimpton 322 no'lu tabletin çevirisi. Bu tablodaki köşeli parantezler tabletteki tahribatlı yerleri, dolayısıyla okunamayan yerleri ve küçük parantezler yani "1" rakamının bulunduğu bölümler tabletteki okunması çok güç olan yerleri gösterir. Buna göre ***Robson*** tabletin sol tarafındaki "1"lerin hiç okunamadığını söyler!

şeklinde çözdükten sonra bu sütundaki sayıların kesinlikle "1" rakamıyla başladığını ama bu rakamın hiçbir satırda okunamadığını bildirdi (Bkz. "*Words and Pictures: New Light on Plimpton 322, The Mathematical Association of America, Monthly 109*", Sayfa. 105-120).

2.3. YBC 7289 no'lu tabletin resimlerini çekerek tüm dünyaya tanıtılmasını sağlayan ünlü araştırmacı matematikçi-fotoğrafçı ***Bill Casselman*** ise, 2003'te tabletin son sütunundaki 14. satırdaki sayının başındaki "1" rakamının okunabildiğini bildiriyor. Ancak bu ilginç bulgu tabletin bir siyah-beyaz imajında doğruymuş gibi gözükmesine rağmen renkli imajlarına geçildiğinde aynı şeyi söylemenin çok zor olduğu görünmektedir. Bana göre bu durum, büyük bir ihtimalle tabletin sol tarafındaki kırıklığın bu kısımda "1" rakamı gibi görüntü vermesinden kaynaklanıyordu (Bkz. "*Bill Casselman: The Babylonian tablet Plimpton 322*").

2.4. Tabletteki bulguma geçmeden önce, tabletin son durumunu ve son sütundaki bulguları kısaca değerlendirmek istiyorum. Öncelikle bu tablet toprak altından çıkarılırken 2. sütun boyunca kırık olarak 2 parça halinde çıkarılmış olduğu anlaşılmaktadır, ama sol taraftaki yani 4. sütundaki "1" rakamlarının bulunduğu hat boyunca oluşan kırıklık keskin bir şekilde olup ilkindeki gibi doğal değildir. Dolayısıyla tableti ilk kez okuyup yorumlayan ***Neugebauer*** ve ***Sachs,*** 1945'teki ilk çalışmalarında bu sütundaki sayıların okunuşlarına bir çekince koyarak yani bu sayıların tabletteki mevcut okunuşlarını vererek, dik üçgendeki (1.3.30) bağıntısına göre bu sayıların başına "1" rakamının gelmesi gerektiğine inandılar. Daha sonra ***Neugebauer*** 1951, 1957 ve 1969'daki çalışmalarında konuya bir açıklık getirmeye çalışmışsa da son sütundaki başlık ve sayıların okunuşları açıklığa kavuşamamış ve diğerlerinin yorumları da konuya bir açıklık getirememiştir. Çok sonraları bu yorumlara dayanan ***Robson***, ilkin 2001'deki çalışmasında son sütundaki sayıların okunuşu için 2 farklı kuralla birlikte ***Neugebauer*** ve ***Sachs***'ın inancını dile getirirken (ama bunu yaparken de hiçbir satırda "1" rakamının okunamadığını belirtiyor), 2002'deki ikinci çalışmasında bu tablet ile YBC 6967 no'lu tabletindeki Problem 20'yi karşılaştırarak, tabletin kırık yerlerinde bulunan son sütunun 1. ve 2. satır başlangıcındaki **"[ta]"** ve **"[ša 1 in]"** eklerini keşfederek ***Neugebauer*** ve ***Sachs***'ın yorumunu düzeltir ve böylece son sütun başlığını tamamlamış olur! Fakat bu yorumlarla birlikte son zamanlarda bazı araştırmacıların son sütundaki bazı (10., 11., 12. ve 14. satırlardaki) sayıların başında "1" rakamını görmesi ve ***Robson*** tarafından keşfedilen eklerle sütun başlığının tamamen okunabilir hale gelmesi, bir yerde halüsinasyon görmekten ibaret gibi olaylar idi. Yani bunları ispat etmek mümkün değildi. Bu nedenle tabletin orijinal resmine bakmak için internetten Columbia Üniversitesi'ndeki Plimpton Kütüphanesi'ne girdim. Amacım tabletin orijinal resmi ile diğer resimlerini karşılaştırarak Photoshop ile farkları ortaya çıkartmak idi. Çünkü tablete ait çekilen resimlerde ışığın miktarı ve geliş açısı son derece önemliydi. Örneğin bir resimde tablete çok güçlü (projektörle) bir ışık verilmişti ve yansımalar nedeniyle bazı detaylar fark edilemiyordu. Özetle her resim tabletin farklı detaylarını veriyordu. Bu arada, YBC 7289 no'lu tabletin resimleri için gösterilen özenin bu tablette gösterilememiş olması, bizim için çok büyük bir talihsizlik ama diğerleri için daha da büyük bir talihsizlik oldu. Çünkü aşağıdaki bulgum bunu kesinlikle doğrular niteliktedir!

Demek ki zamanında dikkat edememişim ve yorumculara güvendiğimden olsa gerek, o sırada şimdiye kimsenin kadar fark edemediği şu bulguyla karşılaştım:



Resim 1.3.9. Plimpton 322 No'lu Tabletindeki 4. Satır-4. Sütun'daki Sayı: 1; 50[+3], 10, 29, 32, 52, 16 (Columbia Üniversitesi Kütüphaneleri, Plimpton Kütüphanesi, 20.02.2008, Giriş Saati: 17:43:40, Keşif Saati: 18:08). ***Robson***, "1"in en iyi göründüğü yerin 4. ve 12. satırlarda olduğunu söyler (Bkz. *"Words and Pictures: New Light on Plimpton 322, The Mathematical Association of America, Monthly 109"*, Sayfa. 105, Şekil 1). Fakat buradaki keşfim ***Robson***'dan değil ***Neugebauer***'den kaynaklanıyordu. Çünkü ***Neugebauer***'in (1951) 37. sayfadaki tablonun 10., 11., 12. ve 14. satırlarındakilerinin başında "1" rakamını okurken 4. satırdakini görememesi (ki üstelik bu satırda daha güç okumalar yapmıştı. Örneğin "50" rakamı güç-bela okunabilirken "3" rakamı hiç okunamamaktadır. Sondaki "1" hariç tabii!), beni gerçekten şaşırtmıştı ama 14. satırda gördüğünü söylediği "1"in ***Bill Casselman*** tarafından tekrar görülmesi beni heyecanlandırmıştı (ki siz bu heyecanımı Resim 1.3.13'tekiyle karşılaştırabilirsiniz. Bendeki şu şansa bakın: ***Neugebauer***'i ketum zannederdim ama ***Romberg*** daha ketummuş. Bkz. *"A Mathematician's Journeys: Otto Neugebauer and Modern Transformations of Ancient Science"*). İşte bu yüzden Plimpton Kütüphanesi'ne girdim ve "1"in hangi satırlarda mevcut olduğunu araştırmaya başladım!

İlk resim, anılan tarihteki tabletin 4. Satır-4. Sütun'undaki sayısına ait orijinal resimdir ve onun altındakiyse bu orijinal resmin Adobe Photoshop ile 2 kat büyüttüğüm halidir (Bkz. *"This Ancient Babylonian Tablet Proves the Greeks Did Not Invent Trigonometry"*. Linkteki resme göre yukarıdaki imajlarda Photoshop ile herhangi bir oynanma olmamıştır). ***Neugebauer*** bu sayıyı okurken 1'i okuyamadığını ama var olması gerektiğini, 1'den sonra gelen 53 rakamındaki 50'yi tamamen, 10 rakamını zayıf bir şekilde ve sonraki rakamları ise tamamen gördüğünü söylüyor. Fakat 50 rakamını okuyan ***Neugebauer*** nasıl oluyor da ondan önceki 1 rakamını göremiyor diye insanın hayıflanmaması mümkün değil. Çünkü eğer burada bir halüsinasyon görmüyorsam, ki öyledir ve bu görüntü tabletteki herhangi bir kırıklıktan da meydana gelmiş değildir, 1 rakamı kendini açık bir şekilde gösteriyor: Dikkat ederseniz 1 rakamı, 50'nin hemen solunda bütün gövdesiyle birlikte her 2 resimde adeta *"Ben buradayım, arkadaş. Ama sen okuyamıyorsan ben ne yapayım!"* diyor. Bununla birlikte son sütundaki 2. ve 3. satırlarda elle yazıldığı anlaşılan "53, K, 55, 1426" karakterlerini okudum. Bunlardan "1426" sayısı 3. satırdaki sayının son rakamı olan 45'in üzerinde açıkça okunabilirken diğer karakterler görülmüyordu, onları ancak Photoshop ile güç-bela okuyabildim (ki şimdi bu karakterler silinmiş durumdadır. Bkz. Resim 1, Resim 2. İkinci resimde tabletin arkasında 4 farklı yazıt vardır. Diğerleri silinmeye yüz tuttuğu için sadece **"PLIMTON LIBRARY"** yazısı okunabiliyor). Muhtemelen keşfedildikten hemen sonra tablete konulan ilk envanter numara bu idi!

Şu halde bu bulgularıma göre Plimpton 322 no'lu tabletin 4. Satır-4. Sütun'daki sayının başındaki "1" rakamının açık bir şekilde görüldüğü, dolayısıyla son sütundaki diğer sayıların da "1" rakamıyla başlaması gerektiği sonucu çıkarken Eski Babilonya Matematiği'ndeki "0" rakamının kullanımı da şu şekilde ortaya çıkmış olur: Eğer 60 tabanlı bir sayının başında ve/veya sonunda 0 rakamı varsa yazılmaz yani boşluk bırakılmaz. Örnekse YBC 7289 no'lu tabletindeki 0;30 ve 0;42,25,35 (ki "0" rakamı başta olduğunda 1;24,51,10'un altına 0;42,25,35 yazılırken konum gereği 42'nin 24'ün altına yazılması gerekirdi ama bu durumda 0;42,25,35 sayısı karenin ve hatta tabletin dışına çıkacaktı. Bu, "0" başta olduğunda neden güç bir şekilde okunduğunu gösteren güzel bir örnektir). Ama ara basamaklarda 0 rakamı varsa, bulunduğu basamaklardaki birimin yokluğunu belirtmek için, dolayısıyla basamakların karışmasını önlemek için bir boşluk bırakılır (Bkz. *"Plimpton 322: A Universal Cuneiform Table For Old Babylonian Mathematicians, Builders, Surveyors And Teachers"*, S. 4). Örnekse Plimpton 322 no'lu tabletindeki 1;59,0,15 ve 1;27,0,3,45 sayıları.

Şimdi "0" ve "1" rakamları için 2 ana başlık altında verdiğim bu bilgilerden sonra hâlâ bu bulgulara, dolayısıyla Eski Babilonya Matematiği'ndeki "0" rakamının kullanımına itiraz edecek olan varsa, kendisine hemen bir check-up yaptırsın. Çünkü burada halüsinasyonlardan bahsetmiyorum, gerçeklerden söz ediyorum. Bu konuda özellikle Batılıların emperyalist politikaları gereğince çok hassas olduklarını biliyoruz. Örneğin ***Bill Casselman*** 2003'te Plimpton 322 no'lu tabletin 14. Satır-4. Sütun'daki sayının başında "1" rakamını okurken, ***Neugebauer***'in 1949'daki okumasını kullanan ***Eli Maor*** 2007'de Tablo 1.1'de 10, 11, 12 ve 14. satırlarda olduğunu tekrarlamış ve ben de Resim 1.3.9'da 4. Satır-4. Sütun'un başındaki "1" rakamının mevcut olduğunu ispat ettim. Ama şimdi, 2011 tarihli *"Plimpton 322:A Review And A Different Perspective"* makalesini yazan ***John P. Britton***, ***Christine Proust*** ve ***Steve Shnider***, Tablo 1'de 1-4 ve 10-11. satırlar hariç diğer satırlarda "1"in okunabildiğini bildiriyorlar. Demek ki tabletin sol tarafı kötü bir şekilde kırılmış ya da daha doğrusu, tam kıramamışlar. Çünkü bu kırıklık 2. sütun başında hat boyunca görülen kırıklığa hiç benzemiyor!

Bu bulgulara göre artık sıfırın tarihçesini rahat rahat verebiliriz:

"0"ın Kısa Bir Tarihçesi. Plimpton 322 ve YBC 7289 no'lu tabletlerinde bulgulara göre "0" rakamı, herhangi bir sembol kullanılmadan ama bir boşluk kullanılarak, ilk kez günümüzden yaklaşık 4,000 yıl önce Mezopotamya'nın güneyinde kullanılmıştır (ki bu Sümerliler ile daha da geriye gider). Bu sonuçla 60 tabanındaki "0" rakamı her tabanda sıfırdır. Bu durumda MÖ 450'de Mayalar, MS 150'de ***Ptolemy (Batlamyus)***, 800'de Hintliler, 1143'te ***Harezmi*** çizgi dışında kalırlar.

İşte bu sonuç Batılıların ısrarla Eski Babil tabletlerinde neden "sıfır yok!" dediklerini açıklar. Bunun arka planını öğrenebilmeniz için ***Cengiz Özakıncı***'nın *"Antik Yunan Yüceltiminin Türk Karşıtı Tarihsel Kökenleri"* ve ilgili diğer videolarına bakarken, 500. fetih yılı için 1951'de çekilen *"İstanbul'un Fethi"* filmini de izleyiniz!

1.3.2.3.4. 2. Çözüm (Tabletteki $\sqrt{2}$ İçin Verilen 1;24,51,10'nun Keşfi, 14.09.2022, 18:12:25). Öncelikle bu yeni çözüme girmeden önce, bu çözümün 2. Çözüm'den pek farkı olmadığını bildirmem gerekiyor. Fark, sadece $\sqrt{2}$ için 1;25 ve 1;24,51,10'un da aynı çözümde yer almasındadır. Çünkü ***Neugebauer***'e göre,

1 25 IGI.GUB šà BAR.TA šà NIGIN	1;25 karenin köşegen katsayısı.
1 24 51 10 şi-li-ip-tum (ša) íB.SI	1;24,51,10 karenin köşegeni.

Tablo 1.3.2. $\sqrt{2}$ için TMS 3'ün 31. satırında verilen 1;25 (ki bu değer AO 6484'teki Problem 8'de kullanılmıştır) ve YBC 7243'ün 10. satırında verilen 1;24,51,10 yaklaşıklıkları. Bkz. *"Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context"*, S. 370, 374.

tabletlerinde geçen her 2 yaklaşıklık da aynı çözümde mevcut olmalıydı: İlkini $\alpha_2 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2} = \frac{1;30+1;20}{2} = 1;25$ olarak bulduktan sonra ikincisi için $\beta_2 = \frac{2}{\alpha_2} = \frac{2}{1;25} = 1;24,42,21,\cdots$ olduğunu kabul ederek $\alpha_3 = \frac{\alpha_2+\beta_2}{2} = \frac{1;25+1;24,42,21,\cdots}{2} = 1;24,51,10,\cdots$ sonucunun gerçekleştiğini varsaydı (Bkz. Bölüm 5). Bu da doğal olarak soruların yükselmesine neden oldu. Aslında onun düşündüğü bu çözümü 2007 yazında yapmıştım (bkz. Bölüm 4), ama şimdi kafalarda herhangi bir soru işareti kalmasın diye bu 2. Çözümü de vermem gerekiyor. Fakat bu son çözümde düzgün olmayan sayıların tersleri alınmadığı için, ilkine göre epey meşakkatli bir hesap yapmamız gerekiyor!

Şimdi 2. Çözüm'den hareketle ***Neugebauer***'in yukarıdaki vizyonuna geçebiliriz. Ama bundan önce ***Neugebauer***'in Nazi dönemindeki mücadelesine odaklanalım!

Neugebauer'in Nazi Dönemindeki Mücadelesi (Struggle: The Life & Lost Works of *Neugebauer* In NAZI Period)

İlk kez 1931'de basılan ve editörlüğünü ***Neugebauer***'in yaptığı *"Zentralblatt für Mathematik (Matematik Merkezi Dergisi)"* hızla tüm matematikçiler için vazgeçilmez bir araç haline gelmişti. Bununla birlikte, Naziler iktidara geldiğinde Almanya'daki siyasi durum, ***Neugebauer***'in kariyerinin gidişatını tamamen değiştiren değişiklikler getirecekti. ***Boas***'ın yazdığı gibi: *"Almanya'daki Nasyonal Sosyalistlere başından beri karşı çıktı ve sonuç olarak akademik pozisyonunda zorlandı."*

Davis, ***Neugebauer***'in bir keresinde şunu söylediğini hatırlıyor: *"Sokağınızın aşağısında Nazi botlarının sesini hiç duymadıysanız, dönem tarihini anlayamazsınız!"*. Şunu da eklemeliyim: *"Özellikle Alman İmparatorluğunun bir bakiyesi olan resmî tören geçitleri adeta karnaval havasında gerçekleşiyor ve halk mest oluyordu. Eğer davul, zil ve tabii ki askerlerin rap rap diye çıkarttığı sesleri duymadıysanız, Nazi dönemini anlayamazsınız. Ah be ne güzel günlerdi onlar, Almanlar çocuklar gibi şendi!"*

Neugebauer'in haklı olduğundan eminiz, ancak onun yaptığı alıntı durumu anlamamıza biraz yardımcı olabilir. Neyse ki ***Neugebauer***'in ***Harald Bohr***, ünlü fizikçinin kardeşi, ile iyi bir arkadaşlığı vardı ve o, ***Neugebauer***'i Ocak 1934'te Kopenhag Üniversitesi'ne taşınması için davet etti. ***Neugebauer***, ***Zentralblatt für Mathematik***'in editörlüğünü Kopenhag'a götürdü ve orada 1934'ten 1938'e kadar Zentralblatt (ilişkili kelime: Zentropa) genel merkezinden gelişmeye devam etti. Naziler derginin yayın politikasını daha fazla etkilemeye çalıştıkları için, bu dönem boyunca derginin üretim mücadelesi daha da zorlaştı. Ne yazık ki bazı iyi matematikçiler Nazi fikirleri tarafından baştan çıkarıldı ve ***Blaschke*** gibi matematikçiler dergiye saldırdı.

1938'de ***Springer-Verlag***'ın ***Zentralblatt für Mathematik***'in Nazi ilkelerine göre üretilmesinde ısrar etmesiyle mesele doruk noktasına ulaştı. Zentralblatt'ın 1938 ve 1939 yıllarına ait 3 başlık sayfası, Ekim/Kasım 1938'deki Zentralblatt olayıyla doruğa ulaşan siyasi değişiklikleri gösteriyor. Mayıs 1938'de ***P.S. Alexandroff***'un çekilmesini, Ekim 1938'de ***T. Levi-Civita***'nın görevden alınmasını ve ardından ***Neugebauer***'in ve Zentralblatt'ın yönetim kurulunun tüm Amerikalı, İngiliz ve Danimarkalı üyelerinin istifasını yansıtıyor (Bkz. "*A Mathematician's Journeys: Otto Neugebauer and Modern Transformations of Ancient Science*", S. 83, Şekil 3).

Öncelikle ***Neugebauer***'in Tablo 1.3.2'ye göre çözümüne geçmeden önce ilkin

$$(1.3.33)\quad x_0 = 1 < \sqrt{2} < 2 = y_0$$

başlangıç değerlerine göre

$$1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow \sqrt{2} < x_1 = \frac{x_0 + y_0}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1;30 < 2$$

aritmetik ortalaması $\sqrt{2}$'ye 1 ve 2'den daha yakın olur:

$$(1.3.34)\quad 1 < \sqrt{2} < x_1 = 1;30 < 2.$$

Ancak burada 1;30 sayısı düzgün olduğundan,

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < x_1 = 1;30 \Rightarrow y_1 = 1;20 = 2 \times 0;40 = \frac{2}{1;30} = \frac{2}{x_1} < \sqrt{2}$$

eşlenik alma işlemine göre

$$(1.3.35)\quad 1 < 1;20 = y_1 < \sqrt{2} < x_1 = 1;30 < 2$$

olarak ikinci değeri elde ederiz. Bunlar ***Neugebauer***'in giriş değerleri idi (Bkz. Bölüm 5).

Resim 1.3.10. Bu fotoğraf ***Neugebauer***'in 1922'de Ludwig-Maximillian Üniversitesi'ndeyken öğrenci kimliğinden alınmıştır, *Anı Plaketi*. Daha fazla bilgi için "*A Mathematician's Journeys: Otto Neugebauer and Modern Transformations of Ancient Science*", S. 129, Şekil 1'e bakınız.

Şu halde ***Neugebauer***'in hesabına göre bunların aritmetik ortalamasını alırsak Tablo 1.3.2'deki ilk satırdaki değere ulaşmış oluruz:

$$1 < 1;20 = y_1 < \sqrt{2} < x_1 = 1;30 < 2 \Rightarrow \sqrt{2} < x_2 = \frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{1;20 + 1;30}{2} = \frac{2;50}{2} = 1;25.$$

Söz konusu bu değer TMS 3'ün 31. satırında doğrudan verilmekle birlikte AO 6484'te dolaylı olarak yer alır. Çünkü AO 6484'teki 8. problemde bu değer kullanılmıştır!

Not 1.3.5. ***Neugebauer***, 6-9 Mart 1934'te "*Vorgerische Mathematik*" adlı kitabının 9. sayfasındaki "*III. Andere Beispiele*" örneğinde $\alpha_1 = 1;25$ ve bunun yarısı olan 0;42,30'u bulurken (1.2.2)'deki $\left(b; \frac{2b}{c}, 2b\right)_{(1)} = b\frac{c}{2b}$ sürekli kesrini

$$(1.3.36)\quad \sqrt{2} = \sqrt{1;30^2 - 0;15} < 1;30 - \frac{\cancel{0;15}}{2 \times \cancel{1;30}} = 1;30 - \frac{1}{2 \times 6} = 1;30 - 0;5 = 1;25$$

ve

$$(1.3.37)\quad \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0;40^2 + 0;3,20} < 0;40 + \frac{\cancel{0;3,20}}{2 \times \cancel{0;40}} = 0;40 + \frac{1}{2 \times 12} = 0;40 + 0;2,30 = 0;42,30$$

şeklinde kullanır. Bunlardan ilkini ***Robson*** ilk prosedürde (1.2.2) ile verirken nereden kaynaklandığını göremedi. Bu yüzden bunun nereden kaynaklandığına ilişkin metodu vererek geometrik açıklamasını (3.110)'da yaptım!

Şimdi bulduğumuz tüm bu yaklaşıklıkları sıralarsak şu eşitsizlikler geçerli olur:

$$(1.3.38)\quad 1 < 1;20 = y_1 < \sqrt{2} < x_2 = 1;25 < x_1 = 1;30 < 2.$$

Burada ***Neugebauer***, (1.1.1)'i kuadratik iterasyon olarak işletir yani $\alpha_2 = 1;25$'i aldıktan sonra $\beta_2 = \frac{2}{1;25} = 1;24,42,21,\cdots$ değerini verir (Bkz. Bölüm 5). ***Neugebauer***'in β_2'yi neden böyle aldığına dair bize açık kanıtlar sunulur: Bunlardan biri, çok yakın bir zamanda (1952) ***A. Sachs***'ın keşfettiği ve üzerinde düzgün olmayan 7, 11, 13, 14 ve 17'nin terslerinin ve bunlardan 7'nin tersi için $0;8,34,16,59 < \frac{1}{7} < 0;8,34,18$ şeklinde 2 farklı değerin verildiği tablettir (Bkz. S. 34). Burada $\frac{1}{7} = 0;\overline{8,34,17}$ ve tablette verilen sınırların aritmetik ortalamasının ilk 3 altmışlığını yani kesirdeki devri verdiğine dikkat ediniz (Bkz. Tablo 1.4.2).

Resim 1.3.11. İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü'ndeki öğrenci kimliğimden aldığım fotoğrafım. Animasyonu için şuraya bakınız!

Fakat 1;25 düzgün bir sayı olmadığından artık eşlenik alma işlemine göre tersini alamayız. Dolayısıyla işleme $\sqrt{2}$'ye en yakın alt ve üst sınırların aritmetik ortalamasını alarak devam edeceğiz. O halde (1.3.38)'den

$$1;20 = y_1 < \sqrt{2} < x_2 = 1;25 \Rightarrow 1;22,30 = \frac{2;45}{2} = \frac{1;20 + 1;25}{2} = \frac{y_1 + x_2}{2} = x_3 < \sqrt{2}$$

alt sınırını elde eder ve bunu sıralamada yerine koyarsak

$$(1.3.39)\quad 1 < 1;20 = y_1 < 1;22,30 = x_3 < \sqrt{2} < x_2 = 1;25 < x_1 = 1;30 < 2$$

eşitsizlikleri geçerli olur.

Burada 1;22,30 yine düzgün bir sayı olmadığından işleme aynı şekilde devam edersek,

$$1;22,30 = x_3 < \sqrt{2} < x_2 = 1;25 \Rightarrow 1;23,45 = \frac{2;47,30}{2} = \frac{1;22,30 + 1;25}{2} = \frac{x_3 + x_2}{2} = x_4 < \sqrt{2}$$

şeklinde daha iyi bir alt sınır elde eder ve bunu da yerine koyarsak şu sıralama geçerli olur:

$$(1.3.40)\quad 1 < 1;20 = y_1 < 1;22,30 = x_3 < 1;23,45 = x_4 < \sqrt{2} < x_2 = 1;25 < x_1 = 1;30 < 2.$$

Burada da 1;23,45 düzgün olmadığından işleme aynı şekilde devam edersek,

$$1;23,45 = x_4 < \sqrt{2} < x_2 = 1;25 \Rightarrow 1;24,22,30 = \frac{2;48,45}{2} = \frac{1;23,45 + 1;25}{2} = \frac{x_4 + x_2}{2} = x_5 < \sqrt{2}$$

şeklinde daha iyi bir alt sınır elde eder ve sıralamadaki yerine koyarız:

$$(1.3.41)\quad 1 < 1;20 = y_1 < 1;22,30 = x_3 < 1;23,45 = x_4 < 1;24,22,30 = x_5 < \sqrt{2} < x_2 = 1;25 < x_1 = 1;30 < 2.$$

Artık bu son alt sınır düzgün bir sayı olduğundan (ki ***Neugebauer***'e göre 1,24,22,30'un tersi 42,40'tır. Bkz. S. 72, (3.115)) eşlenik alma işlemine göre,

$$1;24,22,30 = x_5 < \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} < y_2 = \frac{2}{x_5} = \frac{2}{1;24,22,30} = 2 \times 0;42,40 = 1;25,20$$

şeklinde 1;25'ten daha kötü bir üst sınır elde etmiş oluruz:

$$(1.3.42)\quad 1 < 1;20 = y_1 < 1;22,30 = x_3 < 1;23,45 = x_4 < 1;24,22,30 = x_5 < \sqrt{2} < x_2 = 1;25 < y_2 = 1;25,20 < x_1 = 1;30 < 2.$$

Şu halde $\sqrt{2}$'ye en yakın alt ve üst sınırların aritmetik ortalamasını alırsak şu alt sınırı elde ederiz:

$$1;24,22,30 = x_5 < \sqrt{2} < y_2 = 1;25 \Rightarrow 1;24,41,15 = \frac{2;49,22,30}{2} = \frac{1;24,22,30 + 1;25}{2} = \frac{x_5 + x_2}{2} = x_6 < \sqrt{2}.$$

Bu yeni alt sınırın sıralamadaki yeri şöyledir:

$$(1.3.43)\quad 1 < 1;20 = y_1 < 1;22,30 = x_3 < 1;23,45 = x_4 < 1;24,22,30 = x_5 < 1;24,41,15 = x_6 < \sqrt{2} < x_2 = 1;25 < y_2 = 1;25,20 < x_1 = 1;30 < 2.$$

Bundan sonraki yaklaşıklıklar da artık düzgün sayılar olmadıklarından işleme $\sqrt{2}$'ye en yakın alt ve üst sınırların aritmetik ortalamasını alarak devam etmek zorundayız. Buna göre ilkin (1.3.43)'e göre

$$1;24,41,15 = x_6 < \sqrt{2} < x_2 = 1;25 \Rightarrow 1;24,50,37,30 = \frac{2;49,41,15}{2} = \frac{1;24,41,15 + 1;25}{2} = \frac{x_6 + x_2}{2} = x_7 < \sqrt{2}$$

alt sınırı

$$(1.3.44)\quad \begin{aligned} &1 < 1;20 = y_1 < 1;22,30 = x_3 < 1;23,45 = x_4 < 1;24,22,30 = x_5 < 1;24,41,15 = x_6 < 1;24,50,37,30 = x_7 < \sqrt{2} < x_2 = 1;25 < y_2 = 1;25,20 \\ &< x_1 = 1;30 < 2 \end{aligned}$$

sıralamasında yer alırken, (1.3.44)'e göre

$$1;24,50,37,30 = x_7 < \sqrt{2} < x_2 = 1;25 \Rightarrow \sqrt{2} < x_8 = \frac{x_7 + x_2}{2} = \frac{1;24,50,37,30 + 1;25}{2} = \frac{2;49,50,37,30}{2} = 1;24,55,18,45$$

üst sınırı ise şu sıralamada yer alır:

$$(1.3.45)\quad \begin{aligned} &1 < 1;20 = y_1 < 1;22,30 = x_3 < 1;23,45 = x_4 < 1;24,22,30 = x_5 < 1;24,41,15 = x_6 < 1;24,50,37,30 = x_7 < \sqrt{2} < x_8 = 1;24,55,18,45 < x_2 = 1;25 \\ &< y_2 = 1;25,20 < x_1 = 1;30 < 2. \end{aligned}$$

Şimdi burada da biraz mola verelim ve konuyla ilgi sizin için seçtiğim ***Neugebauer***'in Oslo'daki röportajına bakıp biraz daha kafa dağıtalım. Çünkü nasıl olsa bundan sonraki hesaplar da hep aynı şekilde sıkıcı (monoton) olduğundan molalar iyi geliyor!

Tirsdag 14. juli 1936. Arbeiderbladet

700 berømte matematikere

Lyn-intervjuer om universet som utvider sig, om hvad kileskriften fra Ur kan fortelle og mange andre ting

Amerika det førende land på matematikens område – takket være nazismen.

Greta Keller på Saga.

Citater

Resim 1.3.12. Oslo'da yayınlanan Arbeiderbladet gazetesinin 14 Temmuz 1936 tarihli sayısında Oslo Uluslararası Matematikçiler Kongresi hakkında katılımcılarla **"Yıldırım Röportajlar"** içeren bir makale, s. 5. ***Neugebauer*** ile ilgili pasajlar ve fotoğraf çerçeve içine alınmıştır. ***Henrik Kragh Sørensen***'in (Århus) izniyle.

700 Ünlü Matematikçi

Lyn - Genişleyen evren, Ur çivi yazısının bize neler söyleyebilecekleri ve çok daha fazlası hakkında röportajlar.

Amerika matematikte lider ülke-Nazizm sayesinde.

Neugebauer'in Oslo'daki varlığı öncelikle bir editör olarak öne çıkmasını yansıtıyordu, ancak orada tarihsel çalışmalarıyla da geniş çapta tanındı ve bu nedenle 20 genel konuşmadan birini yapmak üzere davet edildi. Almanca olarak **"Yunan Matematiği ve Yunan öncesi matematikle ilişkisi"** üzerine konuştu (*Neugebauer-1937*). Bu konuşmasında ***Neugebauer***, **"Babil sayısal yöntemleri ile Yunan geometrik modelleri arasındaki zıtlığı Yunanlıların tipik sezgisel yetenekleriyle açıklama"** girişiminin **"bilimsel metodolojimizin tüm temelini reddetmek"** anlamına geleceğini vurguladı (*Neugebauer-1937*, 160). Bunu muhtemelen Almanya'daki çağdaş siyasi tartışmalarda **"Alman matematiğinin" "sezgisel"** ve geometrik ruhunun iddia edilen üstünlüğüne dolaylı ama açık bir ima olarak okumak gerekir. Gerçekten de, daha Temmuz 1933'te, Nazilerin iktidara gelmesinden 6 ay sonra, ***Neugebauer*** bir kitap eleştirisinde **"dar bir şekilde sınırlandırılmış Mısır gelişiminin aksine (çivi yazısı kültürlerinde) kültürlerin ve ırkların birbirine karışmasının"** olumlu etkileri hakkında yorum yapmıştı. Ancak ***Neugebauer***, Oslo'da belki de Almanya'daki Nazi propagandacıları tarafından sık sık kötüye kullanıldığı için **"ırk"** kelimesini kullanmaktan kaçınmıştır.

Neugebauer genellikle kamuoyu önünde siyasi konuşmalar yapmazken, 14 Temmuz 1936'da Norveç Gazetesi Arbeiderbladet'te (şimdi Dagsavisen) yayınlanan bir röportajda biraz daha açık sözlü oldu. Yanda 37 yaşındayken görülen ***Neugebauer*** Danca konuşmuştur; bu röportajda söyledikleri Norveççeden İngilizceye çevrilerek yeniden yayımlanmıştır (Bkz. "*A Mathematician's Journeys: Neugebauer*", S. 81):

Neugebauer-Oslo'daki Röportaj

***Neugebauer**, Almanya'daki pek çok kişi gibi evsiz kalmış ufak tefek bir Avusturyalı (ki gazetede "Alman" denilerek hata yapılmıştır); ancak 2 **Bohr** kardeş gibi ünlü bilim insanlarıyla birlikte çalıştığı Kopenhag, onu kollarını açarak karşıladı. Şimdi bir yerli gibi Danca konuşuyor.*

***Neugebauer**, Yunan öncesi matematiğin tarihini araştırmaya başlayan ilk kişidir ve Yunan matematik biliminin Babil temelleri üzerine inşa edildiğini göstermiştir. Yunanlılar, matematiğe modern bakış açılarını getirmişlerdir, ancak temel Babillilere aittir. Bu, **Neugebauer**'in Mezopotamya'daki kazılardan çıkarılan ve şu anda Berlin, Londra, Paris vb. müzelerde saklanan kil tabletler üzerindeki çivi yazılı metinleri inceleyerek yaptığı bir keşiftir. Dolayısıyla matematik biliminin dil bilimiyle yakın bir bağlantısı vardır.*

- İnsan Babillilerin matematiğe neden bu kadar yatkın olduklarını merak ediyor.

- Muhtemelen oradaki farklı insan tiplerinin özel bir karışımı sayesinde. Babilliler, İngilizlerin Ur'da yaptıkları kazılarda çok kapsamlı bir şekilde inceledikleri ve sizin de muhtemelen duymuş olduğunuz Sümer kültürü üzerine inşa edilmişlerdir.

Neugebauer'in Babil matematiğinin verimliliğine ilişkin açıklaması, ***Hitler***'in Almanya'da iktidara gelmesinden sonraki zamanın özel ruhuyla (Zeitgeist) açıkça örtüşmektedir. Bu fikir iklimine herhangi bir atıfta bulunmaktan kaçınırken, ***Ludwig Bieberbach***'ın ırkçı ***"Deutsche Mathematik"***'ine karşı çıkan bir bakış açısını, yani farklı kültürlerin (***Neugebauer***'in 1933'te söylediği gibi **"ırkların"**, 1936'da yerini **"farklı insan tiplerinin (forskjellige folketyper)"** aldığı) iş birliğinin matematiksel ilerleme için hayati önem taşıdığını vurguluyordu (Bkz. Resim 1.3.12. Daha geniş bilgi için "*A Mathematician's Journeys: Otto Neugebauer and Modern Transformations of Ancient Science*", S. 80-82'ye bakınız).

Şimdi işleme kaldığımız yerden aynı şekilde devam edersek, (1.3.45)'e göre

$$1;24{,}50{,}37{,}30 = x_7 < \sqrt{2} < x_8 = 1;24{,}55{,}18{,}45 \Rightarrow \sqrt{2} < x_9 = \frac{x_7 + x_8}{2} = \frac{1;24{,}50{,}37{,}30 + 1;24{,}55{,}18{,}45}{2} = \frac{2;49{,}45{,}56{,}15}{2} = 1;24{,}52{,}58{,}7{,}30$$

üst sınırı

$$1 < 1;20 = y_1 < 1;22{,}30 = x_3 < 1;23{,}45 = x_4 < 1;24{,}22{,}30 = x_5 < 1;24{,}41{,}15 = x_6 < 1;24{,}50{,}37{,}30 = x_7 < \sqrt{2} < x_9 = 1;24{,}52{,}58{,}7{,}30 < x_8 = 1;24{,}55{,}18{,}45 < x_2 = 1;25 < y_2 = 1;25{,}20 < x_1 = 1;30 < 2 \quad (1.3.46)$$

sıralamasında yer alırken, (1.3.46)'ya göre

$$1;24{,}50{,}37{,}30 = x_7 < \sqrt{2} < x_9 = 1;24{,}52{,}58{,}7{,}30 \Rightarrow \sqrt{2} < x_{10} = \frac{x_7 + x_9}{2} = \frac{1;24{,}50{,}37{,}30 + 1;24{,}52{,}58{,}7{,}30}{2} = \frac{2;49{,}43{,}35{,}37{,}30}{2} = 1;24{,}51{,}47{,}48{,}45$$

üst sınırı da

$$1 < 1;20 = y_1 < 1;22{,}30 = x_3 < 1;23{,}45 = x_4 < 1;24{,}22{,}30 = x_5 < 1;24{,}41{,}15 = x_6 < 1;24{,}50{,}37{,}30 = x_7 < \sqrt{2} < x_{10} = 1;24{,}51{,}47{,}48{,}45 < x_9 = 1;24{,}52{,}58{,}7{,}30 < x_8 = 1;24{,}55{,}18{,}45 < x_2 = 1;25 < y_2 = 1;25{,}20 < x_1 = 1;30 < 2 \quad (1.3.47)$$

eşitsizliklerinde yerini alır.

Yine işleme bu şekilde devam edersek, (1.3.47)'ye göre

$$1;24{,}50{,}37{,}30 = x_7 < \sqrt{2} < x_{10} = 1;24{,}51{,}47{,}48{,}45 \Rightarrow \sqrt{2} < x_{11} = \frac{x_7 + x_{10}}{2} = \frac{1;24{,}50{,}37{,}30 + 1;24{,}51{,}47{,}48{,}45}{2} = \frac{2;49{,}42{,}25{,}18{,}45}{2} = 1;24{,}51{,}12{,}39{,}22{,}30$$

üst sınırı

$$1 < 1;20 = y_1 < 1;22{,}30 = x_3 < 1;23{,}45 = x_4 < 1;24{,}22{,}30 = x_5 < 1;24{,}41{,}15 = x_6 < 1;24{,}50{,}37{,}30 = x_7 < \sqrt{2} < x_{11} = 1;24{,}51{,}12{,}39{,}22{,}30 < x_{10} = 1;24{,}51{,}47{,}48{,}45 < x_9 = 1;24{,}52{,}58{,}7{,}30 < x_8 = 1;24{,}55{,}18{,}45 < x_2 = 1;25 < y_2 = 1;25{,}20 < x_1 = 1;30 < 2 \quad (1.3.48)$$

eşitsizliklerinde yer alırken, (1.3.48)'e göre

$$1;24{,}50{,}37{,}30 = x_7 < \sqrt{2} < x_{11} = 1;24{,}51{,}12{,}39{,}22{,}30 \Rightarrow 1;24{,}50{,}55{,}4{,}41{,}15 = \frac{2;49{,}41{,}50{,}9{,}22{,}30}{2} = \frac{1;24{,}50{,}37{,}30 + 1;24{,}51{,}12{,}39{,}22{,}30}{2} = \frac{x_7 + x_{11}}{2} = x_{12} < \sqrt{2}$$

alt sınırı da

$$1 < 1;20 = y_1 < 1;22{,}30 = x_3 < 1;23{,}45 = x_4 < 1;24{,}22{,}30 = x_5 < 1;24{,}41{,}15 = x_6 < 1;24{,}50{,}37{,}30 = x_7 < 1;24{,}50{,}55{,}4{,}41{,}15 = x_{12} < \sqrt{2} < x_{11} = 1;24{,}51{,}12{,}39{,}22{,}30 < x_{10} = 1;24{,}51{,}47{,}48{,}45 < x_9 = 1;24{,}52{,}58{,}7{,}30 < x_8 = 1;24{,}55{,}18{,}45 < x_2 = 1;25 < y_2 = 1;25{,}20 < x_1 = 1;30 < 2 \quad (1.3.49)$$

sıralamasında yerini alır.

Benzer şekilde (1.3.49)'a göre

$$1;24{,}50{,}55{,}4{,}41{,}15 = x_{12} < \sqrt{2} < x_{11} = 1;24{,}51{,}12{,}39{,}22{,}30 \Rightarrow 1;24{,}51{,}3{,}52{,}1{,}52{,}30 = \frac{2;49{,}42{,}7{,}44{,}3{,}45}{2} = \frac{1;24{,}50{,}55{,}4{,}41{,}15 + 1;24{,}51{,}12{,}39{,}22{,}30}{2} = \frac{x_{12} + x_{11}}{2} = x_{13} < \sqrt{2}$$

alt sınırı

$$1 < 1;20 = y_1 < 1;22{,}30 = x_3 < 1;23{,}45 = x_4 < 1;24{,}22{,}30 = x_5 < 1;24{,}41{,}15 = x_6 < 1;24{,}50{,}37{,}30 = x_7 < 1;24{,}50{,}55{,}4{,}41{,}15 = x_{12} < 1;24{,}51{,}3{,}52{,}1{,}52{,}30 = x_{13} < \sqrt{2} < x_{11} = 1;24{,}51{,}12{,}39{,}22{,}30 < x_{10} = 1;24{,}51{,}47{,}48{,}45 < x_9 = 1;24{,}52{,}58{,}7{,}30 < x_8 = 1;24{,}55{,}18{,}45 < x_2 = 1;25 < y_2 = 1;25{,}20 < x_1 = 1;30 < 2 \quad (1.3.50)$$

eşitsizliklerinde yer alırken, (1.3.50)'ye göre

$$1;24{,}51{,}3{,}52{,}1{,}52{,}30 = x_{13} < \sqrt{2} < x_{11} = 1;24{,}51{,}12{,}39{,}22{,}30 \Rightarrow 1;24{,}51{,}8{,}15{,}42{,}11{,}15 = \frac{2;49{,}42{,}16{,}31{,}24{,}22{,}30}{2} = \frac{1;24{,}51{,}3{,}52{,}1{,}52{,}30 + 1;24{,}51{,}12{,}39{,}22{,}30}{2} = \frac{x_{13} + x_{11}}{2} = x_{14} < \sqrt{2}$$

alt sınırı da şu sıralamada yerini bulur:

$$1 < 1;20 = y_1 < 1;22{,}30 = x_3 < 1;23{,}45 = x_4 < 1;24{,}22{,}30 = x_5 < 1;24{,}41{,}15 = x_6 < 1;24{,}50{,}37{,}30 = x_7 < 1;24{,}50{,}55{,}4{,}41{,}15 = x_{12} < 1;24{,}51{,}3{,}52{,}1{,}52{,}30 = x_{13} < 1;24{,}51{,}8{,}15{,}42{,}11{,}15 = x_{14} < \sqrt{2} < x_{11} = 1;24{,}51{,}12{,}39{,}22{,}30 < x_{10} = 1;24{,}51{,}47{,}48{,}45 < x_9 = 1;24{,}52{,}58{,}7{,}30 < x_8 = 1;24{,}55{,}18{,}45 < x_2 = 1;25 < y_2 = 1;25{,}20 < x_1 = 1;30 < 2 \quad (1.3.51)$$

Burada bir mola daha verelim. Çünkü aşağıdaki okuma parçası ***Neugebauer***'in (ki gençliğinde ***Romberg*** gibi hızlı bir solcu idi. Bkz. RİK 4, S. 21. Oradaki SAP/SAPD'ın açılımı "Sozialistischen Arbeiterpartei Deutschland"tır. 31.7.1932 ve 6.11.1932'deki seçimlere katıldı) politik görüşünün günümüzde de geçerli olduğunu gösteriyor.

Anavatan İçin El Ele! ***Neugebauer*** gibi genç akademisyenler için 1930'larda tehlikeli olan sadece ekonomik durum değildi. Ayrıca siyasi olarak da, özellikle sağdan gelen aşırıcılığın yükselişiyle birlikte **"duvardaki yazıyı"** gördüler. ***Neugebauer***'in, 1930 Alman Reichstag seçimleri arifesinde ***Erich Bessel-Hagen***'e yazdığı mektuplardan birinin sonunda, nadir görülen bir siyasi kaygı patlamasına rastlanır. Bu sırada ***Erich Bessel-Hagen*** Bonn Üniversitesi'nde mütevazı bir görevdeydi. ***Hitler***'e ilk kez Cumhurbaşkanlık yolunu açan 14 Eylül 1930'daki seçimlerde Nazi partisi NSDAP, % 18.25 ile 107 milletvekili çıkararak 2. parti oldu.

14 Eylül 1930'daki Reichstag Seçimi

Seçim öncesi hazırlanan afişler SPD'nin soldaki *"Bahn frei für için yolu açın. Sosyal* Sosyal Demokrat (SPD), solundaki yıldızlı KPD'liyi *gegen Bürgerblock und burjuva bloğuna ve gamalı haça Feinde der Demokratie (Bunlar Hinweg damit (Uzaklaş ondan). listesi 1). Sozialdemokraten* ortamını ateşliyordu.

oldukça dikkat çekiciydi. Örneğin *Liste 1. Sozialdemokraten (Liste 1 Demokratlar)"* (ki bu afişte bir sağında gamalı haçlı NSDAP ile dövüyordu), sağdaki *"Liste 1 SPD Hakenkreuz (Liste 1 için SPD, karşı)"* ve ortadaki *"Das sinde die demokrasinin düşmanlarıdır). Deshalb wählt liste 1 (Bu nedenle oy (Sosyal Demokratlar)"* afişleri seçim

Hitler'in partisi olan SPD'ninkinden pek geri soldaki afişte şunlar *(Liste 10'a oy verin). Der doğru yere oturmalı). Deutsche Arbeiterpartei İşçi Partisi). Hitler-Hareketi)"*. Fakat bu afiş ait olamaz, çünkü girmişti (Bkz. *"[Election National People's Party the Reichstag election on](#)*

NSDAP'ın afişlerinin de kalır yanı yoktu. Örneğin yazılıydı: *"Wählt liste 10 Schlag muss sitzen (Yumruk Nationalsozialistische- (Nasyonal Sosyalist Alman Bewegung (Hitler* 14 Eylül 1930'daki seçime NSDAP 2. listeden seçime *[poster of the German](#)*

[for the Reichstag elections on 14 September, 1930](#)", "*[Poster of the Nazi Party for 14 September 1930](#)*").

Diğer partilere gelince, yukarıdaki ortadaki KPD'nin *"Kämpft mit uns Wählt kommunisten (Bizimle savaş. Komünistlere oy ver). Liste 4"* ve sağdaki DVP'nin *"Liste 5. Helft die Drosseln (Gaz kollarına yardım edin). Ausgabenwirsschass (Harcama Ası). Wählt Deutsche Volkspartei (Alman Halk Partisi'ne oy verin)"*, yandaki sağdaki ZP'nin (ki köprünün altında kızıllar ile gamalı haçlılar kapışırken, Hristiyan partisi üyeleri **'Zentrum (Merkez)'** yazan köprünün üzerinde yürüyorlar. Verilen mesaj şudur: Merkez Parti (ZentrumPartei) her partiyle bağı olduğundan herkesi bir arada tutan köprüdür) ve sağdaki SP'nin *"Wählt Liste 6 (Liste 6'ya oy verin)"* afişleri mevcuttu. Fakat sondan 4 afiş 1 Ocak 1930'daki seçime aittir.

Neugebauer'in 20 tarihli mektubunun duygusal ve yoğun seçimlerin sonucu iyimser olduğu hükümetinde zaten var olan Nazi etkisine ve aşırı için Young planına karşı bir referandum yapılması bulunuyordu (ki aynı seçimde ortadaki afişte *plan und Marxismus (Açıkça Young planına ve* ***Neugebauer***'in elinden çıkan bir resim (Resim tazminatlara karşı milliyetçi kervana katılma sonraki seçimlerde komünistler için sonuç

Ağustos 1930 son derece pasajında, bu konusunda hala anlaşılıyordu. Almanya'nın Thüringen eyaletinin sağın, kaybedilen savaş tazminatının ödenmesi lehine yürüttüğü başarısız kampanyaya atıfta (sondan ikinci) *"Mit klarem Blick gegen Young Marksizme karşı bakış)"* deniliyordu). 1.3.13) Alman komünistlerinin Versailles'a ve çabalarına işaret etmektedir ki bu çabalar bir vermemiştir.

Fakat kaderin garip bir cilvesi olacak ki anılan mektupta ***Neugebauer***, ***Hitler***'in iktidara gelmesine daha 3 yıl ([30 Ocak 1933](#)) ve Naziler ile Sovyetler arasındaki ilk anlaşmanın yapılmasına 9 yıl ([23 Ağustos 1939](#)) varken şu çizimde bulunur (ki çizimdeki KPD'nin NSDAP gibi milliyetçi olması hiçbir tarih kitabında yer almaz. Örneğin ***Simon Hinds***, *"[GCSE Germany 12: Nazi Electoral Success 1930-32](#)"*de bir şeyler söyler ama ***Neugebauer***'in kendi gözleriyle gördüğü bu gerçekten bahsetmez):

Resim 1.3.13. ***Neugebauer***'in ***Erich Bessel-Hagen***'e yazdığı 20 Ağustos 1930 tarihli mektuptan siyasi bir çizim. Çizimin üzerine **"Hand in hand fürs Vatterland! (Anavatan için El Ele!)"** yazıyor ve böylece **"[Vaterland](#) (Anavatan)"** kavramını çift "T" ile yanlış yazma yoluyla alay ediyordu (ki İngilizce'de de tek "T" ile "[Fatherland](#)"dır. Anlamı **"Baba Toprağı"**dır). Bonn Üniversite Kütüphanesi'nin izniyle, Nachlass E. Bessel-Hagen. Bkz. *"[A Mathematician's Journeys: Otto Neugebauer and Modern Transformations of Ancient Science](#)"*, S. 74-75.

Neugebauer'in mektubu, Almanya'daki bu tür çaresiz ve oldukça birçok hırslı genç akademisyen, ve sadece onlar değil Yahudi olan bu kişiler, ekonomik ve siyasi krizin başladığı 1930'lardaki durum geleceğe yönelik planlarını engellemekle tehdit ediyordu. Gerçekten de durum ***Courant***, ***Neugebauer*** ve diğer Alman matematikçilerin enternasyonalist eğilimleri 1933 yılında önemli ölçüde değişmiştir.

Buraya son bir not düşeyim: Anılan kaynaktaki mektup Bonn Üniversitesi'nde (No. 79) olup bir parçası 75. sayfanın 42. dipnotunda verilir. Resim 1.3.13'teki çizime ilişkin "*… milliyetçi kervanına katılma çabalarına işaret etmektedir ki bu çabalar bir sonraki seçimlerde komünistler için sonuç vermemiştir*" ifadesi ise tarihçi ***Reinhard Siegmund-Schultze***'ye aittir (Bkz. "*Not in Possession of Any Weltanschauung: Otto Neugebauer's Flight from Nazi Germany and His Search for Objectivity in Mathematics, in Reviewing, and in History*", S. 61. Siz onu daha çok RİK 3 ve RİK 4'te "*Nazi Almanyası'ndan Kaçan Matematikçiler*" adlı kitabıyla tanırsınız).

Fakat yanılır. İşte KPD'nin katıldığı tüm seçimler ve oyları şöyledir:

	20 Mayıs 1928	14 Eylül 1930	31 Temmuz 1932	6 Kasım 1932	5 Mart 1933
Son Seçim	% 8.9 ile 45 koltuk	% 10.6 ile 54 koltuk	% 13,1 ile 77 koltuk	% 14.3 ile 59 koltuk	% 16.9 ile 100 koltuk
Kazanılan Koltuk	54	77	89	100	81
Koltuk Değişimi	9	23	12	11	19
Aldığı Oy	3,264,793	4,590,160	5,282,636	5,980,239	4,848,058
Yüzde	% 10.6	% 13,1	% 14.3	% 16.9	% 12.3
Sıralamadaki Yeri	4	3	3	3	3

Tablo 1.3.3. KPD (Alman Komünist Partisi)'nin ***Neugebauer***'in ***Erich Bessel-Hagen***'e gönderdiği ve içinde Resim 1.3.13'teki çizimin bulunduğu mektuptan ya da 1928'deki seçimden sonra dramatik bir yükseliş içinde olduğu görülüyor. Çünkü Milliyetçilik siyasi partiler için büyük bir yapı taşıydı. Bunu ilk fark eden ***Mussolini*** oldu. Bizzat savaşa katıldı ve milliyetçiliğin gücüne şahit oldu. Bana göre ***Mussolini***'nin solculuktan faşizme evrilmesinin temel nedeni bu idi!

Şimdi (1.3.51)'den devam edersem, aynı işleme göre

$$1;24{,}51{,}8{,}15{,}42{,}11{,}15 = x_{14} < \sqrt{2} < x_{11} = 1;24{,}51{,}12{,}39{,}22{,}30 \Rightarrow \sqrt{2} < x_{15} = \frac{x_{14}+x_{11}}{2} = \frac{1;24{,}51{,}8{,}15{,}42{,}11{,}15 + 1;24{,}51{,}12{,}39{,}22{,}30}{2} = \frac{2;49{,}42{,}20{,}55{,}4{,}41{,}15}{2}$$
$$= 1;24{,}51{,}10{,}27{,}32{,}20{,}37{,}30$$

üst sınırı

$$1 < 1;20 = y_1 < 1;22{,}30 = x_3 < 1;23{,}45 = x_4 < 1;24{,}22{,}30 = x_5 < 1;24{,}41{,}15 = x_6 < 1;24{,}50{,}37{,}30 = x_7 < 1;24{,}50{,}55{,}4{,}41{,}15 = x_{12} < 1;24{,}51{,}3{,}52{,}1{,}52{,}30 = x_{13} < 1;24{,}51{,}8{,}15{,}42{,}11{,}15 = x_{14} < \sqrt{2} < x_{15} = 1;24{,}51{,}10{,}27{,}32{,}20{,}37{,}30 < x_{11} = 1;24{,}51{,}12{,}39{,}22{,}30 < x_{10} = 1;24{,}51{,}47{,}48{,}45 < x_9 = 1;24{,}52{,}58{,}7{,}30 < x_8 = 1;24{,}55{,}18{,}45 < x_2 = 1;25 < y_2 = 1;25{,}20 < x_1 = 1;30 < 2 \tag{1.3.52}$$

sıralamasındayken, (1.3.52)'ye göre

$$1;24{,}51{,}8{,}15{,}42{,}11{,}15 = x_{14} < \sqrt{2} < x_{15} = 1;24{,}51{,}10{,}27{,}32{,}20{,}37{,}30 \Rightarrow 1;24{,}51{,}9{,}21{,}37{,}15{,}56{,}15 = \frac{2;49{,}42{,}18{,}43{,}14{,}31{,}52{,}30}{2}$$
$$= \frac{1;24{,}51{,}8{,}15{,}42{,}11{,}15 + 1;24{,}51{,}10{,}27{,}32{,}20{,}37{,}30}{2} = \frac{x_{14}+x_{15}}{2} = x_{16} < \sqrt{2}$$

alt sınırı

$$1 < 1;20 = y_1 < 1;22{,}30 = x_3 < 1;23{,}45 = x_4 < 1;24{,}22{,}30 = x_5 < 1;24{,}41{,}15 = x_6 < 1;24{,}50{,}37{,}30 = x_7 < 1;24{,}50{,}55{,}4{,}41{,}15 = x_{12} < 1;24{,}51{,}3{,}52{,}1{,}52{,}30 = x_{13} < 1;24{,}51{,}8{,}15{,}42{,}11{,}15 = x_{14} < 1;24{,}51{,}9{,}21{,}37{,}15{,}56{,}15 = x_{16} < \sqrt{2} < x_{15} = 1;24{,}51{,}10{,}27{,}32{,}20{,}37{,}30 < x_{11} = 1;24{,}51{,}12{,}39{,}22{,}30 < x_{10} = 1;24{,}51{,}47{,}48{,}45 < x_9 = 1;24{,}52{,}58{,}7{,}30 < x_8 = 1;24{,}55{,}18{,}45 < x_2 = 1;25 < y_2 = 1;25{,}20 < x_1 = 1;30 < 2 \tag{1.3.53}$$

sıralamasında yer alır.

Aynı şekilde (1.3.53)'e göre

$$1;24{,}51{,}9{,}21{,}37{,}15{,}56{,}15 = x_{16} < \sqrt{2} < x_{15} = 1;24{,}51{,}10{,}27{,}32{,}20{,}37{,}30 \Rightarrow 1;24{,}51{,}9{,}54{,}34{,}48{,}16{,}52{,}30 = \frac{2;49{,}42{,}19{,}49{,}9{,}36{,}33{,}45}{2}$$
$$= \frac{1;24{,}51{,}9{,}21{,}37{,}15{,}56{,}15 + 1;24{,}51{,}10{,}27{,}32{,}20{,}37{,}30}{2} = \frac{x_{16}+x_{15}}{2} = x_{17} < \sqrt{2}$$

alt sınırı

$$1 < 1;20 = y_1 < 1;22{,}30 = x_3 < 1;23{,}45 = x_4 < 1;24{,}22{,}30 = x_5 < 1;24{,}41{,}15 = x_6 < 1;24{,}50{,}37{,}30 = x_7 < 1;24{,}50{,}55{,}4{,}41{,}15 = x_{12} < 1;24{,}51{,}3{,}52{,}1{,}52{,}30 = x_{13} < 1;24{,}51{,}8{,}15{,}42{,}11{,}15 = x_{14} < 1;24{,}51{,}9{,}21{,}37{,}15{,}56{,}15 = x_{16} < 1;24{,}51{,}9{,}54{,}34{,}48{,}16{,}52{,}30 = x_{17} < \sqrt{2} < x_{15} = 1;24{,}51{,}10{,}27{,}32{,}20{,}37{,}30 < x_{11} = 1;24{,}51{,}12{,}39{,}22{,}30 < x_{10} = 1;24{,}51{,}47{,}48{,}45 < x_9 = 1;24{,}52{,}58{,}7{,}30 < x_8 = 1;24{,}55{,}18{,}45 < x_2 = 1;25 < y_2 = 1;25{,}20 < x_1 = 1;30 < 2 \tag{1.3.54}$$

sıralamasındayken, (1.3.54)'e göre

$$1;24{,}51{,}9{,}54{,}34{,}48{,}16{,}52{,}30 = x_{17} < \sqrt{2} < x_{15} = 1;24{,}51{,}10{,}27{,}32{,}20{,}37{,}30 \Rightarrow \sqrt{2} < x_{18} = \frac{x_{17}+x_{15}}{2}$$
$$= \frac{1;24{,}51{,}9{,}54{,}34{,}48{,}16{,}52{,}30 + 1;24{,}51{,}10{,}27{,}32{,}20{,}37{,}30}{2} = \frac{2;49{,}42{,}20{,}22{,}7{,}8{,}54{,}22{,}30}{2} = 1;24{,}51{,}10{,}11{,}3{,}34{,}27{,}11{,}15$$

üst sınırı da şu sıralamada bulunur:

$$1 < 1;20 = y_1 < 1;22{,}30 = x_3 < 1;23{,}45 = x_4 < 1;24{,}22{,}30 = x_5 < 1;24{,}41{,}15 = x_6 < 1;24{,}50{,}37{,}30 = x_7 < 1;24{,}50{,}55{,}4{,}41{,}15 = x_{12} < 1;24{,}51{,}3{,}52{,}1{,}52{,}30 = x_{13} < 1;24{,}51{,}8{,}15{,}42{,}11{,}15 = x_{14} < 1;24{,}51{,}9{,}21{,}37{,}15{,}56{,}15 = x_{16} < 1;24{,}51{,}9{,}54{,}34{,}48{,}16{,}52{,}30 = x_{17} < \sqrt{2} < x_{18} = 1;24{,}51{,}10{,}11{,}3{,}34{,}27{,}11{,}15 < x_{15} = 1;24{,}51{,}10{,}27{,}32{,}20{,}37{,}30 < x_{11} = 1;24{,}51{,}12{,}39{,}22{,}30 < x_{10} = 1;24{,}51{,}47{,}48{,}45 < x_9 = 1;24{,}52{,}58{,}7{,}30 < x_8 = 1;24{,}55{,}18{,}45 < x_2 = 1;25 < y_2 = 1;25{,}20 < x_1 = 1;30 < 2. \tag{1.3.55}$$

Son olarak (1.3.55)'e göre

$$1;24,51,9,54,34,48,16,52,30 = x_{17} < \sqrt{2} < x_{18} = 1;24,51,10,11,3,34,27,11,15 \Rightarrow 1,24,51,10,2,49,11,22,1,52,30 = \frac{2;49,42,20,5,38,22,44,3,45}{2}$$
$$= \frac{1;24,51,9,54,34,48,16,52,30 + 1;24,51,10,11,3,34,27,11,15}{2} = \frac{x_{17}+x_{18}}{2} = x_{19} < \sqrt{2}$$

alt sınırı

$$\begin{aligned}&1 < 1;20 = y_1 < 1;22,30 = x_3 < 1;23,45 = x_4 < 1;24,22,30 = x_5 < 1;24,41,15 = x_6 < 1;24,50,37,30 = x_7 < 1;24,50,55,4,41,15 = x_{12} < \\ &1;24,51,3,52,1,52,30 = x_{13} < 1;24,51,8,15,42,11,15 = x_{14} < 1;24,51,9,21,37,15,56,15 = x_{16} < 1;24,51,9,54,34,48,16,52,30 = x_{17} < \\ &1,24,51,10,2,49,11,22,1,52,30 = x_{19} < \sqrt{2} < x_{18} = 1;24,51,10,11,3,34,27,11,15 < x_{15} = 1;24,51,10,27,32,20,37,30 < x_{11} = 1;24,51,12,39,22,30 \\ &< x_{10} = 1;24,51,47,48,45 < x_9 = 1;24,52,58,7,30 < x_8 = 1;24,55,18,45 < x_2 = 1;25 < y_2 = 1;25,20 < x_1 = 1;30 < 2\end{aligned} \tag{1.3.56}$$

sıralamasında yer alır.

Sonuç 1.3.2. (1.3.56)'dan şu sonuçlar ortaya çıkar:

1. $\sqrt{2}$ için 3 altmışlığı doğru olan x_{17} ve x_{18}'i (3.120)'de, hem de 4 altmışlık doğrulukla, 1;24,51,10,07,45,40,55,04,41,15 olarak daha önceden bulmuştum!

2. Eğer (1.3.56)'daki yaklaşıklıkların karelerini alırsak şu sonuçlar çıkar (Bkz. "*A Remarkable Collection of Babylonian Mathematics Texts*" ve "Plimton 322", 4. Sütun):

$$\left\{\begin{aligned} y_{01}^2 &= 1;46,40 \\ x_{03}^2 &= 1;53,26,15 \\ x_{04}^2 &= 1;56,54,3,45 \\ x_{05}^2 &= 1;58,39,8,26,15 \\ x_{06}^2 &= 1;59,31,58,21,33,45 \\ x_{07}^2 &= 1;59,58,27,42,53,26,15 \\ x_{12}^2 &= 1;59,59,17,25,45,52,20,59,28,21,33,45 \\ x_{13}^2 &= 1;59,59,42,17,15,57,8,33,30,3,30,56,15 \\ x_{14}^2 &= 1;59,59,54,43,1,57,28,29,5,17,17,6,33,45 \\ x_{16}^2 &= 1;59,59,57,49,28,33,35,33,52,40,36,6,30,14,3,45 \\ x_{17}^2 &= 1;59,59,59,22,41,52,33,25,9,24,29,28,34,44,45,56,15 \\ x_{19}^2 &= 1;59,59,59,46,0,12,23,32,26,36,56,45,46,31,37,33,30,56,15 \end{aligned}\right. < 2 < \begin{aligned} x_{18}^2 &= 2;0,0,0,9,18,32,15,55,31,1,59,37,38,34,9,36,33,45 \\ x_{15}^2 &= 2;0,0,0,55,55,12,7,29,1,29,52,5,23,26,15 \\ x_{11}^2 &= 2;0,0,7,8,48,36,25,50,23,26,15 \\ x_{10}^2 &= 2;0,1,46,35,24,58,32,6,33,45 \\ x_{09}^2 &= 2;0,5,5,30,41,18,30,56,15 \\ x_{08}^2 &= 2;0,11,43,29,28,21,33,45 \\ x_{02}^2 &= 2;0,25 \\ y_{02}^2 &= 2;1,21,46,40 \\ x_{01}^2 &= 2;15. \end{aligned} \tag{1.3.57}$$

Burada (1.3.31) ve (1.3.32)'deki gibi yine bir örnek olması açısından şu örneği inceleyelim: Plimton 322 tabletinin 10. satırındaki genişliği $a_{10} = 1,22,41$ ve yüksekliği $h_{10} = 1,48,0$ olan üçgende (1.3.30)'a göre,

$$\left(\frac{\mathrm{r}_{10}}{\mathrm{h}_{10}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\mathrm{a}_{10}}{\mathrm{h}_{10}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1,22,41}{1,48,0}\right)^2 = 1 + (1,22,41 \times 0;33,20)^2 = 1 + \left(\frac{1,22,41}{1,48,0}\right)^2 = 1 + (0;45,56,6,40)^2 = 1 + 0;35,10,2,28,27,24,26,40$$
$$= 1;35,10,2,28,27,24,26,40 \tag{1.3.58}$$

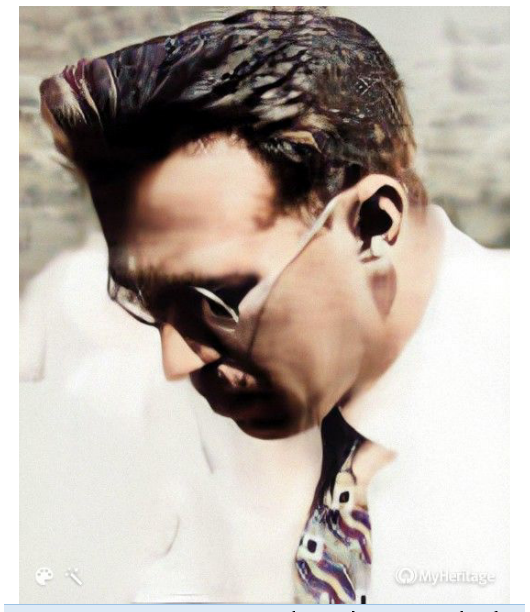
sonucu geçerli olur. Bu, tabletin 4. sütununda mertebesi 8 altmışlıkla en yüksek sayıdır.

Bu durumda (1.3.57)'deki sayıların nasıl hesaplandığı açık hale gelir. Ama bunları elle hesaplamak piramitlerdeki gibi hatırı sayılı bir eziyete neden olur. Fakat onlar daha büyük eziyetlere de katlandılar.

Örneğin aşağıdaki tablette 20^5 sayısı vardır:

Resim 1.3.14. MS 2351 tabletindeki 20^5 sayısının 60 tabanındaki yazımı: 13,22,50,54,59,9,29,58,26,43,17,31,51,6,40. Bu sayı 2 satır olarak ön yüzde başlar, arka yüzde devam eder (Bkz. "*Notices of The AMS*", Cilt 55, Sayı 9, S. 1078, Şekil 6).

Bugün bu sayıyı 10 tabanında $2^5 = 32$ için 3,200,000 şeklinde kolaylıkla yazabilirken 60 tabanında yazabilmek kolay değildir (ki Sümer ve Babil'de 10 tabanı günlük işlerde ve 60 tabanı yüksek hassaslık isteyen matematik ve astronomide kullanılıyordu. 10 tabanı Eski Mısır'da da kullanıldı. Bkz. Ahmes Papirüsü, Problem 48, S. 12). Fakat diğer tabletlerdeki $9^0, 9^1, \cdots, 9^{46}$ ve $9^{11}, 9^{11}.12, 9^{11}.12^2, \cdots, 9^{11}.12^{40}$ üslü sayılarını 10 tabanında hesaplamak kolay değildir (Bkz. "*The Power of 9 and Related Mathematical Tables From Babylon*" vb.).



Resim 1.4.1. ***Otto Neugebauer***'in ***A. Sachs*** ile birlikte 1 Ocak 1945'te çıkarttıkları "*Mathematical Cuneiform Texts (Matematiksel Çivi Yazıtları)*" adlı kitabın yayını civarında çekilmiş bir fotoğrafı. ***Neugebauer***, YBC 7289 no'lu tabletin çözümünü 42-43. sayfalarında verdi.

1.4. YBC 7289 No'lu Tabletin İlk Çözümü. ***Neugebauer***'in Bölüm 5'teki çözümünü Resim 1.1.2'deki tezimde tamamladım. Arşivimdeki araştırmama göre bu çözümü 4.7.2007, 22:58:35-26.12.2007, 20:45'te (ki EK1-LAST.doc adlı dosyanın son kayıt tarihi 5.7.2007, 05:36:44. Yani bunun bir 2007 Yaz Çalışması olduğu açıktır) yapmış ve bu çözümde ***John N. Crossley***'in "*The Emergence of Number*" adlı kitabının 122. ve 123. (I ve II) sayfalarını kullanmışım (ki bu dosyaların orijinalitesini sorgulamak için şuraya bakabilirsiniz). Tıpkı ***Romberg*** ve ***Ole Amble***'ın tezlerinde olduğu gibi. Çünkü anılan kitaptaki 4 parçayı 2010'da ve kitabı da "*Mathematical Cuneiform Texts (Matematiksel Çivi Yazıtları)*" linkinden 18.01.2018, 03:11:54'te bilgisayarıma indirdim. Burada aklınıza yanlış bir şey gelmesin: 2000'lerin başında kitapların çoğu basılı idi (ki dijital olanları da pahalı idi) ve dijitalleri ancak 2010'lardan sonra yayınlanmaya başlandı. Özetle 2007 yazından kalma aşağıdaki çalışmam ***Neugebauer***'in eksik kalan çözümünü nasıl tamamladığımı, dolayısıyla vizyonunun gerçekte ne olduğunu gösteriyor!

1.4.1. Tabletteki $\sqrt{2}$ İçin Verilen 1;24,51,10 Yaklaşıklığının Keşfi

Bulgu 1 (Babil Algoritmasının Kullanımı): Öncelikle $a = 2$ için $y_n = \frac{2}{x_n}$ yaklaşıklıklığını $0;30 \times y_n = \frac{y_n}{2} = \frac{\frac{2}{x_n}}{2} = 0;30 \times (2 \times x_n^{-1}) = (0;30 \times 2) \times x_n^{-1} = 1 \times x_n^{-1} = x_n^{-1}$ şeklinde yazarsak (ki burada Ters Sayılar Tablosu'na [1] göre 2 ile 0;30 sayıları birbirinin tersi olup çarpımları 1'dir) (1.1.1)'deki ilk iterasyonun,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} = 0;30 \times (x_n + 2 \times x_n^{-1}) = 0;30 \times x_n + \underbrace{(0;30 \times 2)}_{=1} \times x_n^{-1} = 0;30 \times x_n + x_n^{-1}$$

eşitliklerine göre

$$(1.4.1) \quad x_{n+1} = 0;30 \times x_n + x_n^{-1} \xrightarrow{n \to \infty} \sqrt{2}$$

şeklinde kullanılmış olmasıyla karşılaşırız ve bu giriş bulgusu tablette verilen 1;24,51,10 sayısına ulaşılmasında son derece önem arz eder. Demek ki bu hesabı yapan Eski Babilli matematikçi; önce x_n'nin yarısı alıyor yani 0;30 ile x_n'yi çarpıyor, sonra x_n'nin tersini buluyor (ki eğer x_n düzgün bir sayı ise tersi de sonludur ya da düzgün bir sayı değilse tersi de sonlu değildir; devirlidir) ve bunları toplayarak $\sqrt{2}$ için x_n ve y_n'den daha iyi bir yaklaşıklık olan x_{n+1}' i buluyor!

Şu halde ilkin (1.4.1)'e göre başlangıç değerini $x_0 = 1$ olarak alırsak (ki burada 1'in tersi kendisidir),

$$(1.4.2) \quad x_1 = 0;30 \times x_0 + {x_0}^{-1} = 0;30 \times 1 + 1^{-1} = 0;30 + 1 = 1;30$$

ilk yaklaşıklığını elde ederiz.

Diğer yandan (1.1.3)'e göre $a = 2 = 1^2 + 1$ olarak göz önüne alırsak $b = 1 = c$ için

$$(1.4.3) \quad \sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1} < 1 + \frac{1}{2 \times 1} = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 0;30 = 1;30$$

yine aynı yaklaşıklığı buluruz!

İkinci olarak, $x_1 = 1;30$ yaklaşıklığı düzgün bir sayı olup kendisi ve tersi sonlu sayılar olduklarından (1.4.1)'e göre,

$$(1.4.4) \quad x_2 = 0;30 \times x_1 + {x_1}^{-1} = 0;30 \times 1;30 + 1;30^{-1} = 0;45 + 0;40 = 1;25$$

yaklaşıklığı elde edilir. Bu yaklaşık değere Eski Babil metinlerinde sık sık rastlanmaktadır (Bkz. Tablo 1.3.2 ve Tablo 1.4.1).

Bulgu 2 (Eşlenik Alma İşlemi): Bu son yaklaşık değer Louvre Müzesi'ndeki Geç Babilonya Dönemi'ne ait AO 6484 no'lu tabletindeki bir problemin çözümünde geçer:

AO 6484, Problem 8		
Satır	**Çeviri**	**Yorum**
1	Bir eşkenarın en büyük böleni, 10 Kuš'tur.	Karenin köşegeni $k = 10$ Kuš'tur.
2	Eşkenarın uzunluğu nedir?	Karenin kenarı $a = ?$
3	10 × 42 30'a git, 7 5'tir, uzunluk.	$a = \frac{k}{\sqrt{2}} \cong 10 \times 0;42{,}30 = 7;5$
4	7 5 × 1 25'e git, 10 2 5'tir, en büyük bölen.	$k = a \times \sqrt{2} \cong 7;5 \times 1;25 = 10;2{,}5 \cong 10$

Tablo 1.4.1. AO 6484 no'lu tabletindeki Problem 8 metninin bir çevirisi ve yorumu. Bkz. ***Neugebauer*** (MKT 1 (1935), 98), ***Thureau-Dangin*** (1922: pl. LXI-LXII, S. 129, 131, TMB (1938), 158), ***Friberg*** ("*Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics*", AO 6484, Problem 8, S. 396). Burada ***Friberg***'in çevirisini kullandım!

Şimdi bulduğumuz 2. yaklaşıklıkla $\sqrt{2}$'nin tersi için

$$(1.4.5) \quad \sqrt{2} < x_2 = 1;25 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1;25}{2} = 0;30 \times 1;25 = 0;42{,}30$$

yaklaşıklığını elde ederiz ki bu, tablodaki 3. satırda geçen $\sqrt{2}$'nin tersi için verilen yaklaşıklık demektir ve buradan karenin bir kenar uzunluğu $10 \times 0;42{,}30 = 7;5$ Kuš olarak buluruz!

[1] ***Neugebauer***, "*Rechentabellen zur sumerisch-akkadischen Mathematik*" kitabının "*Reziprokentafel*" bölümünde 5-6. sayfalarında 1'den 59'a ve 7-104. sayfalarında da 6. mertebeye kadar düzgün sayıların terslerini verir. Fakat ***Gingerich***'in 1965'teki tablosunu 21 Kasım 2011'de bilgisayarla tamamlayan ***Denis Roegel*** tam anlamıyla kafayı sıyırdı. O, 1'den 60'a kadar 6. mertebedeki tüm düzgün sayıların terslerini verdi. Bkz. "*A reconstruction of Gingerich's table of regular sexagesimals and a cuneiform version of the table (1965)*".

Şu halde bu sonuçla Eski Babillilerin $2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ eşitliğini, dolayısıyla köklü sayılarda eşlenik alma işlemini bildikleri anlaşılmaktadır. Tabii ki burada $1;25 = \frac{17}{12}$'nin tersinin paydasındaki 17'nin düzgün bir sayı olmaması nedeniyle $\sqrt{2}$'nin tersine karşılık gelen 1;25'in tersinin sonlu olmaması rol oynar!

Üçüncü olarak, (1.4.1)'e göre $x_2 = 1;25$ yaklaşıklığını alırsak,

$$(1.4.6)\quad x_3 = 0;30 \times x_2 + {x_2}^{-1} = 0;30 \times 1;25 + 1;25^{-1} = 0;42,30 + 0;42,21 = 1;24,51$$

yaklaşıklığını elde ederiz. Burada toplamdaki 0;42,30 sayısı AO 6484 no'lu tablette $\sqrt{2}$'nin tersi için kullanılan aynı sayıdır ve 0;42,21 sayısı da aşağıdaki metotla 1;25'in tersinden elde edilmiştir.

Bulgu 3 (Bir Seksagesimal Sayının Tersi İçin Metot): Burada metoda geçmeden önce Eski Babilonya Dönemi'ne ait tabletlerden elde ettiğimiz bulgulara bir bakalım.

Düzgün Olmayan Bir Sayının Tersi. Bu konuda elimizde fazla tablet yok. Örneğin ***A. Sachs***'ın keşfettiği bir tablette 7, 11, 13, 14 ve 17'nin tersleri vardır. Bunlardan 7'nin tersi $0;8,34,16,59 < \frac{1}{7} < 0;8,34,18$ sınırları olarak verilmiştir (Bkz. "*Otto Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity (1951,1957,1969), 2nd ed./Princeton, NJ: Brown University Press; reprint ed./New York: Dover, 1969*", Sayfa 33-35). Burada $\frac{1}{7} = 0;\overline{8,34,17}$ iken ona yaklaşımda bulunulan alt ve üst sınırın aritmetik ortalaması 0;8,34,17,29,30 olup ilk 3 altmışlığı yani kesrin devir kısmını onaylar. Fakat diğer düzgün olmayan sayıların tersleri için verilen yaklaşıklıklar o kadar iyi değildir. Örneğin 13'ün tersi için 0;4,40 verilmiştir.

Bu son yaklaşıklığın şu şekilde hesaplanmış olduğu düşünülüyor (Bkz. "*Babylonian Mathematics*", "*Arithmetic*"):

$$\frac{1}{13} = \frac{7}{91} = 7.\frac{1}{91} \approx 7.\frac{1}{90} = 7.\frac{40}{3600} = \frac{280}{3600} = \frac{4}{60} + \frac{40}{3600} = 0;4,40.$$

Fakat ***Friberg***'e göre, MÖ 19 yy.'dan kalma MS 2317 no'lu tablette verilen bölme işlemine göre 13'ün tersi $\frac{1}{13} = 0;\overline{4,36,55,23}$'tür. Schøyen (Şöyen) koleksiyonundaki MS 2317 no'lu tablette yukarıdan aşağıya doğru 1,1,1,1, onun altında 13 ve onun altında da 4, 41, 37 sayıları veriliyor. İşte bu sayılara göre 13.4,41,37 = 1,1,1,1 eşitliği mevcut olup 4,41,37'yi 1,1,1,1'e bölerseniz $\frac{1}{13} = 0;\overline{4,36,55,23}$ şeklinde kesir kısmı 4 devirli olan sonuç çıkar (Bkz. "*A Remarkable Collection of Babylonian Mathematics Texts*", "*7. Old Babylonian Hand Tablets with Practical Mathematics/7.1. MS 2317: Division of a Funny Number by a Non-Regular Factor*", S. 155). Fakat **Friberg** bu çözümü linkteki kitapta yani 2007'de değil 2008'de verdi (Bkz. "*Notices of The AMS*", Cilt 55, Sayı 9, S. 1078. Daha fazla bilgi için "*YBC 7289 No'lu Tabletin 2. Çözümü*", S. 2, Dipnot 2'ye bakınız).

Oysa aşağıdaki tablet Eski Babilonya'da düzgün olmayan sayıların terslerinin alındığını açıkça gösterir!

YBC 10529. Bu Eski Babil metninin üst kısmı hariç tüm kenarları korunmuştur; orijinal tablet anormal derecede uzun olmadığı sürece üst kısımda metnin üçte birinden fazlası eksik değildir. Her satır igi (n) - gál-bi'yi (n^{-1}) takip eder. Bu ardışık sayıların terslerinin eşsiz karakteri, ortaya çıkan düzensiz sayıların tersleri için yaklaşık değerler vermesinde yatar. Yaklaşımların derecesi aşağıdaki tablo ile açıklanmaktadır:

n	n^{-1}		
	Hesaplandığı Yer	Metin	Gerçek Değeri
0;56		[⋯]	$1;4,\overline{17,8,34}$
0;57		[⋯]	$1;\overline{3,9,28,25,15,47,22,6,18,56,50,31,34,44,12,37,53,41}$
0;58	1;2,4,8	1;2,4,[⋯]	$1;\overline{2,4,8,16,33,6,12,24,49,39,18,37,14,28,57,55,51,43,26,53,47,35,10,20,41,22,45,31}$
0;59	1;1,1,1	1;1,1	$1;\overline{1}$
1	1	1	1
1;1	0;59,0;59,0;59	0;59,59	$0;\overline{59,0}$
1;2	0;58,3,52,15	0;58,3,52	$0;\overline{58,3,52,15,29,1,56,7,44,30}$
1;3	0;57,8,34,17	0;57,8,24	$0;57,\overline{8,34,17}$
1;4	0;56,15	0;56,15	$0;\overline{56,15}$
1;5	0;55,23,4,36,55	0;55,23,4,30	$0;\overline{55,23,4,36}$
1;6	0;54,32,43,38,11	0;54,32,43,30	$0;\overline{54,32,43,38,10}$
1;7	0;53,43,52,50	0;53,43,52	$0;\overline{53,43,52,50,8,57,18,48,21,29,33,8,3,34,55,31,20,35,49,15,13,25,58,12,32,14,19,42,5,22,23,17,0}$
1;8	0;52,56,28,14,7	0;52,56,53,14	$0;\overline{52,56,28,14,7,3,31,45}$
1;9	0;52,10,26,5	0;52,10,28	$0;\overline{52,10,26,5,13,2,36,31,18,15,39,7,49,33,54,46,57,23,28,41,44,20}$
1;10	0;51,25,42,51	0;51,25,42	$0;\overline{51,25,42}$
1;11	0;50,42,15,12	0;50,42,15	$0;\overline{50,42,15,12,40,33,48,10,8,27,2,32,6,45,38,1,41,24,30,25,21,7,36,20,16,54,5,4,13,31,16,3,22,49,0}$
1;12	0;50	0;50	$0;\overline{50}$
1;13	0;49,18,54,14	0;[4]9,18,55	$0;\overline{49,18,54,14,47,40,16,26,18,4,55,53,25,28,46,1,38,37,48,29,35,20,32,52,36,9,51,46,50,57,32,3,17,15,36,59,10,}$ $\overline{41,5,45,12,19,43,33,41,55,4,6,34,31,13,58,21,22,11,30,24,39,27,7,23,50,8,13,9,2,27,56,42,44,23,0}$
1;14	0;48,38,55,8	0;48,38,55	$0;\overline{48,38,55,8,6,29,11,21,4,51,53,30}$
1;15	0;48	0;48	$0;\overline{48}$
1;16	0;47,22,6,20	0;47,22,6	$0;\overline{47,22,6,18,56,50,31,34,44,12,37,53,41,3,9,28,25,15}$
1;17	0;46,45,11,41	0;46,45,11	$0;\overline{46,45,11,41,17,55,19,28,49,52,12,28,3,7,0}$
1;18	0;46,9,13,50,46	0;46,9,13,50	$0;\overline{46,9,13,50}$
1;19	0;45,34,10,37,58	0;45,34,9,54	$0;\overline{45,34,10,37,58,28,51,38,44,3,2,16,42,31,53,55,26,34,56,12,9,6,50,7,35,41,46,19,44,48,36,27,20,30,22,47,5,18,59,}$ $\overline{14,25,49,22,1,31,8,21,15,56,57,43,17,28,6,4,33,25,3,47,50,53,9,52,24,18,13,40,15,11,23,32,39,29,37,12,54,41,0}$
1;20	0;45	0;45	$0;\overline{45}$

Tablo 1.4.2. YBC 10529 tabletinin ön yüzünde 0;56-1;11 ve arka yüzünde 1;12-1;20 sayıların tersleri yer alır. Bunlar sol sütun başındaki sayılardan hemen sonra gelen yerde (Metin) ve onun biraz ötesinde hesaplandığı yerde (Hesaplandığı Yer) yazılıdırlar. Fakat bazı ters sayıların, özellikle son basamaklarında, gerek hesaplandıkları yerde gerekse hesaplandıkları yerden metne aktarılırken kopyalama hataları (ki bunları yukarıda kırmızı renkle vurguladım) olmuştur. Bunlarda 1;1 sayısının tersi hesaplanırken, hesaplandığı yerde "0" rakamı için bir boşluk mevcutken aktarıldığı metinde boşluğa yer verilmemiştir. Bkz. "*b. Reciprocal of Regular and Irregular Numbers*", YBC 10529, S. 16.

Bu tableti bu sabah (23.01.2023, 02:00) fark ettim ve resmen şok oldum. Çünkü 2007 yazında bu çözümü yaparken kaynak durumumu girişte bildirdim ama bu tablet ancak 18.01.2018, 03:11:54'te erişebildiğim anılan kitabın başında idi (Bkz. S. 16). Ayrıca uzman araştırmacılar, makale ve kitaplarında bu tabletten söz etmeyerek adeta saklamışlardı. Örneğin, ***Friberg*** ve ***Al Rawi***'nin 2017 çıkışlı *"Yeni Matematiksel Çivi Yazı Metinleri"* adlı kitabının 490. sayfasında bu tabletten sadece bir paragrafta söz edilir. Yani yukarıdaki çözümlü tablo bu makalenin tek kaynak olduğunu gösterir. Ama ***Neugebauer***'deki durum daha da ilginç. Eğer 5. Bölüm'deki çalışmasına bakarsanız şu sonucun çıktığını görürsünüz: *"Yağ var, un var ama helva yok!"*. Ama ben bu helvayı (***Neugebauer***'in helvası. Almanlar böyle şeylerden anlamaz) 2007 yazında yapmıştım (Bkz. Bölüm 4) ve şimdi kitabı da elime geçtiğine göre, bu helvanın ne kadar lezzetli olduğuna dair kanıtları sunuyorum!

İşte bu nedenle hemen tablete çalışmaya başladım ve ***Neugebauer***'in tablosunu yukarıda gördüğünüz gibi doğrulttum. Çünkü tablette 5. satırda "60" değil "1" yazıyordu ve bu sayılar bir seri halinde idi. O halde bu sayılar 1'den sonra ve tersleri de "0"dan sonra altmışlık ayıraç olan ";" sembolüyle ayrılmalıdır (ki ***Neugebauer*** sol sütun başındaki n sayılarını birer tam sayı olarak kabul ettiğinden hiç ";" kullanmamış ve n'nin basamaklarını "," ile ayırarak yazmıştır). Bir diğer bulgu şudur: 9, 10, 15, 17, 20, 23 ve 25. satırlardaki ters sayılar devirli olarak yazılmıştır. Bunlardan 10. satırdaki 1;5'in tersinin son basamağı hesaplandığı yerde 36 olarak doğru bir şekilde yazılırken metne "30" olarak yanlış aktarılmıştır. Bununla birlikte 4. satırdaki 0;59 ve 6. satırdaki 1;1'in tersleri devirli olarak yazılmamış olması, bir diğer dikkat çeken noktadır. Fakat en dikkat çekici nokta şudur: Kâtip 1;20'nin olduğu satırın altına bir çizgi çekmiş ve hesabı kapatmıştır. Fakat isteseydi 1;25'nin tersini de yazabilirdi ki, tablette bunun için rahat rahat yer vardı. Bu da 1;25'in, dolayısıyla 1;24,51 ve 1;24,51,10'un terslerinin Eski Babilonya'da alınabildiğini gösterir. Bunun için ***Neugebauer*** gibi bir tablet görmemize gerek yok (ki o, 5. Bölüm'de (1)'deki prosedürün $\sqrt{40^2+10^2}=\sqrt{28{,}20}$'nin değerini bulmak için başka bir tablette onaylanmış olması gerektiğini söylüyordu).

Şu halde bu bulgulara göre düzgün olmayan x_n ve y_n'nin tersleri için M.Ö. 1900-1800 tarihli YBC 6967 no'lu tabletindeki Problem 20'ye göre bir metot inşa edebiliriz (Bkz. Daha fazla bilgi için *"Jens Høyrup: Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought I, 1990"*, S. 46-50. Bu tableti de Resim 1.1.2'deki tezimde incelemiş ve yeni bir çözüm sunmuştum): Eğer (1.4.1)'deki $x_n =:$ a yaklaşıklığı düzgün bir sayı yani

$$(1.4.7)\quad a = a_i \cdots a_1 a_0; a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-j}$$

şeklinde sonlu ise $60^j a = a_i \cdots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-j} =: b$ sayısı bir tam sayı olur. Eğer a yaklaşıklığı düzgün bir sayı değil yani sonlu değilse, a'nın tersi

$$(1.4.8)\quad \frac{1}{a} = a^{-1} = 0; c_{-1} c_{-2} \cdots c_{-k} \cdots$$

şeklinde sonlu olmaz, devirli olur.

Şimdi metodun inşası için ilkin anılan tabletteki Problem 20'ye göre bir kenar uzunluğu $\frac{b-d_1}{2}$ birim olan kareye alanı 60^{j+1} birimkare olan kare eklenirse bir kenar uzunluğu $\frac{b+d_1}{2}$ birim olan kare elde edildiğinden,

$$(1.4.9)\quad \left(\frac{b-d_1}{2}\right)^2 + 60^{j+1} = \left(\frac{b+d_1}{2}\right)^2$$

özdeşliği geçerli olur. O halde buradan

$$(1.4.10)\quad 60^{j+1} = \left(\frac{b+d_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-d_1}{2}\right)^2 = bd_1 \Longrightarrow d_1 = \frac{60^{j+1}}{b}$$

oranı elde edilir ve c_{-1} rakamı $\frac{60^{j+1}}{b} = \frac{60}{a} = c_{-1}; c_{-2} \cdots c_{-k} \cdots$ işlemine karşılık bu oranın tam kısmı,

$$(1.4.11)\quad c_{-1} = [\![d_1]\!] = \left[\!\!\left[\frac{60^{j+1}}{b}\right]\!\!\right]$$

şeklinde alındıktan sonra e_1 kalanı da $\frac{e_1}{b} = \frac{60^{j+1} - bc_{-1}}{b} = 0; c_{-2} \cdots c_{-k} \cdots$ işlemine karşılık şöyle elde edilir:

$$(1.4.12)\quad e_1 = 60^{j+1} - bc_{-1}.$$

İkinci olarak, metot gereğince

$$(1.4.13)\quad \left(\frac{b-d_2}{2}\right)^2 + 60e_1 = \left(\frac{b+d_2}{2}\right)^2$$

özdeşliğini alırsak, buradan $\frac{60e_1}{b} = c_{-2}; c_{-3} \cdots c_{-k} \cdots$ işlemine karşılık c_{-2} için

$$(1.4.14)\quad c_{-2} = [\![d_2]\!] = \left[\!\!\left[\frac{60e_1}{b}\right]\!\!\right]$$

ve $\frac{e_2}{b} = \frac{60e_1 - bc_{-2}}{b} = 0; c_{-3} \cdots c_{-k} \cdots$ işlemine karşılık e_2 için de

$$(1.4.15)\quad e_2 = 60e_1 - bc_{-2}$$

eşitlikleri geçerli olur.

Sonuçta işleme aynı şekilde devam edildiği takdirde, yani genel olarak k. adımda

$$(1.4.16)\quad \left(\frac{b-d_k}{2}\right)^2 + 60e_{k-1} = \left(\frac{b+d_k}{2}\right)^2$$

özdeşliğinden c_{-k},

$$(1.4.17)\quad c_{-k} = [\![d_k]\!] = \left[\!\!\left[\frac{60e_{k-1}}{b}\right]\!\!\right]$$

ve e_k,

$$(1.4.18)\quad e_k = 60e_{k-1} - bc_{-k}$$

eşitliklerinden elde edilmiş olurlar.

Not 1.4.1. Eğer a sayısı düzgün sayılardan oluşmuş ise yani a'nın kendisi ve tersi 60 tabanında sonlu ise, sonlu bir k. adımda $c_{-k} = 0$ olacaktır. Aksi takdirde, bu işlem 10 tabanındaki gibi belli bir basamaktan sonra bir blok halinde devirli olarak sonsuza kadar tekrarlanır.

Şimdi bu metotla (1.4.6)'da verdiğim $x_2 = 1;25$ sayısının tersinin 2 altmışlığını nasıl bulduğumu göstereyim.

İlkin metoda göre $60 \times 1;25 = 1{,}25$ tam sayısını gözönüne alırsak, geometrik olarak bir kenar uzunluğu $\frac{1{,}25-d_1}{2}$ birim olan kareye alanı 60^2 birimkare olan karenin eklenmesiyle bir kenar uzunluğu $\frac{1{,}25+d_1}{2}$ birim olan kare elde edilir ve cebrik olarak bu işlemin karşılığından

$$(1.4.19)\quad \left(\frac{1{,}25-d_1}{2}\right)^2 + 60^2 = \left(\frac{1{,}25+d_1}{2}\right)^2$$

özdeşliği geçerli olur. O halde bu denklemden elde edilen

$$(1.4.20)\quad 60^2 = \left(\frac{1{,}25+d_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1{,}25-d_1}{2}\right)^2 = 1{,}25 \times d_1 \Longrightarrow d_1 = \frac{60^2}{1{,}25} = \frac{1{,}0{,}0}{1{,}25}$$

sayısının tam kısmı (ki bu sayı $60^2 = 1{,}0{,}0$'a en yakın tam sayı olan $42 \times 1{,}25 = 59{,}30$'un bulunmasından sonra 42 olarak elde ediliyor),

$$(1.4.21)\quad c_{-1} = [\![d_1]\!] = 42$$

dir. Buna göre e_1 kalanı

$$(1.4.22)\quad e_1 = 60^2 - 42 \times 1{,}25 = 1{,}0{,}0 - 59{,}30 = 30$$

olarak bulunur.

Not 1.4.2. Burada $42 \times 1{,}25$ çarpma işleminin sonucu Eski Babil Matematiği'ne göre, çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğinden şu şekilde bulunmaktaydı:

$$(1.4.23)\quad 42 \times 1{,}25 = 42 \times (1{,}0 + 25) = 42 \times 1{,}0 + 42 \times 25 = 42{,}0 + 17{,}30 = 59{,}30.$$

İkinci olarak, metot nedeniyle bu sefer

$$(1.4.24)\quad \left(\frac{1{,}25-d_2}{2}\right)^2 + 60 \times 30 = \left(\frac{1{,}25+d_2}{2}\right)^2$$

özdeşliğini alırsak, bu denklemin çözümünden de

$$(1.4.25)\quad 60 \times 30 = \left(\frac{1{,}25+d_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{1{,}25-d_2}{2}\right)^2 = 1{,}25 \times d_2 \Longrightarrow d_2 = \frac{60 \times 30}{1{,}25} = \frac{30{,}0}{1{,}25}$$

elde edilir ve burada 30,0'a en yakın tam sayı $21 \times 1{,}25 = 29{,}45$ olduğundan,

$$(1.4.26)\quad c_{-2} = [\![d_2]\!] = 21$$

bulunur.

Şu halde bu sonuçlara göre (1.4.6)'daki $x_2 = 1;25$ sayısının tersinin 2 altmışlığını veren sayı 0;42,21 (Tablo 1.4.2'ye göre 0;42,21,10,35) olarak elde edilir.

Dördüncü olarak, $x_3 = 1;24{,}51$ yaklaşıklığına göre,

$$(1.4.27)\quad x_4 = 0;30 \times x_3 + {x_3}^{-1} = 0;30 \times 1;24{,}51 + 1;24{,}51^{-1} = 0;42{,}25{,}30 + 0;42{,}25{,}40 = 1;24{,}51{,}10$$

yaklaşıklığı elde edilir ve burada da $x_3 = 1;24{,}51$ sayısının tersi sonlu olmadığından, tersinin 3 altmışlığı metoda göre şu şekilde bulunmaktadır:

Yine metoda göre ilkin bu sayıyı bir tam sayı yaparsak yani $60^2 \times 1;24{,}51 = 1{,}24{,}51$ tam sayısını gözönüne alırsak,

$$(1.4.28)\quad \left(\frac{1{,}24{,}51-d_1}{2}\right)^2 + 60^3 = \left(\frac{1{,}24{,}51+d_1}{2}\right)^2$$

denklemi ve bu denklemin çözümünden

$$(1.4.29)\quad 60^3 = \left(\frac{1{,}24{,}51+d_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1{,}24{,}51-d_1}{2}\right)^2 = 1{,}24{,}51 \times d_1 \Longrightarrow d_1 = \frac{60^3}{1{,}24{,}51} = \frac{1{,}0{,}0{,}0}{1{,}24{,}51}$$

sayısı elde edilir. Burada $60^3 = 1{,}0{,}0{,}0$ sayısına en yakın (tam) sayı $42 \times 1{,}24{,}51 = 59{,}23{,}42$ olduğundan,

$$(1.4.30)\quad c_{-1} = [\![d_1]\!] = 42$$

ve e_1 kalanı da,

$$(1.4.31)\quad e_1 = 60^3 - 42 \times 1{,}24{,}51 = 1{,}0{,}0{,}0 - 59{,}23{,}42 = 36{,}18$$

olarak bulunur.

Not 1.4.3. Buradaki $42 \times 1{,}24{,}51$ çarpma işleminin sonucu da aynı özellik gereğince,

$$(1.4.32)\quad 42 \times 1{,}24{,}51 = 42 \times (1{,}0{,}0 + 24{,}0 + 51) = 42 \times 1{,}0{,}0 + 42 \times 24{,}0 + 42 \times 51 = 42{,}0{,}0 + 16{,}48{,}0 + 35{,}42 = 59{,}23{,}42$$

şeklinde bulunmaktadır.

İkinci olarak, metot nedeniyle,

$$(1.4.33)\quad \left(\frac{1{,}24{,}51 - d_2}{2}\right)^2 + 60 \times 36{,}18 = \left(\frac{1{,}24{,}51 + d_2}{2}\right)^2$$

denklemi ve bu denklemin çözümünden

$$(1.4.34)\quad 60 \times 36{,}18 = \left(\frac{1{,}24{,}51 + d_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{1{,}24{,}51 - d_2}{2}\right)^2 = 1{,}24{,}51 \times d_2 \Longrightarrow d_2 = \frac{60 \times 36{,}18}{1{,}24{,}51} = \frac{36{,}18{,}0}{1{,}24{,}51}$$

sayısı elde edilir. Burada 36,18,0'a en yakın tam sayı $25 \times 1{,}24{,}51 = 35{,}21{,}15$ olduğundan,

$$(1.4.35)\quad c_{-2} = [\![d_2]\!] = 25$$

ve e_2 kalanı ise,

$$(1.4.36)\quad e_2 = 36{,}18{,}0 - 25 \times 1{,}24{,}51 = 36{,}18{,}0 - 35{,}21{,}15 = 56{,}45$$

olarak bulunur.

Son olarak, yine metot gereğince,

$$(1.4.37)\quad \left(\frac{1{,}24{,}51 - d_3}{2}\right)^2 + 60 \times 56{,}45 = \left(\frac{1{,}24{,}51 + d_3}{2}\right)^2$$

denklemi ve bu denklemin çözümünden de

$$(1.4.38)\quad 60 \times 56{,}45 = \left(\frac{1{,}24{,}51 + d_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1{,}24{,}51 - d_3}{2}\right)^2 = 1{,}24{,}51 \times d_3 \Longrightarrow d_3 = \frac{60 \times 56{,}45}{1{,}24{,}51} = \frac{56{,}45{,}0}{1{,}24{,}51}$$

sayısı elde edilir ve burada 56,45,0'a en yakın tam sayı $40 \times 1{,}24{,}51 = 56{,}34{,}0$ olduğundan,

$$(1.4.39)\quad c_{-3} = [\![d_3]\!] = 40$$

tam değeri bulunur.

Şu halde (1.4.27)'deki $x_3 = 1;24{,}51$ sayısının tersinin 3 altmışlığını veren sayı 0;42,25,40 (Tablo 1.4.2'ye göre 0;42,25,40,7) olarak elde edilir.

Not 1.4.4. Burada yine aynı özellik gereğince $25 \times 1{,}24{,}51 = 35{,}21{,}15$ ve $40 \times 1{,}24{,}51 = 56{,}34{,}0$ sonucuna ulaşılmaktadır.

Beşinci olarak, $x_4 = 1;24{,}51{,}10$ yaklaşıklığına göre (ki tersi aynı metotla bir öncekindeki gibi 0;42,25,35 olarak elde edilmektedir),

$$(1.4.40)\quad x_5 = 0;30 \times x_4 + {x_4}^{-1} = 0;30 \times 1;24{,}51{,}10 + 1;24{,}51{,}10^{-1} = 0;42{,}25{,}35 + 0;42{,}25{,}35 = 1;24{,}51{,}10$$

yaklaşıklığı elde edilir ve burada

$$(1.4.41)\quad x_4 = y_4$$

eşitliği gerçekleştiğinden yani x_3 ve y_3'ün aritmetik ortalaması ile harmonik ortalaması birbirine eşit olduklarından,

$$(1.4.42)\quad \frac{x_4}{2} = 0;30 \times x_4 = 0;30 \times y_4 = x_4^{-1} = \frac{1}{x_4} \Longrightarrow x_4 = \sqrt{2}$$

sonucu çıkar. Ayrıca burada x_4 ve y_4'ün yarısı olan 0;42,25,35 sayısının tabletteki karenin bir köşegeni üzerine $\sqrt{2}$ için yazılan 1;24,51,10 sayısının hemen altına köşegen uzunluğu olarak yazılmış olması bir diğer dikkat çekici noktadır.

Son olarak, eğer (1.4.40)'tan itibaren hesaba kaldığımız yerden devam etseydik,

$$(1.4.43)\quad 1;24{,}51{,}10 = x_4 = y_4 = x_5 = y_5 = \cdots = \sqrt{2}$$

eşitliklerine ulaşmış olurduk ve şüphesiz bu hesabı yapan Eski Babilli matematikçi de bu sonucu gördü. Ama daha sonra bu hesaptaki adım sayısı azaltmak için ilkin 3. adımdaki $x_2^{-1} = 1;25^{-1} = 0;42{,}21,\cdots$ sayısının 2 altmışlığından daha fazlasının alınmasının gerektiğini görmesine rağmen, her ne kadar Babil algoritması kuadratik (2. mertebeden) yakınsaklık hızına sahip olsa da, bundan önceki $x_0 = 1$, $x_1 = 1;30$ ve $x_2 = 1;25$ yaklaşıklıklarından hareketle kaç basamak alınmasının gerektiğini görme şansı yoktu. Çünkü n. adımda bulunan x_n yaklaşıklığının kesir kısmında $\sqrt{2}$ için doğru bulunan basamak sayısına b_n dersek, Babil algoritmasının aşağıdaki tabloda kuadratik bir yaklaşım sergilediği görülür; fakat bu durum 3. adıma kadar görülmüyor:

$\sqrt{2}$'ye x_n (y_n) İle Yapılan Yaklaşımlardaki b_n Doğru Basamak Sayısı

n	b_n	n	b_n
0	0	9	$219 = 2 \times 109 + 1$
1	0	10	$440 = 2 \times 219 + 2$
2	0	11	$880 = 2 \times 440$
3	3	12	$1762 = 2 \times 880 + 2$
4	$6 = 2 \times 3$	13	$3525 = 2 \times 1762 + 1$
5	$13 = 2 \times 6 + 1$	14	$7052 = 2 \times 3525 + 2$
6	$27 = 2 \times 13 + 1$	15	$14106 = 2 \times 7052 + 2$
7	$54 = 2 \times 27$	16	$28214 = 2 \times 14106 + 2$
8	$109 = 2 \times 54 + 1$	⋮	⋮

Tablo 1.4.3. $\sqrt{2}$ için (1.1.1)'deki ilk iterasyon ya da (1.4.1)'deki Babil algoritmasına göre bulunan noktalı virgülden (altmışlık ayıraç) sonraki doğru basamak sayıları. Bu tablonun 3. adımına kadar yaklaşıklıkların kuadratik (2. mertebe) olduğu gözlemlenememesine rağmen, tablete 1;24,41,10 yaklaşıklığını yazarak 3 altmışlığı doğru bulan Eski Babilli kâtip, hedefi tam 12'den vuruyor!

Şimdi bu tablodan da görüleceği gibi x_2'nin tersinin kaç basamağının alınmasının gerektiği, $\sqrt{2}$ için $x_4 = 1;24{,}51{,}10$ yaklaşıklığının bulunmasından ve bu yaklaşıklığın da $x_5 = 1;24{,}51{,}10$ ile onaylatılmasından sonra anlaşılmaktadır. Aksi takdirde, bu hesapta sistemsiz bir şekilde yani ikinci ve diğer yaklaşıklıkların terslerinin 2 altmışlığından daha fazlasının alınması durumunda hesaplar hem buradakinden çok daha güç olacaktı hem de sistemsizlik nedeniyle karmakarışık olacaktı. Tabii ki bu şekildeki bir hesap ister istemez kalburüstü bir matematikçi olduğu anlaşılan Eski Babilli kâtibi hataya sevk edecekti. Bu nedenle, bu hesabı yapan Eski Babilli matematikçinin tablodaki 3. yaklaşıkta yani 1;24,51,10 sayısında karar kıldığı anlaşılmaktadır. Çünkü bir sonraki yaklaşıklık için hem hesaplar çok ağır olacaktı hem de 1;24,51,10,7,46,6 sayısını Babil rakamlarıyla yazabilmek için büyükçe bir tablet gerekecekti. Burada tabletin çapının yaklaşık olarak 8 CM olduğuna dikkat ediniz!

1.4.2. Değerlendirme

Eski Babilonya Dönemi'ne (M.Ö. 2000-1600) ait ve AO 6484 no'lu tabletin sonraki versiyonu olan YBC 7289 no'lu tablette şu bulgular mevcuttur:

1. Bu tabletteki karenin çiziminde kullanılan cetvelin (ya da cetvel görevi gören bir çubuğun), Erken Hanedanlık ve Sargon dönemlerinde de kullanılan, Eski Babil Dönemi'ndeki bir kübite göre birimlendirilmiştir. Çünkü bu dönemlerde 1 Kübit 30 Parmak'a bölünürken sonraki dönemlerde kübitlerdeki standartlaştırma işlemi nedeniyle 24 Parmak'a bölündü. Buna göre cetvelin birimlendirilmesinde kullanın kübitin uzunluğu 30 Parmak (1 Parmak 17 MM genişliğinde) olup, karenin bir kenar uzunluğu da 6 Parmak'ın yarısı yani 3 Parmak'tır.

Bu bulgu tabletin tarihlendirmesinde bir sorun teşkil edebilir çünkü tabletteki karenin çizimi Sümer döneminden kalma bir kübitle yapılmıştır. Bununla birlikte tabletin nerede bulunduğu bilinmemektedir ama Plimpton 322'de olduğu gibi Mezopotamya'nın güneyinden geldiği sanılmaktadır. Tablet 1912'lerde, birçok Babil tableti toplayan ***J.P. Morgan***'ın bir ajanı tarafından satın alındı ve vasiyet üzerine Yale Babilonya Koleksiyonu'na konuldu (ki daha sonra Yale'de Kültürel Mirasın Korunması Enstitüsü, tabletin 3 boyutlu dijital modelini üretti). Hatırlanacağı üzere Plimpton 322 tableti Larsa'da bir grup tabletle Resim 1.3.8'de tüfekle poz veren ***Edgar J. Banks*** tarafından kaçak bir kazıda keşfedildikten sonra The New York yayıncısı ve koleksiyoncu ***George Arthur Plimpton*** (yandaki resimde 1870'lerde genç bir adam olarak gözükür) tarafından 1922'de ***Edgar J. Banks***'ten 10 $'a (şimdi 305.98 $) satın alınmıştı!

Bu sonuçlara göre YBC 7289 tableti büyük bir ihtimalle Larsa ya da ona bağlı bir şehirden (Uruk, İsin, Nippur, Lagaş) gelme olup Larsa kralı ***I. Rim Sin***'in döneminde yazılmıştır. Standart sayıların yazımına göre YBC 7289 tableti Si.427'ye benzer ama çivi yönleri farklıyken Plimpton 322'deki çivi yönleriyle mükemmel şekilde eşleşir (Bkz. "*Genelleştirilmiş Piobert-Parmentier Metodu*"). Fark sadece tabletlerin yapımında kullanılan kildedir. YBC 7289 tabletindeki kil Si.427'deki gibi daha yumuşak ve sayılar da az olduğu için, kâtip sayıların yazılışındaki standartı yakalayabilmek adına yeteneğini daha iyi göstermek istemiş görünür (Bkz. Sayıların analizi için "*Analysis of YBC 7289*"). Oysa aynı yeteneği Si.427'de görebilmek mümkün değil!

***Hammurabi, Rim Sin*'i Ezip Geçti!**

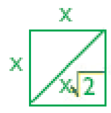
Bazı şehir-devletleri arasında Dicle ve Fırat nehirlerinin kontrolü için rekabetçi jeopolitik bir sorun ortaya çıktı. Çoğu kez, devletler arasında, düşman devletleri savuşturmak ya da onlara baskın düzenlemek için kazanç ittifakları ortaya çıkardı. M.Ö. 1765'te bu şehir- devletlerden biri, Elam, gizlice Fırat deltasındaki bir imparatorluk olan Larsa ve Babil arasındaki savaşı başlatacak bir komplo kurdu. Komplo meydana çıktığında ***Hammurabi*** ve Larsa'nın lideri ***Rim-Sin*** bir ittifak kurarak Elam'ı çiğnedi. Sonra ***Hammurabi*** hızlı davrandı (ki askerlerine **"Kara başlar"** diyordu çünkü askerlerin saçları simsiyahtı). ***Rim-Sin***'le olan ittifakı bozdu ve hızlıca Larsa şehirleri Uruk ve İsin'i alarak güneye ilerledi. Bunun üstüne, doğuya doğruldu ve daha sonrasında düşen Larsa'yı çevreleyen Nippur'la Lagaş'ı aldı.

Mezopotamya fethini tamamlamak için ***Hammurabi*** kuzey ile doğuya döndü. İlk önce gözünü Fırat nehri üzerindeki önemli ve zengin ticaret merkezi olan Mari'ye dikti. Mari'nin kralı ***Zimri-Lim***'le ittifakını bozdu, sonra M.Ö. 1761'de şehre yürüdü. ***Hammurabi***'nin neden ittifakı bozduğu kesin değil. Bazı bilim insanları su hakları ya da ***Hammurabi***'nin Mari'nin büyük ticari yolların kesişme noktasındaki stratejik konumunu ele geçirmek istemesi üzerine bir çatışma olduğuna inanıyor. Kesin olan, Babil İmparatorluğu'nun büyük zenginlik ve tabii ki de Fırat nehrinin kontrolünü kazandığıdır.

Çoğu durumda, bir şehrin fethinden sonra, Babil onu tamir ederek imparatorluğa katıyordu. Bilim insanları ***Hammurabi***'nin neden Mari'nin yıkılmasını emrettiğini tartışıyor. Ama bu, basitçe; şehrin zenginliği Babil'e rakipti. ***Hammurabi*** Babil'in bütün Mezopotamya'daki en zengin şehir olmasını istediğinden olabilir. Mari'nin düşüşünden hemen sonra, ***Hammurabi***, ikincinin sularına set çekip şehri aç bırakarak, Aşur ve Eşnunna'yı fethetti. M.Ö. 1755'e kadar ***Hammurabi*** antik Mezopotamya'nın çoğunu kontrol ediyordu (Bkz. Daha fazla bilgi için "*Krallar: Babil'den Bağdat'a*". Keşke ***Saddam Hüseyin*** bu çalışmaları görseydi. Bkz. İTHAF, S. 8-9).

2. Bir kenar uzunluğu 6 Parmak'ın yarısı olan karenin köşegen uzunluğu kaç El'dir?

Bu problemin çözümü AO 6484 tabletindekinin tersi olup tablette $\sqrt{2}$ için karenin bir köşegeni üzerine yazılmış 1;24,51,10 yaklaşıklığını alırsak, bir kenar uzunluğu $x = \frac{1}{2} = 0;30$ birim olan



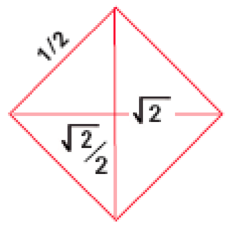
karesinin köşegen uzunluğunu

$$(1.4.44)\quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > x_4 = 1;24,51,10 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1;24,51,10}{2} = 0;30 \times 1;24,51,10 = 0;42,25,35$$

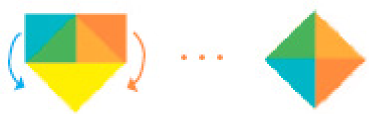
yaklaşıklığından $6 \times 0;42,25,35 = 4;14,33,30$ Parmak olarak elde ederiz!

3. Eski Babil Dönemine ait Standart Ters Sayılar Tablosu'na bakıldığında 2'den 81'e kadar düzgün sayılar ve bunlara karşılık gelen ters sayıların yazıldıkları görülür (Bkz. MS 3874). Diğer sayıların tersleri ise basit cebrik ve geometrik tekniklerden tutun da Bulgu 3'teki gibi karmaşık metotlardan da bulunabilmekteydi. Örneğin bu sayıların içersinde "*$\sqrt{2}$'nin tersi nedir?*" sorusunun yanıtı, AO 6484 tabletinde (1.4.5)'e göre 0;42,30 iken YBC 7289 tabletinde (1.4.44)'e göre daha hassas bir şekilde 0;42,25,35'dir. Buradan YBC 7289'da düzgün olmayan sayılar için Ters Sayılar Tablolarında yer almayan $\sqrt{2}$'nin tersinin yazıldığı ve hassas hesaplarda kullanıldığı sonucu çıkar.

Diğer yandan tabletteki kareyi ve ilgili yerlere yazılan sayıları günümüzdeki gibi gösterirsek,



şekli bize, tablette ele alınan asıl problemin $\sqrt{2}$'nin tersi olduğunu açık bir şekilde gösterir. Tabii ki bu geometrik gösterim, Pisagor Teoremi'nin özel bir hali olan "Kare içindeki kare (bir karenin orta noktalarından oluşan kare) şekli"ndeki geometrik ispatın sonucunda elde edilmekteydi:



Resim 1.4.2. Eski Babil Dönemi'ne ait BM 15285 no'lu tabletindeki kareyle ilgili çeşitli geometrik çizimler. Bu çizimlere göre de Eski Babillilerin bir karenin orta noktalarından oluşan kareyi bildikleri gibi, bu geometrik dönüşümle elde edilen geometrik seriyi de bildikleri anlaşılmaktadır.

Söz konusu bu geometrik dönüşüm yalnızca matematikte değil, mimari yapılarda da kullanılmıştır. Bunu gösteren tabletler ve harabe yapılar vardır. Örneğin yandaki tablette bir karenin orta noktalarından oluşan ve iç içe geçmiş 2 kare ve 3 kareden meydana gelen geometrik çizimler vardır. Ayrıca bu şeklin genel durumu için yani Eski Babillilerin Pisagor bağıntısını genel halde bildiklerini gösteren tablet için Eski Babil Dönemi'ne ait BM 13901 no'lu tabletine de bakabilirsiniz (Bkz. "*Jöran Friberg: Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics*", Copyright © 2007 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Sayfa. 40, Şekil 1.12.3).

Not 1.4.5. 2. ve 3. maddelerdeki şekiller ***Bill Casselman***'ın eşi ***Anne Casselman***'ın "*Jargon*"un 12. sayfasındaki "*Maths by Anne Casselman*" adlı makalesinden alınmadır. Bunlardan 3. maddedeki son şekil ***Bill Casselman***'ın "*Mathematical commentary on YBC 7289*" sayfasındaki şekille aynıdır. Arkeoloji dünyasında nadiren de olsa bu tür örnekler mevcuttur. Hemen aklıma ilk gelenler ***Piazzi Smyth-Jessica Smyth***, ***Flinders Petrie-Hilda Petrie*** çiftleri.

4. 1945'te çok yönlü bir bilim adamı olan ***Otto Neugebauer*** ve yardımcısı Asurolog ***Prof. Abraham Joseph Sachs*** tarafından "*Matematiksel Çivi Yazıtları (Mathematical Cuneiform Texts), New Heaven, Conn., 1945*" adlı kitabın 42. ve 43. sayfalarında YBC 7289 tabletinin muhtemel bir çözümü verildi ve o günden bugüne 63 yıldır hem onların tezi hem de birçok karşıt tez yayımlandı. Onların tezini geliştirmek, daha doğrusu anlamak isteyenler oldu ama hep azınlıkta kaldılar ve ne yazık ki bu gayretler ***Neugebauer***'in çözümüne yeni bir bilgi katmadı!

Peki ***Neugebauer***'in çözümünde ne vardı? Örneğin, bu çözümde geçen Babil Algoritması nereden geliyordu?

Şüphesiz, ***Neugebauer*** YBC 7289 tabletinde geçen Babil algoritmasıyla ilgili birçok tableti inceledikten sonra edindiği engin tecrübesi sonunda buldu.

Gerçekten Babil algoritmasının orijini için $\sqrt{a} < x_n$ eşitsizliği gözönüne alınırsa cebrik olarak,

$$(1.4.45)\quad \sqrt{a} < x_n \Rightarrow 0 < \left(x_n - \sqrt{a}\right)^2 = {x_n}^2 - 2x_n\sqrt{a} + a \Rightarrow \sqrt{a} < \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} = x_{n+1}$$

ve geometrik olarak ($\sqrt{a}$'nın alt ve üst sınırlarının aritmetik ortalamasıyla),

$$(1.4.46)\quad \sqrt{a} < x_n \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a}} < x_n \Rightarrow \frac{a}{x_n} < \sqrt{a} \Rightarrow \frac{a}{x_n} < \sqrt{a} < x_n \Rightarrow \sqrt{a} < x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} < x_n$$

şeklinde (1.1.1)'deki Babil algoritması elde edilir. Buna ilişkin kare açılımını gösteren Eski Babil tabletleri vardır. Ayrıca Eski Babil tabletlerinde küp açılımının ve zayıf da olsa küpkök yaklaşımlarının verilmesi bunu kesinlikle doğrulamaktadır.

Resim 1.4.3. *Otto E. Neugebauer* (1938), 1932'de şöyle der: *"Yunan olanı Yunan-öncesine her bağlama girişimi çok yoğun bir karşı koymayla karşılaşıyor. Alışılageldik Yunan imajını değiştirme gerekliliği ihtimali düşüncesi, **Winkelmann**'ın döneminden beri mevcut imajın geçirdiği bütün değişmelere rağmen her defasında arzu edilmez görünmüştür. Halbuki o zamandan bu güne geçen 2500 yıllık 'tarihe' bir 2500 yılın daha eklenmesi gerektiği gibi çok basit bir olgu vardır, ve buna göre Yunanların artık başta değil, ortada bulunmaları gerekiyor.", İslamda Bilim ve Teknik*, Cilt I, S. 14.

Fakat bütün bu bilgiler içinde en az bu çalışma kadar önemli olan soru şudur: ***Neugebauer***'in gerçekte kim olduğu ve bu çalışmaları ne için yaptığıdır? Örneğin ***Neugebauer*** için bir kaynakta,

*"Gerçekte asrımız 1925'lerden bu yana Avusturyalı âlim **Otto Neugebauer** tarafından gösterilen ve Greklerin ilimler tarihindeki yerinin tâ başlarda olmayıp, fakat onların kendilerinden önce yaşamış başka nesillerin bilgilerine mirasçı oldukları düşüncesini benimsetmeye yönelen önemli bir çabaya şahit olmuştur. Bu ilim adamı şikâyet ederek, şöyle demek zorunda kalmıştır: Greklerin başarılarını, kendilerinden önceki milletlere bağlama yönündeki her türlü teşebbüs şiddetli bir muhalefet ile karşılaşmaktadır. Kadim Yunan çağından evvel 2500 senenin geçtiğini ve bu süre içinde onları ilimler tarihinin başına değil de ortasına koyacak kadar çeşitli ilmî başarıların bulunduğunu ispat eden bütün araştırmalara rağmen, Greklerin ilimler tarihindeki alışılmış konumunun şeklini tadîl etmeye hiç kimse yanaşmamaktadır.", Kitab-ı mehricân efram Huneyn, Bağdad, 1974. Sayfa. 447 (**Prof. Dr. Fuat SEZGİN**: Müslümanların İlimler Tarihindeki Yeri, S. 138-139).*

ifadeleri geçerken bir diğer kaynakta ilkine tamamıyla zıt olan şu ifadeler geçer:

*"**Thureau-Dangin**, **Taha Baqir**, **Bruins**, **Van der Waerden** gibi, zamanımızın bazı yazarları Mezopotamya ilmini olağanüstü önemde saymaktadır. Oysa Antik Çağ yazarlarından **Ödemos**'a dayanan Orta Çağ yazarı **Proklos**, **Thales**'in, bilgilerini, Mısır'dan aldığına inanmış ve matematik tarihini **Thales** ile başlatmıştır. **Neugebauer** de **Thales**'i ve **Sokrates** öncesi matematikçileri atlayıp, ilmî geometriyi **Ödoksos** ve **Theaetetos** ile başlatmıştır. **Plutarkhos, Vitruvius** ve yine **Proklos** ise **'Pithagoras Teoremi'**'ni ve **'Alan Tatbiki'** metotlarını **Pithagoras**'ın kendi şahsî keşfi sanmışlardır.*

*Ayrıca, **Proklos**, **Pithagorasçıları**n düzgün çok yüzlüler hakkındaki bilgilerin de **Pithagoras**'a atfedildiğini söyler. Pitagorcuların düzgün çok yüzlülerden küp, tetrahedron ve dodekahedron'u bildikleri **Öklit**'in ifadesinden de anlaşılmaktadır. Zamanımızın **Neugebauer** gibi bazı yazarları ise Eski Yunanlıların Mısır ve Mezopotamya'dan sağlamış oldukları yararların teorik yönden önemli olduğunu pek kabul etmek istememektedirler.", Mısır ve Mezopotamyalılarda Matematik, Astronomi ve Tıp, Bölüm 6: Mezopotamyalılarda Geometri, S. 249-322.*

Özetle ***Neugebauer*** hakkında diğer kaynaklara bakıldığında, bunlara paralel olan görüşlerin çoğunun ***Neugebauer***'in aleyhinde olduğu görülür. Çünkü yardımcısı ***Sachs*** ile birlikte onun ve diğerlerinin çalışmalarıyla yeni bir çığırın açıldığı yıllarda Bilim Tarihi radikal değişikliklere sahne olurken yukarıdaki tabletlerden anlaşılacağı üzere Matematik Tarihi'nin çatısını çökerten gelişmeler yaşanıyordu. Bu yüzden onlara **"Eski Babilli (Old Babylonian)"** anlamına gelen ama argo dilinde çok çirkin anlamı olan **"OB"** yakıştırmasını yaptılar ve çalışmalarını insafsızca eleştirdiler. Örneğin İngiliz araştırmacı ***Eleanor Robson*** makalelerinde bu kısaltmayı gereksiz şekilde çokça kullanır!

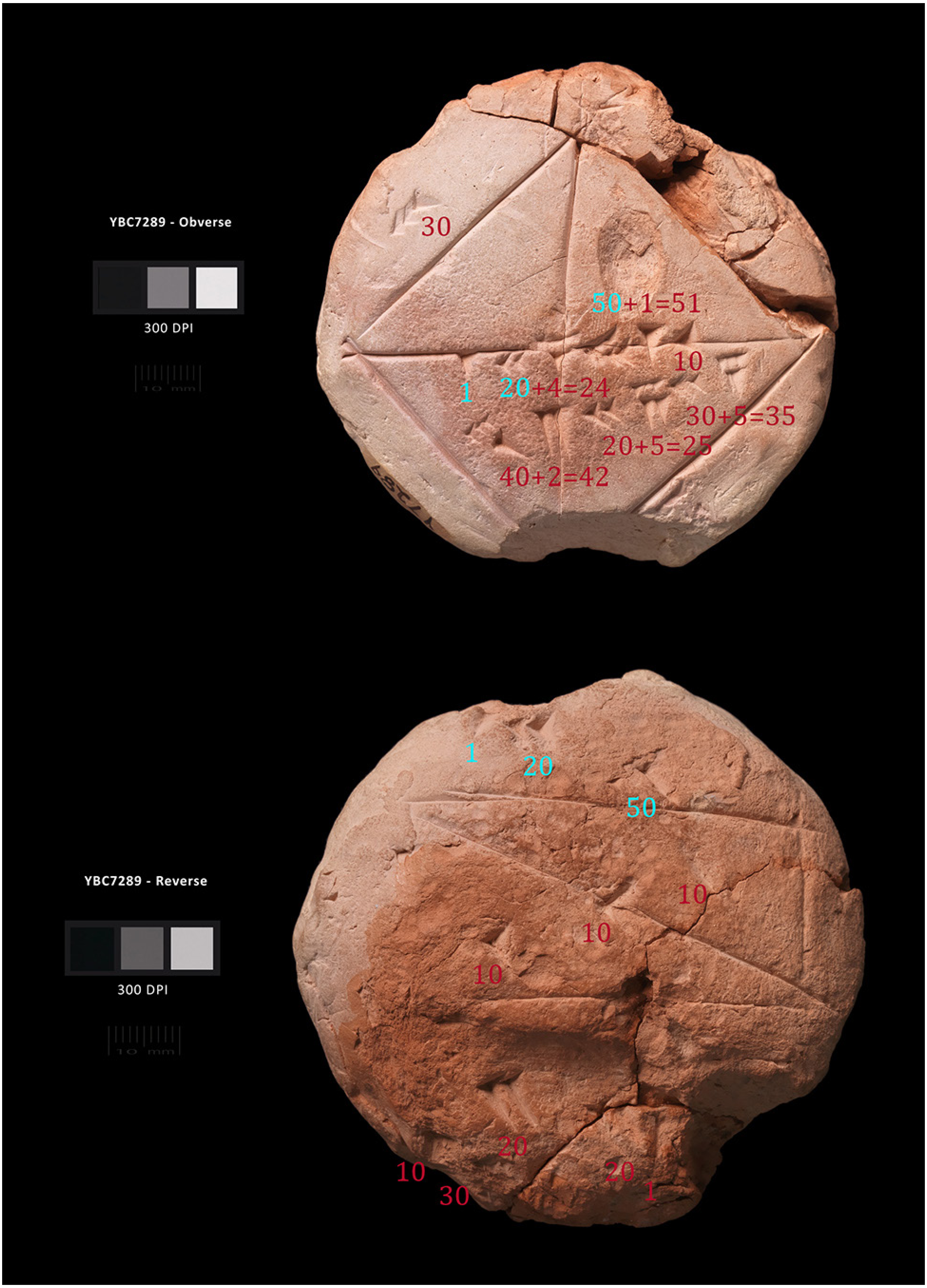
5. Sadede gelecek olursak, artık günümüzde ***"Heron'un Algoritması"***, ***"Newton'un Metodu"***, ***"Newton'un İterasyonu"*** ve ***"Newton-Raphson İterasyonu"*** gibi değişik isimlerle anılan algoritmanın ***"Babil Algoritması"*** olduğu ve bu isimler parantez içinde bir 2. isimle anılarak yavaş yavaş terkedilmeye başlanmıştır. Örneğin, 20.04.2006, 05:00'da YBC 7289 no'lu tableti çözüp, *"Mathquake: Hesabın Destanındaki İlk Gerçek Algoritma: YBC 7289 No'lu Tableti'ndeki Babil Algoritması, 20.04.2006, 17:00"* adıyla yayımladığım çalışmada bu algoritmanın aynen ***"Babil Algoritması"*** olduğu ortaya çıkmış ve aynı yılda basılan *"Latif MUTLU: Uygarlığın Durak Yerleri, ©2006 GOA Basım Yayın ve Tanıtım Hiz. San. Tic. Ltd. Şti., Uygarlığın İkinci Durak Yeri: İskenderiye Kütüphanesi, Bilimin Öncüleri, Heron, Sayfa: 169"* adlı kitapta ***Heron***'un **"Metrica"**sındaki bu algoritma için şu kesin sonuca varılmıştır: *"Aynı kitapta, bir sayının karekökünün yaklaşık olarak bulunması için bir yöntem de yer almaktadır. Babillilerden İskenderiye'ye geçen bu yöntem günümüz bilgisayarlarında da yaygın olarak kullanılmaktadır."*

6. Tabletin yapım ve kullanım amacı neydi?

Bu konuda çeşitli kaynaklarda yalan yanlış bilgiler verilmektedir. Bundan kasıt, Batılı kaynaklar ve onlardan yapılan çevirilerle tabletteki çalışmayı küçümsemektir. Örneğin, bunu Wikipedi'de İngilizce olarak sunulan "YBC 7289" başlıklı sayfanın Türkçe çevirisi "YBC 7289"da görebilirsiniz. Her 2 sayfanın "Yorumlama" bölümünde şunlar yazılıdır: *"YBC 7289 sık sık (fotoğraftaki gibi) çapraz olarak kare şeklinde tasvir edilse de, kareler çizmek için standart Babil gelenekleri, numaralı taraf üstte olacak şekilde karenin kenarlarını dikey ve yatay hale getirmiştir [4]. Tabletin küçük yuvarlak şekli ve üzerindeki büyük yazı, onu avucunun içinde tutan bir öğrenci tarafından tipik olarak kaba işler için kullanılan türden bir 'el tableti' olduğunu gösteriyor [1][2]. Öğrenci büyük olasılıkla başka bir tabletten 2'nin karekökünün altmışlık değerini kopyalamış olabilir, ancak bu değeri hesaplamak için yinelemeli bir prosedür başka bir Babil tableti olan BM 96957 + VAT 6598'de bulunabilir"*

Bu bilgiler doğru değil çünkü tabletin bir kopya olduğu doğrudur ama bunu bir öğrencinin yapması mümkün değil. Gerek tabletteki karenin çizimi gerekse tabletteki sayılar buna izin vermez. İlkin tabletteki kare düzgün bir çubukla (kübit çubuğu) çizilirken, içindeki köşegenler elle çizilmiştir. Ayrıca tabletin arkasındaki dikdörtgen ve bir köşegeni de elle çizilmiştir. İkinci olarak tabletin ön yüzünde bir kenarı 0;30 Birim, köşegen üzerinde $\sqrt{2} \approx 1;24,51,10$ ve onun altında bu köşegenin uzunluğu 0;42,25,35 Birim olarak verilmiştir (Bkz. *1.3.2.3.2. Tabletteki Sayılar ve Metroloji*). Tabletin arka yüzünde ise dikdörtgenle ilgili bir deneme problemine ilişkin sayılar ve kâtibin ön yüzdeki sayıları yazmadan önce bazı denemelerde bulunduğu görülür. Örneğin, kâtip ön yüze 1;24,51,10 yazmadan önce arka yüzde 1;20,50 sayısını yazarak bir denemede bulunmuştur.

Tabletin kopyalandığına ilişkin ön ve arka yüzdeki sayılar ise şöyledir:



Resim 1.4.4. YBC 7289 tabletinin ön ve arka yüzündeki sayılar. Arka yüzdeki "1;20,50" rakamları ön yüzdeki köşegen üzerindeki "1;24,51,10" sayısının yazımı için bir deneme gibi görünür.

Peki bu tabletin bir kopya olduğunu nereden anlıyoruz? Eğer bu tablet başka bir tabletin kopyası olmasaydı, o zaman YBC 10529 tabletindeki gibi 1;24,51,10 ve 0;42,25,35 sayılarının nasıl hesaplanmış olduğunu görecektik. Çünkü biz, YBC 10529 tabletinde şunu gördük ki, ters sayılar metne aktarılmadan önce metnin biraz ötesinde önce 0;56'dan 1;20'ye kadar sayıların tersleri hesaplanmış, sonra bu hesaplardan elde edilen sonuçlar metne geçirilmiştir. Tabii aktarma işlemi sırasında bazı kopyalama hataları da olmuştur. İşte biz, yukarıdaki resimde bunları göremiyoruz. Bu yüzden tabletin bir kopya olduğu sonucu çıkar.

Şu halde bu sonuçlara göre tabletin bir öğrenci tarafından yapılmış mümkün değildir. Ayrıca tablet kaba saba işler için de kullanılmış değildir. Çünkü $\sqrt{2} \approx 1;24{,}51{,}10$ değeri Babil metinlerinde en iyi yaklaşıklık iken 60 tabanında 3 altmışlığı ve 10 tabanında da 5 ondalığı (ki 6 ondalığa çok yakındır) doğrudur. Bu sonuç günümüzde üniversitelerin ancak matematik ve mühendislik bölümlerinde kullanılabilir. Yani böyle bir gerçek varken tabletin kaba işlerde kullanılmış olduğunu iddia etmek akıl ve mantıkla bağdaşmaz. Özetle yukarıdaki Wikipedi'deki alıntı ve benzeri bilgiler hastalıklı Batılı (Bâtıl) düşüncelerdir. ***Erbakan*** Hocamızın söylediği gibi *"Hak geldi, Batıl zâil oldu"*.

$\sqrt{2}$'nin İrrasyonelliği Hakkında

Bir diğer konu, $\sqrt{2}$'nin bir irrasyonel sayı olmasıdır. Yunan filozofu ***Aristoteles***'e göre MÖ 430'da ***Pisagor*** birim karenin köşegeninin yani $\sqrt{2}$'nin rasyonel olmadığını (irrasyonel) gösteren ilk kişiydi. Fakat bu keşif Yunan sayı sistemini alt üst etti. Çünkü Yunanlılar hep bir çizgi (doğru) üzerinde tam sayıları ve bunların aralarındaki 2 tam sayının oranlarından oluşan rasyonel sayıları biliyorlardı ve ***Pisagor***'un keşfinin bu sayı doğrusunda yeri yoktu (Bkz. *"Kim Korkar Matematikten"*, S. 22-23).

Şimdi linkteki kitaptaki hikâyeye yakında bakalım. Yunanlılara göre bir karenin kenarı ile köşegeni arasında ortak ölçü yoktur. Yani karenin köşegeni 2 tam sayının oranı olarak yazılamaz.

Peki bunu ilk kim buldu dersiniz? ***Pisagor***'un kendisi!

Bu buluş, Pisagorcuları tam bir paniğe sevk etti. Öyle ya, bütün nicelikler ya tam sayılar ya da bunların birbirine oranı (rasyonel sayılar: Akla yatkın sayılar) ile ifade edilebilirken, şimdi öyle nicelikler çıkıyordu ki, Pisagorcu felsefe bunu açıklayamıyordu. Pisagorcular bunu kendi aralarında bir sır olarak saklamak için yemin ettiler. Çünkü evrenin yüce mimarının bir kusurunu bulmuşlardı çünkü $\frac{p}{q}$ gibi 2 tam sayının oranı şeklinde yazılamayan bu sayılara "Alogon: İfade edilemez" adını verdiler. Bugün de bunlara irrasyonel sayılar yani akıldışı sayılar diyoruz. Yani hala pek içimize sindirememişiz bunların varlığını.

Pisagor'un öğrencisi ***Hippasus*** kenar uzunlukları 1 birim olan bir dik üçgende hipotenüsün uzunluğunun $\sqrt{2}$ birim olduğunu ve bu sayının rasyonel bir sayı olmadığını iddia etti.

Peki ***Hippasus*** bunu neye dayanarak söylemişti?

Eğer $\sqrt{2}$ bir rasyonel sayı ise $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ şeklinde yazılmalıdır. Burada p ve q tam sayıları aralarında asaldır. Yani ortak bölenleri $Ebob(p, q) = 1$'dir. Eğer ortak bölen 1'den farklı ise sadeleştirebilir.

Şu halde her 2 tarafın karesini alırsak $p^2 = 2q^2$ olur. Bu durumda p bir çift sayı olmalıdır, yani $p = 2p_1$'dir. O halde eşitlikte p yerine $2p_1$ yazarsak

$$4p_1^2 = (2p_1)^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2p_1^2$$

eşitliğinden bu sefer q'nun bir çift sayı yani $q = 2q_1$ olması gerekiyor. Bu sonuç ise p ve q'nun aralarında asal olması tanımına aykırıdır.

Fakat olmayana ergi yöntemine göre bu işlemi sonsuza kadar devam ettirirsek

$$Ebob(p, q) = 2Ebob(p_1, q_1) = 2^2 Ebob(p_2, q_2) = \cdots = 2^n Ebob(p_n, q_n) = \cdots$$

eşitlikleri ortaya çıkar ve eğer $n \to \infty$ için $Ebob(p_n, q_n) \to 1$ olduğunu kabul edersek p ve q'nun ebobu bir çift sayı olacaktır. Bu sonuç ise başlangıçtaki hipotezle çelişir. Öyleyse $\frac{p}{q}$, dolayısıyla $\sqrt{2}$ bir rasyonel sayı olamaz. Yani $\sqrt{2}$ bir irrasyonel sayıdır!

Bu ispatın ***Öklit***'in "Elemanlar"daki X. kitapta geçtiği söylenir ve bu yüzden Batı'da $\sqrt{2}$'ye "***Pisagor***'un sabiti" denir. Fakat bunlar doğru değildir çünkü kaynaklar ispatın ısrarla Önerme 117'de (Proposition 117) geçtiği söylemesine karşın X. kitapta 115 tane önerme vardır. Ayrıca X. kitapta bu ispatı veren doğrudan bir önerme de mevcut değil!

X. kitap şu tanımla başlar:

Tanım 1. Aynı ölçüyle ölçülen bu büyüklüklerin *karşılaştırılabilir* olduğu ve ortak bir ölçüye sahip olamayan *karşılaştırılamaz* olduğu söylenir.

Bu tanım karşılaştırılamaz olan büyüklerin oranından elde edilen irrasyonel sayısının ***Öklit***'ten önce (Eski Babil) bilindiğini gösterir ve diğer tanım ve önermeler bunun üzerine inşa edilirler.

Yukarıdaki ispat için ise şu tanım gerekiyor:

Tanım 2. Düz çizgiler, üzerlerindeki kareler aynı alanla ölçüldüğünde *kare olarak karşılaştırılabilir ve üzerlerindeki* karelerin ortak bir ölçü olarak herhangi bir alana sahip olmadığı durumlarda *kare olarak karşılaştırılamaz.*

Bu tanımın yalnızca çizgiler için geçerli olduğunu, yani yalnızca çizgilerin "kare olarak karşılaştırılabilir" olarak söylendiğini unutmayın. Kuşkusuz, ölçülebilir çizgiler kare olarak da karşılaştırılabilir, ancak çizgiler yalnızca kare olarak karşılaştırılabilir olabilir ama karelerin ortak bir (alan) ölçüsü yoksa çizgiler karşılaştırılamaz, başka bir deyişle, "karşılaştırılabilir olan yalnızca karedir". Bu fenomenin en ünlü örneği, bir karenin *A*'daki kenarından ve *B*'deki köşegeninden oluşur. B'deki köşegen üzerindeki kare, I.47'ye göre *A*'daki kenarın üzerindeki karenin 2 katı olduğu için kare olarak karşılaştırılabilirler. Ancak bunlar ölçülebilir çizgiler değildir. Modern terimlerle, 2'nin karekökünün rasyonel bir sayı olmadığını söyleyebiliriz. Ve fakat, ***Benjamin M. Altschuler*** ve kardeşi ***Eric L. Altschuler***, 2017'de ***Öklit***'te değil ama BM 15285 tabletindeki iç içe geçmiş 2 ve 3 kareden oluşan karelerde Eski Babillilerin tam da bu ispatı yaptıklarını kanıtladılar (Bkz. *"Proof of the Irrationality of the Square Root of 2 Contained in Babylonian Geometry Problem Tablets"*. Daha fazla bilgi için *"YBC 7289 No'lu Tableti ve 2. Çözümü"*'ne bakınız).

Bu konuda ***Neugebauer*** şöyle demişti (Bkz. S. 48): *"Ancak Babilli bir matematikçiye bu sonucu [$\sqrt{2}$'nin irrasyonelliği] verebilecek tüm temeller atılmıştı."*. Ama aynı ***Neugebauer***'e göre temeli Babil'e ait matematik bilgilerinin teorisi Yunanlılara aitti, yani Yunanlılar onlara modern bir bakış açısı getirmişti!

§ 4. Geometriksel Problemler

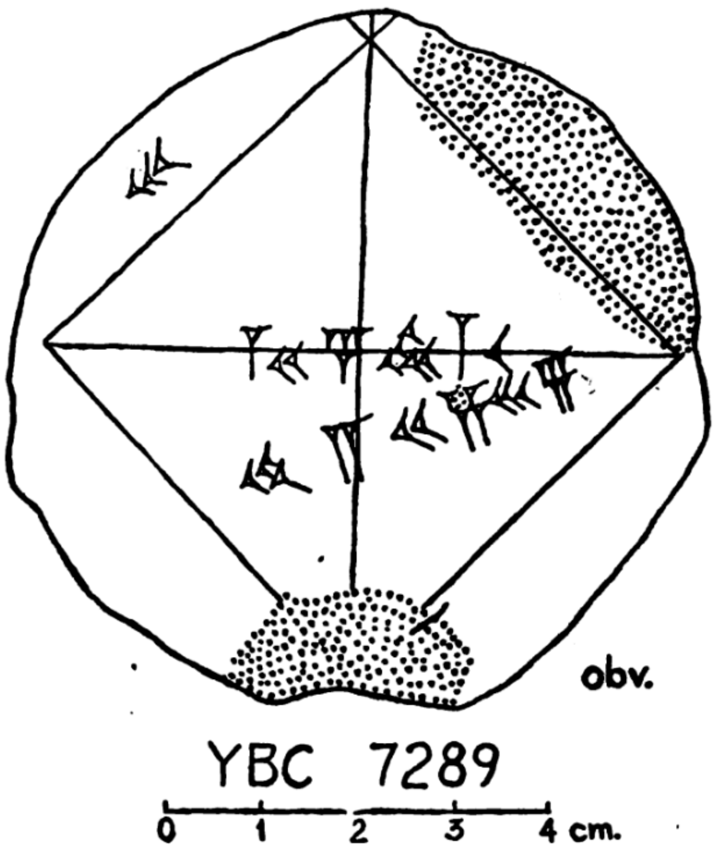
Basit Problemler

a. Bir Karenin Köşegeni

Resim 1.5.1. ***Otto E. Neugebauer (64)*** "***R. Courant***'ın 75. Doğum günündeki Göttingen Matematik Enstitüsü'ndeki Hatıralar"da.

Noel Swerdlow, ***Otto Neugebauer***'in içinde yaşayan ve tüm çalışmalarını renklendiren **"zwei Seelen (çifte ruh)"**'un en uygun tanımını şöyle yapmıştır: *"Aynı anda hem matematikçi hem de kültür tarihçisi olan **Neugebauer**, başından beri her iki yorumun ve aralarındaki çelişkinin farkındaydı. Gerçekten de ister tek bir kil tabletin ya da papirüs parçasının içeriği, isterse bütün bir Yunan risalesi olsun, kültürel olarak spesifik belgelerin analizi ile çağlardan ve kültürlerden bağımsız olarak matematiksel yöntemlerin sürekliliği ve evrimi arasındaki kayda değer gerilim, onun tüm çalışmalarının karakteristiğidir. Antik Yakın Doğu'dan Avrupa Rönesansı'na kadar kesin bilimlerin tarihine az çok tutarlı bir şekilde uyguladığı, hiçbir şekilde **'aktarım'** çalışması olarak yeterince tanımlanamayacak olan ayrıntılı ve teknik kültürler arası yaklaşım da tam olarak bu gerilimden doğmuştur.*

*Ancak doğruyu söylemek gerekirse, **Neugebauer** daha derin bir düzeyde her zaman her şeyden önce bir matematikçiydi; çalışma konularını seçer ve matematiksel ilgilerine göre bazen oldukça güçlü bir şekilde yargıda bulunurdu.", A Mathematician's Journeys: Otto Neugebauer and Modern Transformations of Ancient Science, S. 55.*



YBC 7289, takip eden 4 metin gibi Eski Babil'e ait olduğu anlaşılmaktadır. Ön yüzünde aşağıdaki şekil yer almaktadır [2]:

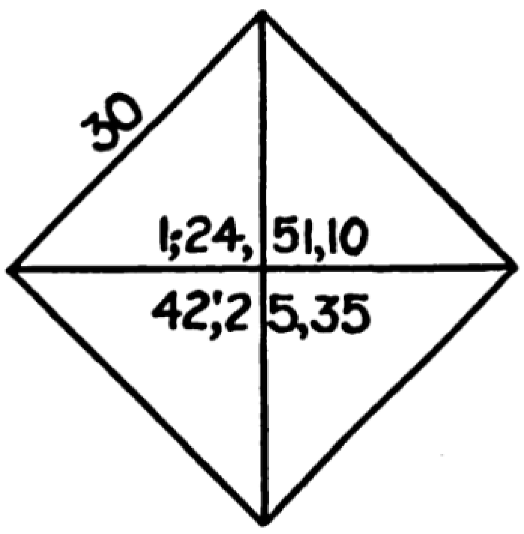


FIG. 3.

30 sayısı karenin bir kenar uzunluğu olan a'yı gösterir, ve 1;24,51,10 şu anlama gelir:

$$(1)\quad 1;24,51,10 \approx \sqrt{2};$$

Bu yüzden köşegen için

$$d = a\sqrt{2} = 42;25,35$$

bulduk. (1)'deki değer aşağıdan görüldüğü üzere $\sqrt{2}$ için çok iyidir:

$$1;24,51,10^2 = 1;59,59,59,38,1,40.$$

[2] Arka yüzünde köşegeni yazılı bir dikdörtgen figürü yer almaktadır, ancak rakamlar boyutların restorasyonunu gerektirmeyecek kadar çok kötü bir şekilde korunmuştur.

Daha önce yayınlamış materyalde (Selökid dönemine ait [3]) sadece $\sqrt{2} \approx 1;25$ yaklaşımı yer almaktadır. Ancak yeni değerimiz, aşağıda 136. sayfada yayınlanan Eski Babil katsayılar listesinde de, 10. satırda girişi bulduğumuz yerde, yer almaktadır.

1;24,51,10	**Köşegen, $\sqrt{2}$**

Tablo 1.5.1. $\sqrt{2}$ için YBC 7243'ün 10. satırında verilen 1;24,51,10 yaklaşıklığı. Bkz. "*Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context*", S. 370, 374.

Doğal olarak $\sqrt{2}$ için (1) değerinin nasıl elde edildiği sorusu ortaya çıkmaktadır. Bu soruya şu şekilde yanıt verilebilir, ancak tam olarak bu yolun izlendiğine dair doğrudan bir kanıt sunmak mümkün değildir. İki faktör bu açıklamanın lehine konuşur: Birincisi, belirtilen sürecin (1)'de bulunan sayıya götürmesi; ikincisi, aynı prosedürün $\left(\sqrt{40^2+10^2}=\right)\sqrt{28{,}20}$'nin [4] değerini bulmak için başka bir metinde onaylanmış olması gerekir.

Söz konusu prosedür, $\sqrt{a}$'nın değişen (alternatif) yaklaşıklığı daha önce bulunan yaklaşıklıkların aritmetik ve harmonik ortalamalarla dönüşümlü olarak yaklaştırılmasından oluşur.

α_1, $\sqrt{a}$'nın $\alpha_1 > \sqrt{a}$ olacak şekilde herhangi bir yaklaşıklığı olsun.

Öyleyse $\beta_1 = \frac{a}{\alpha_1}$ de $\sqrt{a}$'nın bir yaklaşıklığıdır ancak gerçek değerden ters yönde sapar çünkü $\alpha_1 > \sqrt{a}$'den $\beta_1 = \frac{a}{\alpha_1} < \sqrt{a}$ çıkar.

Şimdi α_2 ve β_2 ile yeni bir yaklaşık çifti üretiyoruz [5],

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \beta_2 = \frac{a}{\alpha_2}$$

ve işleme bu şekilde hesaplayarak devam edebiliriz:

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_2+\beta_2}{2}, \beta_3 = \frac{a}{\alpha_3}.$$

Tüm α'ların $\sqrt{a}$'dan büyük ve tüm β'ların $\sqrt{a}$'dan küçük olduğu açıktır, ancak her adımda karşılık gelen yaklaşıklıklar arasındaki farkı azaltır. Bu yöntemi, ilk kötü yaklaşık olan $\alpha_1 = \frac{3}{2}$ ile başlayarak $\sqrt{2}$'ye uyguluyoruz (α_1^2, 2;15 olacaktır).

Daha sonra ilk çifte yaklaşık için şunları elde ederiz:

$$\alpha_1 = 1;30, \beta_1 = \frac{2}{1;30} = 1;20.$$

Bir sonraki adım şunları verir:

$$\alpha_2 = \frac{1;30+1;20}{2} = 1;25, \beta_2 = \frac{2}{1;25} = 1;24{,}42{,}21\cdots.$$

Burada yukarıda anılan $\sqrt{2} \approx 1;25$ [6] değerine zaten ulaştık. Bir sonraki adım (1)'de [7] verilen değere götürür:

$$\alpha_3 = \frac{1;25+1;24{,}42{,}21\cdots}{2} = 1;24{,}51{,}10\cdots.$$

Metinlerimizde $\sqrt{2}$ için bulunan her 2 değerin de aynı zincirin halkaları olması, açıklamamızı destekleyen oldukça güçlü bir argüman olarak görünmektedir.

Kaynak. "*Matematiksel Çivi Yazıtları (Mathematical Cuneiform Texts), New Heaven, Conn., 1945*", "*§ 4. Geometrical Problems/Simple Problems: a. Diagonal of a Square*", S. 42-43.

D. PAMUKTULUM

---

[3] MKT I, S. 104; bkz. MKT I, S. 140'a da.

[4] VAT 6598; bkz. MKT I S. 279. ve Neugebauer, Vorlesungen S. 33. ***Neugebauer***'in sözüne ettiği kaynaktaki bu değer (1.3.14)'de geçer ve görüşünü de katılmıyoruz. Çünkü Babilliler kareköklü bir sayıya rasyonel bir yaklaşım için Bölüm 1 & 2'deki (1.1.1) ve (1.2.2)'den birini kullanıyorlardı. Tıpkı Eski Mısır'daki gibi probleme göre hareket ediyorlardı!

[5] $\alpha_2 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$'den $\beta_2 = \frac{a}{\alpha_2}$ ve bundan da $\beta_2 = \frac{2a}{\alpha_1+\beta_1} = \frac{2\alpha_1\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}$ sonucu çıkar. Bu ifade α_1 ve β_1'in "harmonik ortalaması" olarak bilinir.

[6] Daha doğrusu: $\alpha_3 = 1;24{,}51{,}10{,}7,\cdots$.

[7] $\sqrt{2}$'nin sürekli kesir olarak genişletilmesinin de (1)'e yol açtığını dikkat edilmelidir, ancak 7. adıma kadar değil.