YBC 7289 No'lu Tabletin 2. Çözümü

D. PAMUKTULUM

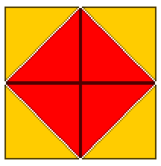
2022

ONAYLANDI
DPT 09:23, 14.7.22

Önsöz

***Neugebauer**'e…*

Aslında bu makaleyi yazmayacaktım. Çünkü M.Ö. 18. yy.'a tarihlenen YBC 7289 no'lu tabletin çözümünü 2008'de ***"Babil Algoritmasından Modern Kök Algoritmalarına Doğru 4,000 Yıllık Bir Yolculuk"*** adlı tezimde yapmıştım. Dikkatinizi çekerim: *"Genelleştirilmiş Piobert-Parmentier Metodu"* adlı çalışmamın EK 1'inde gördüğünüz üzere bu tabletin çözümü halen mevcut değildir ve ben, 2. çözümü yapıyordum. Bu son çözümden önce EK 1'de şansımın yardımıyla da olsa [1], (3.120)'de tabletteki $\sqrt{2}$ için köşegen üzerinde verilen 1;24,51,10 değerine ulaşmış ve bu sonucun bir sonraki yaklaşıklıkta doğrulanması gerektiğini söylemiştim ve her 2 çözümdeki mihenk taşı budur. Fakat bu makaleden sonra *"Piobert-Parmentier Metodunun Q üzerinde Genelleştirilmesi"* adlı bir sonraki makaleme odaklanmış halde çalışırken aşağıdaki Tablo 1.1.2'deki bulguya 06.12.2021, 06:25:18-39'da ulaştım. Bu tarihin sonundaki saniyeler bulgumu Mathematica'da yazma ve kaydetme sürelerini göstermekle birlikte Tablo 1.1.2'yi Word'te 06.12.2021, 09:15:36'da kaydettim. Ancak bu son makalemin ve beraberindeki 26 Mathematica dosyasının yazımı epey zamanımı aldı ve bu arada bulgu arada kaynadı. Açıkça söylemem gerekirse bulguya ilk başta ciddi gözle bakmıyordum ama bulgudaki hesapları Eski Babilonya Tabletleri'nde araştırdıkça hayret ediyordum. Çünkü bu hesaplar eski Babilonya tabletlerinde mevcuttu ve geriye bir tek helvanın yapılması kalıyordu.



Buna göre ilkin iç içe geçmiş 2 kare (ki içteki dıştakinin orta noktalarından geçer) Yale Babilonya Koleksiyonu'ndaki tabletin matematiksel yorumunda yandaki şekildeki gibi verilir ve bunu 2005'ten beri biliyordum ve 2006'daki çalışmalarım sırasında da BM 15285 no'lu tabletinde bu şekildeki 2 ve 3 karenin olduğu örnekleri görmüştüm (Bkz. *"Mathematical commentary on YBC 7289"*, *Anahtar Tablet*, *EK 1*, S. 19). Peki, bu şekilde iç içe geçmiş kareleri 3'ten fazla alır ve en dıştaki büyük karenin köşegenini hesaplar ve buradan $\sqrt{2}$ için rasyonel bir yaklaşımda bulunursak ne olurdu acaba? İşte bu sorunun yanıtı bana Tablo 1.1.2'yi verdi. Dikkat ediniz, EK 1'deki ***Arşimet***'in Önerme 3'ündeki $\sqrt{3}$ için verdiği üst sınır kesrini (1.1.36)'da bu yolla bulmuştum!

İkinci olarak Tablo 1.1.2'deki $\mathrm{k} = 2^{\mathrm{n}}\sqrt{2} = \sqrt{2.2^{2\mathrm{n}}} = \sqrt{2^{2\mathrm{n}+1}}$ köşegeninin yazılması ve hesaplanmasının eski Babilliler tarafından bilinip bilinmediği sorusu karşımıza çıkar ki, yazımda bir sorun yoktu çünkü eski Babilliler alan hesabından $\mathrm{k}^2 = 2^{2\mathrm{n}+1}$ yazmasını biliyorlardı (Bkz. *"Proof of the Irrationality of the Square Root of 2 Contained in Babylonian Geometry Problem Tablets"*). Asıl problem, $2^{2\mathrm{n}+1}$ sayısının hesabı ve $\mathrm{k} = \sqrt{2^{2\mathrm{n}+1}}$ köşegeninin (1.1.10)'daki Babilonya algoritmasıyla tam kısmının hesaplanması idi. Ama $9^0, 9^2, \cdots, 9^{46}$ ve $9^{11}, 9^{11}.12, 9^{11}.12^2, \cdots, 9^{11}.12^{40}$ dizilerindeki her bir sayının 60 tabanındaki yazımını tabletlerde görünce şok oldum (Bkz. *"The Power of 9 and Related Mathematical Tables From Babylon"*, *"Die Mathematik der Babylonier"* vb.). Bu durumda eski Babillilerin $2^{2\mathrm{n}+1}$ sayısının hesabını yapıp yapamadıklarını sormamız ayıp kaçar. O zaman geriye bir tek $\mathrm{k} = \sqrt{2^{2\mathrm{n}+1}}$ köşegeninin (1.1.10) ile tam kısmı bulmak kalır ki, Tablo 1.1.2'den görüldüğü üzere bunun hesabının kolay bir yolu var. O halde Tablo 1.1.2'de önerdiğim yöntem Eski Babilonya Matematiği'ne tamamen uygundur ve eski Babillilerin bu hesabı yapmasında herhangi bir sıkıntı yoktur.

Şimdi başa dönersem bu makaleyi yazmamda gecikmemin esas nedeni kendimdim. Çünkü 1. Çözüm yeter, diyordum ve ne zaman yazmaya kalksam kendimi bu sebeple engelliyordum. Ama ***Neugebauer*** söz konusu olduğunda, bundan kaçış olamazdı!

D. PAMUKTULUM, 10.04.2022, 05:05.
D. PAMUKTULUM

[1] Bkz. *"Mi suerte dijo si (Şansım 'Evet' dedi)"*. ***Manuel Iglesias***'ın (ünlü şarkıcı ***Julio Iglesias***'ın amcası. Onunla ilgili çıkan en son haber şurada: *"Julio Iglesias nasıl Julio Iglesias oldu?"*) 1987'de yayımladığı bu kitapta, 1937 Nisan'ında kendisiyle birlikte 712 İspanyol milliyetçisini ***Atatürk***'ün kurtardığı geçmez, yani bu olaydan onun haberi yoktur. O, kendilerinin Türk hükümeti tarafından yollanan Karadeniz gemisiyle kurtulduğunu sanır (Bkz. *"Arrivederci Siracusa!"*). Tıpkı Burgos Hükümeti ile İspanya Hükümeti'nin karıştırılmasındaki gibi (Bkz. *"Zil, Şal ve Utanç"*). Bu tarihi sırrı Madrid'teki Büyükelçimiz ***Ender Arat*** çözmüş ve göreve yeni başladığı günlerde onuruna verilen bir yemek sırasında davetlilere anlatmıştır. Eh, ***Manuel Iglesias*** ve kardeşi ***Julio Iglesias***'ın (ünlü şarkıcı ***Julio Iglesias***'ın babası. Onun hikayesi de şurada) bundan haberi olmuşsa, bu sayede olmuştur!

Bu arada 2006'daki *"Antik Matematiksel Astronomi Plimpton 322 & Çatalhöyük Tableti'nde Matquake'in Dedektiflik Çalışması"* adlı tezimi yazarken Rioja Üniversitesi'nden ***Manuel Benito Muñoz***'un 31.05.2002 tarihli *"Algunos problemas diofánticos (Some Diophantine problems)"* adlı doktora tezinden yararlandığımı biliyor muydunuz? Ya teziminin başlığını koyarken ***R.C. Buck***'ın 1980'deki *"Sherlock Holmes in Babylon, Mathematical Monthly 87, 335-345"* makalesindeki başlığından esinlendiğimi?

YBC 7289 No'lu Tableti ve 2. Çözümü

1.1. YBC 7289 No'lu Tableti (**Yale Babilonya Koleksiyonu'ndan üzerindeki yazıt nedeniyle M.Ö. 1900-1600 aralığında ama en iyi teklifle M.Ö. 1800 civarında tarihlenen çivi yazılı bir metin).** Araştırma sonuçlarına göre şimdiye kadar toprak altından 500,000 kadar tablet ortaya çıkarıldı (Bkz. "*Archive und Bibliotheken In Babylon*") ve bir o kadarının daha toprak altında olduğu tahmin edilmektedir. Fakat çıkarılan bu tabletlerden yaklaşık 400 kadarı matematiksel tablet olup, bunların içinde yalnızca 2 tanesi **"Muhteşem Tablet"** olarak anılmaktadır: Plimpton 322 ve YBC 7289. Aşağıda bu muhteşem tabletlerden ikincisinin hikâyesini anlatacak ve 2. çözümünü vereceğim.

1.1.1. YBC 7289 No'lu Tabletin Kısa Bir Hikâyesi

"İyi hesap yapan iyi yazamaz; iyi yazan iyi hesap yapamaz.", Bir Eski Babil Atasözü.

Bu atasözü o zamanki kâtiplerin üzerindeki iş yükünün fazla olması nedeniyle iş bölümünün (hiyerarşi) yapılması gerektiği gösterir. Örneğin bir Eski Mısır Papirüsü olan **Anastasi I Papirüsü**'ndeki konuşmadan kâtibin yalnızca firavunların emirlerini yazmakla görevli olmadığını, aynı zamanda matematikçisi olduğunu da öğrenmekle birlikte gerek Eski Mısır Papirüsleri'nde olsun gerekse Eski Babil Tabletleri'nde olsun matematiksel metinlerdeki hataların çokça olmasının daha Eski Babil Dönemi'nde bu sözle ortaya çıktığını görüyoruz. Buna göre Plimpton 322 no'lu tablette 4 hata varken YBC 7289 no'lu tablette hiç hata yoktur (Bkz. "*The Babylonian tablet Plimpton 322*". Tablet üzerindeki okumalara göre kırmızı renkli sayılar hataları gösterir). YBC 7289 no'lu tablette aşağıdaki Resim 1.1.4'te gördüğünüz üzere sadece köşegenleriyle birlikte çizilmiş bir kare ve ilgili yerlere yazılmış 3 tane seksagesimal (60 tabanlı) sayı vardır.

Resim 1.1.1. *Otto Neugebauer (1899-1990)*. Bu fotoğraf *National Mathematics Magazine 11*, 1936, 16'da yayınlandı.

Kariyerine 1922-1924'te ***Richard Courant***, ***Edmund Landau*** ve ***Emmy Noether*** ile birlikte okuduğu Göttingen Üniversitesi'nde matematikçi olarak başlayan ***Neugebauer***, daha sonra Eski Mısır ve Babil Matematiği'ne döndü ve ardından Matematiksel Astronomi Tarihi'ne geçti. 65 yıllık kariyerinde, büyük ölçüde Babil ve Mısır'da, Greko-Romen antik çağından Hindistan'a, İslam dünyasına ve Orta Çağ Avrupası'nda bilim ve Rönesans Avrupa'sına kadar modern matematiksel astronomi anlayışı yarattı.

Bakmayın siz ***Neugebauer***'in antik işlerle uğraşmasına, yeri geldiğinde yüksek cebirsel vasıtalarını kullanmaktan çekinmez. Yanda YBC 7289 no'lu tablette kullandığı yöntem bunlardan sadece birisidir. Eski Babil tabletlerindeki problemlerin çözümlerinde kullandığı şaşırtıcı yöntemler sayesinde Amerika'da **"Yıldız Oyuncu"** oldu!

Kronolojiye göre ***J.P. Morgan***'ın bir temsilcisi (ki kendisi, tableti Babilonya koleksiyonu için Yale Üniversitesi'ne bağışlayan kişidir) 1912'de bu tableti satın almış ve daha sonra ***Otto Neugebauer***'in dikkatini çekmiş ve yardımcısı ***Abraham J. Sachs*** ile birlikte 1945'te **"*Otto Neugebauer* ve *Abraham J. Sachs*, Matematiksel Çivi Yazı Metinleri, (New Haven, Conn., 1945)"** adlı kitabın 42.-43. sayfalarındaki "*a. Diagonal of a Square*" parçasında bu tabletin muhtemel bir çözümünü yayımlanmışlardır! ***Neugebauer***'in bu çözümde kullandığı yöntem daha sonra ***Opermann***'ın da kullandığı ve kuadratik yakınsama yapan AHM (Aritmetik ve Harmonik Ortalamalar Metodu) idi. Bu metot 1972'de ***Richard Brent*** ve ***Eugene Salamin*** tarafından π'nin hesabında kullanılan AGM metodunun ilk örneğiydi (Bkz. "*Jonathan Borwein, Pi and AGM*").

1.1.1.1. *Neugebauer*'in Prosedürü. 1928'de Babil algoritmasıyla konuya hızlı bir giriş yapan ***Neugebauer***, 1945'te usta olmuş ve YBC 7289 no'lu tabletindeki 1;24,51,10 değerini veren prosedürü şöyle veriyordu (Bkz. "*Genelleştirilmiş Piobert-Parmentier Metodu*", "Uygulamalar", S. 10): İrrasyonel $\sqrt{a}$ sayısına rasyonel yaklaşıklar için ilkin

$$(1.1.1)\quad \sqrt{a} < \alpha_1$$

bir üst sınır ilk yaklaşıklıklığını göz önüne aldıktan sonra

$$\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} < \alpha_1 \Rightarrow (1.1.2)\quad \sqrt{a} > \frac{a}{\alpha_1} = \beta_1$$

ile buna karşılık gelen bir alt sınır yaklaşıklıklığını veriyordu. Burada ***Neugebauer***, $\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}}$ almakla aşağıdaki 1.1.1.3'te geçen AO 6484 no'lu tabletindeki Problem 8'deki davranışı kullanmıştır!

Şimdi α_2 ve β_2 yeni yaklaşıklıklarını

$$(1.1.3)\quad \alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \beta_2 = \frac{a}{\alpha_2}\left(= \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2\alpha_1\beta_1}\right)$$

aritmetik ve harmonik ortalamalarından türetir ve işlemi bu şekilde devam ettirirsek,

$$(1.1.4)\quad \alpha_3 = \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2}, \beta_3 = \frac{a}{\alpha_3}\left(= \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2\alpha_2\beta_2}\right)$$

şeklinde yeni yaklaşıklıklar söz konusu olur.

İşte bu rasyonel yaklaşıklara göre $\sqrt{a}$ için şu eşitsizlikler geçerli olur:

$$(1.1.5)\quad \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \cdots < \sqrt{a} < \cdots < \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1.$$

Burada $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için α_n ve β_n'ler $\sqrt{a}$'ya kuadratik olarak yakınsama yaparlar. Bu sonuçla ***Newton*** ve ***Raphson***'un eski Babillilerden 34 yüzyıl sonra aynı yöntemi kullandıkları sonucu çıkar (Bkz. "*Newton-Raphson Metodu*"). İşte ***Neugebauer***'i bir ***Prometheus*** yapan şey bu ve benzeri keşifleriydi. Demek ki ***Neugebauer***'in ilgi alanının Antik Matematik Tarihi'ne kayması boşuna değilmiş, çünkü böyle bir şöhreti üniversitede kazanması mümkün değildi. O, bu fırsatı ilk fark edenlerden biriydi!

Peki ***Neugebauer***, bu prosedürü nasıl bulmuştu?

Neugebauer'in bu konuda 1928'den beri araştırmalar yaptığını biliyoruz, dolayısıyla birçok tablete baktıktan sonra edindiği engin tecrübesi sonunda bulduğunu varsayıyoruz. Gerçekten Babil algoritmasının orijini için $\sqrt{a} < x_n$ eşitsizliğini göz önüne alırsak cebrik olarak,

$$(1.1.6)\quad \sqrt{a} < x_n \Rightarrow 0 < \left(x_n - \sqrt{a}\right)^2 = {x_n}^2 - 2x_n\sqrt{a} + a \Rightarrow \sqrt{a} < \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} = x_{n+1}$$

ya da geometrik olarak $\sqrt{a}$'nın alt ve üst sınırlarının aritmetik ortalamasıyla,

$$(1.1.7)\quad \sqrt{a} < x_n \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a}} < x_n \Rightarrow \frac{a}{x_n} < \sqrt{a} \Rightarrow \frac{a}{x_n} < \sqrt{a} < x_n \Rightarrow \sqrt{a} < x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} < x_n$$

şeklinde (1.1.3) ve (1.1.4)'teki Babil algoritması elde edilir. Buna ilişkin kare açılımını gösteren Eski Babil tabletleri vardır. Ayrıca Eski Babil tabletlerinde küp açılımının ve zayıf da olsa küpkök yaklaşımlarının verilmesi bunu kesinlikle doğrular!

Neugebauer'in Nazi Dönemindeki Mücadelesi

Resim 1.1.2. Bu fotoğraf ***Neugebauer***'in 1922'de Ludwig-Maximillian Üniversitesi'ndeyken öğrenci kimliğinden alınmıştır, *Anı Plaketi*. Arka plandaki "Polizei-Direktion (Polis Müdürlüğü)" yazısına dikkat! (Bkz. *Fig 1*. S. 129)

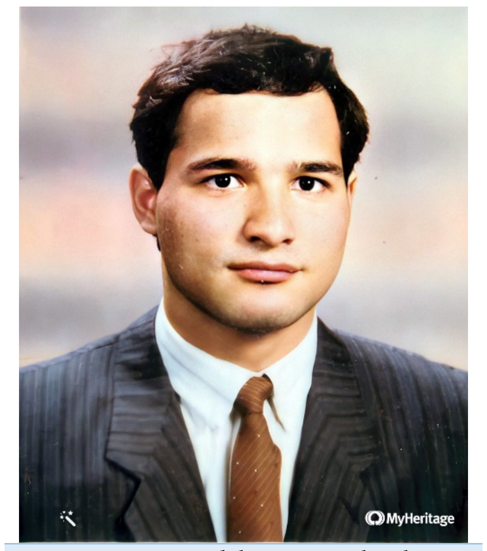
İlk kez 1931'de basılan ve editörlüğünü ***Neugebauer***'in yaptığı **"Zentralblatt für Matematik (Matematik Merkezi Dergisi)"** hızla tüm matematikçiler için vazgeçilmez bir araç haline gelmişti. Bununla birlikte, Naziler iktidara geldiğinde Almanya'daki siyasi durum, ***Neugebauer***'in kariyerinin gidişatını tamamen değiştiren değişiklikler getirecekti. ***Boas***'ın yazdığı gibi: *"Almanya'daki Nasyonal Sosyalistlere başından beri karşı çıktı ve sonuç olarak akademik pozisyonunda zorlandı."*

Davis, ***Neugebauer***'in bir keresinde şunu söylediğini hatırlıyor: *"Sokakta altınızda Nazi botlarının sesini hiç duymadıysanız, dönem tarihini anlayamazsınız!"* Ama şunu da eklemeliyim: *"Özellikle Alman İmparatorluğunun bir bakiyesi olan resmi tören geçitleri adeta karnaval havasında gerçekleşiyor ve halk mest oluyordu. Eğer davul, zil ve tabii ki askerlerin rap rap diye çıkarttığı sesleri duymadıysanız Nazi dönemini anlayamazsınız. Ne güzel günlerdi, Alman halkı çocuklar gibi şendi!"*

Neugebauer'in haklı olduğundan eminiz, ancak onun yaptığı alıntı durumu anlamamıza biraz yardımcı olabilir. Neyse ki ***Neugebauer***'in ***Harald Bohr***, ünlü fizikçinin kardeşi, ile iyi bir arkadaşlığı vardı ve o, ***Neugebauer***'i Ocak 1934'te Kopenhag Üniversitesi'ne taşınması için davet etti. ***Neugebauer***, Zentralblatt für Matematik'in editörlüğünü Kopenhag'a götürdü ve orada 1934'ten 1938'e kadar Zentralblatt genel merkezinden gelişmeye devam etti. Naziler derginin yayın politikasını daha fazla etkilemeye çalıştıkları için, bu dönem boyunca derginin üretme mücadelesi daha da zorlaştı. Ne yazık ki bazı iyi matematikçiler Nazi fikirleri tarafından baştan çıkarıldı ve ***Blaschke*** gibi matematikçiler dergiye saldırdı.

1938'de Springer-Verlag'ın Zentralblatt für Matematik'in Nazi ilkelerine göre üretilmesinde ısrar etmesiyle mesele doruk noktasına ulaştı. Yayın kurulunda yer alan ***Levi-Civita*** görevden alındı ve ***Neugebauer***, yayın kurulunun neredeyse tamamıyla birlikte istifa etti. ***Neugebauer***, kümülatif indeks dışında derginin tüm kayıtlarını yok etti!

Neugebauer'den sonraki yıllarda ise az sayıdaki araştırmacı, bu çözümün açılımını yaparak ve bu arada bazı detay noktalar üzerinde durarak ***Neugebauer***'in tezini desteklerken tabii ki buna karşı olanlar da antitezleriyle yeni açılımlarda bulundular. Ancak tüm bu çalışmalar ***Neugebauer***'in çözümüne yeni bir bilgi katmadığı gibi, çürütemedi de. Bana gelince, ilk kez 2008'de ***"Babil Algoritmasından Modern Kök Algoritmalarına Doğru 4,000 Yıllık Bir Yolculuk"*** adlı tezimden sonra bu tabletin bir ikinci tam çözümünü verebilirim. Bu çözümlerden ilkini düzgün olmayan bir sayının tersini bir algoritmayla bularak [2] ***Neugebauer***'in yukarıdaki prosedürüne göre yapmıştım ve ikinci çözümü aşağıda 1.1.4'te verdim. Bu çözümler sırasında ***Neugebauer***'i daima baş akıl hocam (mentör) olarak görmüşümdür. Çünkü onun araştırmaları ve çalışmaları olmasaydı bu ve diğer tabletlerin yanından geçemezdim. Bence çözemediği tabletlerdeki hedeflediği şey bu olsa gerek. Ama onu mentör olarak görmememin nedeni bu değil; daha başka şeyler var…



Resim 1.1.3. Lisedeki öğrenci kimliğimden aldığım fotoğrafım. Animasyonu için şuraya bakınız!

1.1.1.2. Babil Algoritması'nın Kullanımı. Öncelikle bu yaklaşıklığın bulunması için $a = 2$ için $y_n = \frac{2}{x_n}$'nin yarısı $0;30 \times y_n = \frac{y_n}{2} = \frac{\frac{2}{x_n}}{2} = 0;30 \times (2 \times x_n^{-1}) = (0;30 \times 2) \times x_n^{-1} = 1 \times x_n^{-1} = x_n^{-1}$ olduğundan, ki burada **Standart Ters Sayılar Tablosu**'na göre 2 ile 0;30 sayıları birbirinin tersi olup çarpımları 1'dir, (1.1.6) ya da (1.1.7)'deki Babil algoritmasının,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} = 0;30 \times (x_n + 2 \times x_n^{-1}) = 0;30 \times x_n + \underbrace{(0;30 \times 2)}_{=1} \times x_n^{-1} = 0;30 \times x_n + x_n^{-1}$$

eşitliklerine göre

$$(1.1.8) \quad x_{n+1} = 0;30 \times x_n + x_n^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{2}$$

şeklinde kullanılmış olmasıyla karşılaşırız ve bu giriş bulgusu tablette verilen 1;24,51,10 sayısına ulaşılmasında son derece önem arz eder. Demek ki bu hesabı yapan eski Babilli matematikçi; önce x_n'nin yarısı alıyor yani 0;30 ile x_n'yi çarpıyor ve sonra x_n'nin tersini buluyor (ki eğer x_n'nin pay ve paydasındaki sayılar düzgün sayılar ise, x_n'nin tersi de x_n gibi sonlu bir sayı olur ya da x_n'nin pay ve paydasındaki sayılar düzgün sayılar değilse, x_n'nin tersi sonlu olmayacağından, x_n'nin tersinin yaklaşık olarak alınması gerekir) ve son olarak bulduğumuz bu 2 sayıyı (x_n'nin yarısı ve tersine karşılık gelen sayılar) toplayarak $\sqrt{2}$ için x_n ve y_n'den daha iyi bir yaklaşıklık olan x_{n+1}' i buluyor. O halde ilkin (1.1.8)'e göre başlangıç değerini $x_0 = 1$ olarak alırsak,

$$(1.1.9) \quad x_1 = 0;30 \times x_0 + x_0{}^{-1} = 0;30 \times 1 + 1^{-1} = 0;30 + 1 = 1;30$$

ilk yaklaşıklığını elde ederiz. Burada yine aynı tabloya göre 1'in tersi kendisidir.

[2] ***Jöran Friberg***, Schøyen (Şöyen) koleksiyonundaki M.Ö. 19 yy.'dan kalma MS 2317 no'lu tabletin tam çözümünü *"A Remarkable Collection of Babylonian Mathematics Texts"* adlı kitabında verdi. Tablette 60 tabanlı 1,1,1,1 sayısı 13'e bölündüğünde 4,41,37'nin elde edildiği söylenmektedir. ***Friberg***'e göre kâtip ilkin 13'ün tersini $\frac{1}{13} = 0;4,36,55,23,\cdots$ olarak hesaplıyor ve sonra 1,1,1,1 sayısını bununla çarparak $1,1,1,1 \times \frac{1}{13} = 1,1,1,1 \times 0;4,36,55,23 = 4,41,37$ bölüm sayısını elde etmektedir. Ama ***Friberg*** bu çözümü 2007'de anılan kitabında (bkz. *"7. Old Babylonian Hand Tablets with Practical Mathematics/7.1. MS 2317: Division of a Funny Number by a Non-Regular Factor"*, S. 155) değil 2008'de *Notices of The AMS*'in 55. Cildi ve 9. Sayısındaki 1078. sayfada aynı adla anılan makalede verdi. Bu makalenin PDF'de sunulduğu tarih 20.08.2008, 22:37:14'tür. Benim ***"Babil Algoritmasından Modern Kök Algoritmalarına Doğru 4,000 Yıllık Bir Yolculuk"*** adlı 194 sayfalık tezimi bitiriş tarihim ise 28.07.2008, 03:52 idi. Ama YBC 7289 no'lu tabletini bu tarihten çok daha önce çözmüştüm. Çünkü bu çözüm aşağıdaki Resim 1.1.7'den hemen sonra geliyordu. Yani bu çözümü, dolayısıyla bu çözümdeki 60 tabanlı sayıların terslerini MS 2317 no'lu tabletinden ve tabii ki ***Friberg***'in bu son çözümünden habersiz olarak yapmıştım. Ama sonuçta her iki yöntem de aynı şekilde işliyordu. ***Friberg*** amcaya *"Hell Seger! (Sieg Heil'ın İsveççesi)"* dersem ne der acaba? Özetle ben sadece ***Neugebauer***'in prosedürü sonuçlandırmaya çalışmıştım (ki o, düzgün olmayan seksagesimal sayıların terslerini veren bir tablet olmadığı için 1;25'te takılmış ve bundan sonraki yaklaşıklıkları verememişti) ve bunun için düzgün olmayan seksagesimal sayılarının tersleri için MS 2317'deki gibi bir algoritma keşfetmiştim. Demek ki eski Babilliler düzgün olmayan bir seksagesimal sayının tersini, doğrudan bir tablet mevcut olmasa bile, alabiliyorlarmış. ***Neugebauer***, 1945'te $\sqrt{2}$ için prosedürüne göre sırasıyla $x_1 = 1;30 = 1\frac{1}{2}$ ve $x_2 = 1;25 = 1\frac{5}{12}$ yaklaşıklıklarını verdikten sonra hesabı bıraktı. Onun bıraktığı bu hesabı 2008 Mart'ında ben tamamladım!

YBC 7289 No'lu Tableti ve 2. Çözümü

Diğer yandan eski Babilliler, pratik yaklaşımlarda şu algoritmayı kullanıyorlardı:

$$(1.1.10)\quad \sqrt{a}=\sqrt{b^2+c}<b+\frac{c}{2b}.$$

Ben bu algoritmayı eski Babilliler gibi bir tablete yazmadım; 03.04.2005, 21:31 tarihinde bir kaya üzerine kurşun kalemle ve bunun altına ***Arşimet***'in Önerme 3'ündeki alt ve üst sınır yaklaşıklıkları için bir çift algoritma yazdım (Bkz. *EK 1*). Bunlardan üst sınır kesri yukarıdaki Babilonya algoritmasıdır! (Bkz. Daha geniş bilgi için "*Derya PAMUKTULUM, Hesabın Destanındaki İlk Gerçek Algoritma: YBC 7289 No'lu Tabletindeki Babil Algoritması, 20.04.2006, 17:00*")

Şu halde bu algoritmaya göre eğer $a=2=1^2+1$ seçimini yaparsak $b=1=c$ olduğundan yine aynı yaklaşıklığı bulmuş oluruz:

$$(1.1.11)\quad \sqrt{2}=\sqrt{1^2+1}<1+\frac{1}{2\times 1}=1+\frac{1}{2}=1+0;30=1;30.$$

İkinci olarak düzgün bir sayı olan $x_1=1;30$ yaklaşıklığının kendisi ve tersi sonlu birer sayı olduklarından (1.1.8)'e göre,

$$(1.1.12)\quad x_2=0;30\times x_1+{x_1}^{-1}=0;30\times 1;30+1;30^{-1}=0;45+0;40=1;25$$

yaklaşıklığını elde ederiz. Bu yaklaşık değere Eski Babil metinlerinde sık sık rastlanır!

1.1.1.3. Eşlenik Alma İşlemi. Bu son yaklaşık değer Louvre Müzesi'ndeki Geç Babilonya Dönemi'ne ait AO 6484 no'lu tabletindeki bir problemin çözümünde geçer:

AO 6484, Problem 8		
Satır	**Çeviri**	**Yorum**
1	Bir eşkenarın en büyük böleni 10 Kuš.	Karenin köşegeni $k=10$ Kuš'tur.
2	Eşkenarın uzunluğu nedir?	Karenin kenarı $a=?$
3	10 × 42 30'u hesapla. O, 7 5'tir, uzunluk.	$a=\frac{k}{\sqrt{2}}\cong 10\times 0;42,30=7;5$
4	7 5 × 1 25'i hesapla. O, 10 2 5'tir, en büyük bölen.	$k=a\times\sqrt{2}\cong 7;5\times 1;25=10;2,5\cong 10$

Tablo 1.1.1. AO 6484 no'lu tabletindeki Problem 8'in metninin bir çevirisi ve yorumu. Bkz. ***Neugebauer*** (MKT 1 (1935), 98), ***Thureau-Dangin*** (TMB (1938), 158), ***Otto Neugebauer*** & ***Abraham J. Sachs*** (The Mathematical Cuneiform Texts, New Heaven, 1945, Sayfa. 43).

Şimdi bulduğumuz 2. yaklaşıklıkla $\sqrt{2}$'nin tersini şu şekilde buluruz:

$$(1.1.13)\quad \sqrt{2}<x_2=1;25\Longrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{1;25}{2}=0;30\times 1;25=0;42,30.$$

Bu, tablodaki 3. satırda geçen $\sqrt{2}$'nin tersi için verilen yaklaşıklık demektir ve buradan karenin bir kenar uzunluğu $10\times 0;42,30=7;5$ Kuš olarak buluruz.

Şu halde bu sonuçla eski Babillilerin $2=\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ eşitliğini yani köklü sayılarda eşlenik alma işlemini bildikleri anlaşılmaktadır. Tabii ki burada $1;25=\frac{17}{12}$'nin tersinin paydasındaki 17'nin düzgün bir sayı olmaması nedeniyle $\sqrt{2}$'nin tersine karşılık gelen 1;25'in tersinin sonlu olmaması rol oynamaktadır.

Üçüncü olarak (1.1.8)'e göre $x_2=1;25$ yaklaşıklığını alırsak,

$$(1.1.14)\quad x_3=0;30\times x_2+{x_2}^{-1}=0;30\times 1;25+1;25^{-1}=0;42,30+0;42,21=1;24,51$$

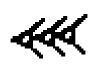
yaklaşıklığını elde ederiz. Burada toplamdaki 0;42,30 sayısı AO 6484 no'lu tablette $\sqrt{2}$'nin tersi için kullanılan sayıdır ve 0;42,21 sayısı da aşağıdaki metotla 1;25'in tersinden elde edilmiştir. Fakat çözümü burada kestiğim için 1;25'in tersinden 0;42,21'in nasıl elde edildiğini veremiyorum. Ama merak eden olursa, onu MS 2317 no'lu tabletindeki 13'ün tersindeki gibi bulabilirsiniz.

Resim 1.1.4. Yale Babilonya koleksiyonundan çivi yazılı bir metin (YBC 7289 no'lu tablet, M.Ö. 1800 civarı). Bu tableti hazırlayan kâtip tarafından köşegenleri, yazı alanına müdahale etmemek için, elle ve kenarları düzgün bir şekilde, muhtemelen bir cetvelle ya da cetvel görevi gören bir çubukla, çizilmiş bir kare şekli vardır. Karenin bir kenarının uzunluğu 3 Parmak'tır.

1.1.2. Tabletteki Metroloji ve Sayılar

Yandaki tabletin üzerinde yazdığıma göre bir köşegenin üzerinde 1;24,51,10 oranı (ki bu, $\sqrt{2}$ sayısına 60 tabanında verilmiş rasyonel bir yaklaşıktır) ve onun altında 0;42,25,35 (ki bu da, 1 El'e yakın olan $6\times 0;42,25,35=4;14,33,30$ ya da $3\times 1;24,51,10=4;14,33,30$ Parmak uzunluğundaki karenin köşegeni için verilmiş sayıdır) sayıları yer almaktadır.

Bu tabletin bir kenarı 0;30 Birim'dir. Çünkü Eski Babil Matematiği'ndeki "0 (Sıfır)" rakamının kullanımı nedeniyle

30 

Babil rakamı hem $30\times 60^0=30$ rakamının hem de 2'nin tersi olan $30\times 60^{-1}=\frac{30}{60}=0;30$ kesrinin gösterimi için kullanılmaktaydı. Fakat tableti ilk kez okuyup yorumlayan ***Otto Neugebauer*** ve ***Abraham Sachs*** bu sayıyı 0;30 değil de yanlışlıkla 30 olarak okudular ve sonraki yorumcuların çoğu günümüzde de geçerli olan bu okuyuşa sadık kaldılar.

İşte sırf bu problem nedeniyle tabletin resimleri üzerinde detaylı bir araştırma yaptım. Bu arada, şimdi Yale Babilonya Koleksiyonu'nda bulunan bu tabletin resimlerini özel aparatlarıyla birlikte, Nikon CoolPix 900 marka adlı fotoğraf makinesiyle orijinale çok yakın ve büyütülmüş halde 2 farklı formatta çekerek bize sunan fotoğrafçı ***Bill Casselman***'a ayrıca teşekkür etmeliyiz. Çünkü onun çalışması olmasaydı, bu gerçeği yakalamam mümkün olmayacaktı!

Şimdi bunun için yukarıdaki tablete dikkatli bir şekilde bakarsanız, tablette ilk dikkat çeken noktanın karenin kenarlarının düzgün bir şekilde çizilmiş olduğunu görürsünüz ve ben de bu biricik gerçekten hareketle ***Casselman***'ın tabletin orijinaline yakın çekmiş olduğu resimler üzerinde gerek elle (cetvel ve pergel kullanarak) gerekse Photoshop, Autocad gibi programlarla birçok ölçüm yaptım. Buraya aktarmamın mümkün olmadığı bu ölçüm sonuçlarıma göre genel olarak şöyle bir sonuç çıktı: Tabletteki karenin en büyük kenarı 0;30 sayısının bulunduğu kenardır ve bu kenarın uzunluğu 51 MM'ye çok yakındır. Bu kenarla birlikte karşısındaki kenar, tablet kırık olmasına rağmen, hemen hemen aynı uzunluktadır; çünkü diğer 2 kenarın da birbirlerine paralel olmaları nedeniyle aynı uzunlukta ama çok küçük sapmalarla bu kenarlardan biraz daha küçük olduklarını gördüm. Bunun nedeni ise, karenin kenarlarının birbirine tam dik bir şekilde çizilememiş olmasıdır.

Diğer yandan bu işin metrolojisine giriştiğimizde, gerek Eski Babil Dönemi'nde (M.Ö. 2000-1600) gerekse önceki dönemlerde (Erken Hanedanlık Dönemi ve Sargon Dönemi (M.Ö. 2350-2200)) kullanılan kübitlere bakıldığında, Sargon Dönemi'nde de geçerli olan ve uzunluğu 0.5 M civarında değişen 1 Kübit'in 3 Çift El'e ve 1 Çift El'in de 10 Parmak'a bölündüğü görülür. Buna göre 1 Parmak yaklaşık olarak 17 MM olmak üzere 1 Kübit 30 Parmak, yani yaklaşık olarak 510 MM'dir. Ama ne ilginçtir ki ölçme işlemlerimin sonucunda da karenin bir kenar uzunluğu, sayının bulunduğu kenar, 51 MM'ye çok yakın çıkmıştı. Buradan karenin bir kenar uzunluğu için $\frac{1}{10}$ Kübit (Kuš (Kuş)) sonucu çıkar.

Şu halde karenin çiziminde kullanılan cetveldeki birimlendirme Sargon Dönemi'nde bile kullanılan kübitlerde yapıldığına göre, karenin bir kenar uzunluğu için verilen 0;30 Birim uzunluğundan

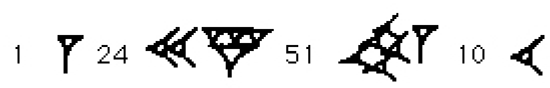
$$(1.1.15)\quad \frac{1}{2}\ \text{Br} = 0;30\ \text{Br} = \frac{1}{10}\ \text{Kübit} \Longrightarrow 1\ \text{Br} = \frac{1}{5}\ \text{Kübit} = \frac{30}{5}\ \text{Parmak} = 6\ \text{Parmak} = 1\ \text{El}\ 1\ \text{Parmak}$$

eşitliklerine göre

$$(1.1.16)\quad 1\ \text{Br} = 6\ \text{Parmak} = 1\ \text{El}\ 1\ \text{Parmak}$$

sonucu çıkar. Demek ki karenin bir kenarındaki 0;30 sayısı gerçekten de bir ölçüm sonucu yazılmış ve bu sayıya karşılık gelen karenin bir kenar uzunluğu 3 Parmak imiş (**Artçı Şok:** Eğer bu bilgilere rağmen hâlâ bu bulgunun doğru olup olmadığını merak eden varsa, burada özetle aktardığım bu karmaşık işlemlere girmek yerine, karenin herhangi bir kenarına 3 parmağını koyarak bu gerçeği derhal görebilir!).

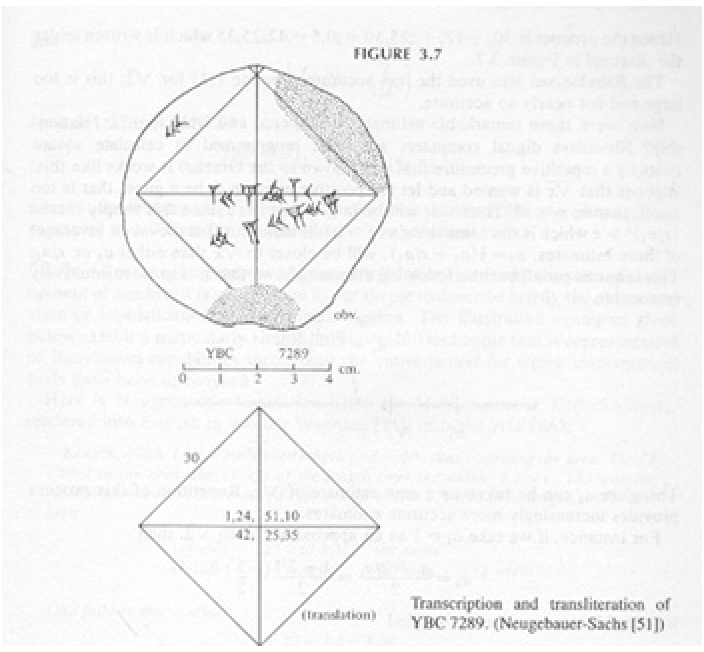
Sonuçta tabletteki metrolojiye göre, karenin bir kenarına yazılan sayı $\frac{1}{2} = \frac{30}{60} = 0;30$ ve $\sqrt{2}$ için bir köşegeni üzerine 60 tabanında



şeklinde yan yana yazılmış 1;24,51,10 yaklaşıklığı verildiğine göre, hemen onun altında

şeklinde yazılmış sayısı da $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \gtrsim 0;42,25,35$ olacak şekilde köşegenin uzunluğunu gösterir. Bu arada yeri gelmişken burada belirtmek gerekir ki, Anglosakson kültüründen gelen İngilizler ve Amerikalıların başında ve sonunda 0 rakamı bulunan bir ondalık sayıyı yazarlarken, 0 rakamını yazmamaları boşuna değil, gereksiz olduğu için, bir kural gereğidir. Örneğin İngiliz Ejiptolog ***Sör William Matthew Flinders Petrie***'nin *"Giza Piramitleri ve Tapınakları, 1883"* adlı çalışmasındaki ölçümlerde elde ettiği ondalık sayılarda bu temel ilkeyi daima kullandığını görebilirsiniz. Ama sonuç ne olursa olsun, bu kuralın Matematik Tarihi'nde bilinen ilk kullanım yerleri başta bu tablet ve Plimpton 322 no'lu tablet olmak üzere diğer ilgili Eski Babil tabletleridir.

1.1.3. Eski Babil Matematiği'ndeki "0 (Sıfır)" Rakamının Kullanımı. Öncelikle bu konuda yorumcuların Eski Babil tabletlerindeki "0" rakamını okuyuşlarına ve sonuçlarına kısaca bir göz atalım. Genelde sıfır rakamının mevcut olduğu Eski Babil tabletlerinde eğer sıfır rakamı bir sayının ara basamaklarından birindeyse, bir karakterlik boşlukla sıfırın yeri belirtildiğinden okuma sorunu yoktu. Örneğin ilk zamanlarda Plimpton 322 no'lu tabletinde 2 tane böyle boşluk vardı ve bu boşlukların sıfır rakamını gösterdiği birçok yorumcu tarafından kabul görmemişti. Çünkü Sıfır'ın Tarihçesi'ne göre bu mümkün değildi. Dolayısıyla bu ve diğer tabletlerdeki sıfır rakamı yerine konan boşlukların onlara göre bir anlamı yoktu. Daha sonra yapılan detaylı araştırmalarda bu boşlukların sıfır rakamı yerine konduğu anlaşılsa da günümüzde hâlâ buna muhalefet eden büyük bir kitle mevcuttur (Bkz. *"Note: The scribe does not use zero, California State University, Los Angeles"*. Bu link şimdi ölü durumdadır ama 2008'de Plimpton 322'deki anılan sıfırlar kabul edilmiyordu!).



Resim 1.1.5. YBC 7289 no'lu tabletteki sayıların ***Neugebauer*** ve ***Sachs*** tarafından okunması. Onlar 1945'te karenin bir kenar uzunluğunu yanlış okuduklarından doğal olarak köşegen uzunluğunu da yanlış okumuş oldular!

İkinci olarak eğer sıfır rakamı bir sayının başında ise, ki ara basamaklarından birinde olduğunda bile sıkı bir muhalefet vardı, probleme göre okuma sorunu vardı. Örneğin **Standart Ters Sayılar Tablosu**'ndaki 2'den 81'e kadar olan düzgün sayıların terslerinin "0" rakamı ile başladığı açık iken, YBC 7289 no'lu tabletindeki karenin bir kenar uzunluğunu veren sayıyı okumada bir problemi vardı. Çünkü bu tabletteki karenin bir kenar uzunluğunu veren sayıyı "30" değil de 2'nin tersi olan "0;30"u okuyabilmeniz için epeyce sağlam delillere sahip olmanız gerekiyordu ve bu da ancak tabletin tam bir analizi yapıldıktan sonra anlaşılmaktaydı. Dolayısıyla bu tableti ilk kez okuyup yorumlayan ***Neugebauer*** ve ***Sachs***'ın böyle bir analize girmeden, doğrudan problemin içine dalmaları nedeniyle karenin kenarındaki sayıyı "0;30" değil de yandaki resimde gördüğünüz gibi yanlışlıkla "30" olarak okumaları açık bir hatayı göstermekteydi. Fakat şimdi bunun doğrusunu 1.1.2'de tamamen sağlam delillerle, ki bu sağlam delilleri elde edebilmek için de bir o kadar Eski Babilonya Metrolojisi'nde koşturdum, sıralı bir şekilde görüyorsunuz. Fakat Eski Babilonya Metrolojisi'nde koşarken kaynaklarda çoğu kez *Büyük Sargon (Şarrukinu: Hükümdar meşru ya da adil kral)* olarak anılan ilk dünya imparatoru ***Sargon I*** ile karşılaşmam ve bu tabletteki karenin çiziminde kullanılan kübitin onun döneminde bile kullanılmış olması, benim için gerçekten de çok şaşırtıcı idi. Hâlâ bu şokun içindeyim!

Şimdi son olarak aynı araştırmacıların incelediği bir başka muhteşem tablet olan Plimpton 322 no'lu tabletindeki, hiç olmazsa, son sütuna yakından bir göz atalım. Çünkü "0" rakamının kullanımı nedeniyle orada da çok ilginç gelişmeler var. Bunun için öncelikle Plimpton 322 no'lu tabletin son sütun başlığının,

"(Robson) Köşegen kareden (ÍB.SI şiliptim) 1 çekildiğinde (çıkarıldığında) kısa kenar kare (ÍB.SI SAG), daha doğrusu kısa kenar kareye 1 br^2 eklendiğinde köşegen kare gelir ([ta]-ki-il-ti şi-li-ip-tim [ša 1 in]-na-as-sà-hu-ma SAG i-il-lu-ú)"

çözümlenmiş şeklini göz önüne alırsak (bkz. "*Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322*", S. 192), tabletteki 15 dik üçgenin tabanları a_n, yükseklikleri h_n ve hipotenüsleri r_n ise $a_n^2 + h_n^2 = r_n^2$ bağıntısından

$$(1.1.17) \quad 1 + \left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2 = \left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2$$

şeklinde sütun başlığında verilen kural elde edilir ve bu durumda aşağıda 2 ana başlıkta topladığım şu inanılmaz gelişmeler ortaya çıkar:

1. **"0" Rakamının Kullanımı:** 1. Satır-4. Sütun'daki

$$(1.1.18) \quad \left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a_1}{h_1}\right)^2 = 1 + \left(\frac{119}{120}\right)^2 = 1 + 0;59{,}0{,}15 = 1;59{,}0{,}15$$

sayısının hesabında 0 rakamının kullanımı 2 farklı yerde karşımıza çıkar. İlkin sütun başlığında verilen hesap kuralı nedeniyle 0;59,0,15 sayısının başında (tam kısmında) 0 rakamı vardır. İkinci olarak hem bu sayının hem de kural nedeniyle bu sayının 1 ile toplamından elde edilen 1;59,0,15 sayısının 3600'de 1'ler basamağında 0 rakamı bulunmaktadır. Fakat tabletin bu bölümü hasarlı olduğundan bu sayıdaki 0 rakamına karşılık gelen boşluk belli-belirsiz görülmektedir. Dolayısıyla orada 0 için konulan boşluk tartışmalı olmakla birlikte açık bir şekilde görülemiyor!

Aynı şekilde 13. Satır-4. Sütun'daki

$$(1.1.19) \quad \left(\frac{r_{13}}{h_{13}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a_{13}}{h_{13}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{161}{240}\right)^2 = 1 + 0;27{,}0{,}3{,}45 = 1;27{,}0{,}3{,}45$$

sayısında 0 rakamı aynı pozisyonlara sahiptir. Tablette bu sayının bulunduğu bölüm temiz olduğundan buradaki 0 rakamı için konulan boşluk büyükçe bir şekilde, adeta kabak gibi görülmektedir. Ben bu durumu tablette ilk gördüğümde (ki 0 rakamını en anlamlı olarak gördüğüm ilk yer burasıydı), aklıma 13'ün uğursuz değil uğurlu bir sayı olduğu gelmişti!

Şu halde bu sonuçlara göre bu tabletin son sütunun başlığında verilen hesap kuralı nedeniyle 0 rakamıyla başlayan yani tam kısımları 0 olan 15 tane sayı vardır demektir ve biz yalnızca tabletteki sayıları gördüğümüz için, 1. ve 13. satırlardaki sayıların 3600'de 1'ler basamağındaki 0 rakamına karşılık gelen boşlukları görüyoruz.

2. **"1" Rakamı İçin İlginç Bulgular:** Bu konuda bilinen tek bir şey varsa, o da bu tabletin sol tarafının son sütundaki sayıların 1'ler basamağındaki rakamların bulunduğu hat, daha açık bir deyişle "1" rakamlarının olduğu hat boyunca kırık olmasıdır. Fakat bu kırıklık doğal olmaktan ziyade adeta bir bıçak keskinliğinde son derece temizdir ve burada modern bir yapıştırıcı (zamk gibi) izleri görülmektedir. Bundan, kökeni meçhul olan bu tabletin toprak altından bütün olarak çıktığı ve sonradan kırıldığı, diğer parçasının belki de bilinmeyen bir yerde olduğu sanılmaktadır.

Resim 1.1.6. *Edgar J. Banks.* Fotoğraf Bismaya ya da kayıp şehir Adab'dan, 1908.

Ancak İngiliz araştırmacı ***Dr. Eleanor Robson***, tableti 1922'lerde ilk Western sahibi ve The New York yayıncısı ***George Arthur Plimpton***'a (ki 1936'da, ölümünden önce, tarihi matematiksel kitaplar ve sanatla ilgili parçalardan oluşan koleksiyonunu Columbia Üniversitesi'ne verilmesini vasiyet eden kimsedir) 10 $'a satan ünlü antika satıcısı ***Edgar J. Banks***'ten (ki şimdi arkeolojik bir site olan modern Tell Senkereh/Irak'ın güneyindeki Larsa'dan geldiğini söyleyen yandaki resimdeki kişi) şüphelenmektedir. Bu nedenle konuyla ilgili ***Robson***'ın 2001'deki ilk çalışmasının 171. ve 172. sayfalarına baktığımızda (bkz. "*Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322*"), bir zamanlar Eski Mısır'a ait buluntuların başına gelenlerin ne yazık ki burada da tekrarlandığını görüyoruz!

İşte bu nedenle aşağıdaki araştırmacıların bulguları son derece önem arz eder:

2.1. ***Neugebauer*** ve ***Sachs***, $\frac{a_n}{h_n}$ oranını kullanmalarına rağmen bu oranın karesi olan $\left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2$'yi kullanmadılar. Çünkü $a_n^2 + h_n^2 = r_n^2$ ilişkisi nedeniyle $1 + \left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2 = \left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2$ bağıntısı mevcut idi ve bu yüzden onlar son sütundaki sayıların kesir kısımlarını veren $\left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2$'nin başına "1" rakamının gelmesi gerektiğine inanıyorlardı. Fakat diğer araştırmacılar onlarla aynı fikirde değildi (Bkz. *"Otto Neugebauer & Abraham J. Sachs: The Mathematical Cuneiform Texts, New Heaven, 1945"*, Sayfa. 38-41).

Daha sonra **Neugebauer**, *"Eski matematikçiler yalnızca Pisagor 3'lülerinin tanımıyla değil ama $\frac{r_n}{h_n}$ oranlarıyla da ilgileniyorlardı"* derken son sütundaki sayıların hangi rakamla başlaması gerektiğini açık hale getirmiş ve tabletteki 15 dik üçgenin dar açılarının birinci (kural gereğince tabletteki) kullanımda 45°'den 30°'ye kadar monoton azaldığına ve ikinci kullanımda 45°'den 60°'ye kadar monoton arttığına ilişkin bir çifte kullanımdan bahsetti (Bkz. *"Otto Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity (1951,1957,1969), 2nd ed./Princeton, NJ: Brown University Press; reprint ed./New York: Dover, 1969"*, Sayfa. 37).

Not 1.1.1. Burada ***Neugebauer ve Sachs***'ın görüşlerini ***"Antik Matematiksel Astronomi Plimpton 322 No'lu Tabletinde Bir Dedektiflik Çalışması, 2006"*** adlı makaleme göre değerlendirdim. Ancak burada beni asıl şaşırtan şey, şimdiye kadar orijinal çalışmalarına erişemediğim ama "Google e-Book Search" ile 04.03.2008 (Kayıt Saati: 04:36:50) tarihinde erişebildiğim diğer kaynaklardan öğrendiğime göre, bu 2 araştırmacının görüşlerinin çalışmamdan çıkan sonuçlarla paralel olması idi. Ayrıca bu tabletin son sütundaki sayıların ***Neugebauer ve Sachs***'ın 1945'teki ilk çıkarımına dayanılarak "0" rakamı ile başladığını "*H. L. Resnikoff & Raymond O'Neil Wells: Mathematics in Civilization*, 1984, Sayfa. 74"teki tabloda ve ***Neugebauer***'in 1951'deki ikinci çıkarımına dayanılarak "1" rakamı ile başladığını "*Eli Maor: The Pythagorean Theorem: A 4,000-Year History*, 2007, Sayfa. 259/9"daki tabloda görebilirsiniz. Buna göre bu son tablonun son sütunundaki sayılardan 10.,11.,12. ve 14. satırdakilerinin başında "1" rakamının tablette açık bir şekilde görüldüğü geçmektedir.

2.2. ***Robson***, son sütun başlığını "I. (Hasarlı) $\left(\frac{r_n}{h_n}\right)^2 \vee \left(\frac{a_n}{h_n}\right)^2$" şeklinde vermiş ama bu sütundaki her sayının, tercihini ilk seçimden yana kullanarak (ki hiçbir satırda okunamayan, dolayısıyla köşeli parantezler içinde verilen), "1" rakamıyla başladığını belirtmiştir (Bkz. *"Eleanor ROBSON: Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton 322, Historia Math. 28 (2001), 167–206/173"*).

Robson, daha sonra M.Ö. 1900-1800 tarihli YBC 6967 no'lu tabletindeki Problem 20'den hareketle son sütun başlığını

[*ta*]-*ki-il-ti ṣi-li-ip-tim* [*ša* 1 *in*]-*na-as-sà-ḫu-ma* SAG *i-il-lu-ú*	ÍB.SI$_8$ SAG	ÍB.SI$_8$ *ṣi-li-ip-tim*	MU.BI.IM
[(1) 59] 00 15	1 59	2 49	KI.1
[(1) 56 56] 58 14 50 06 15	56 07	1 20 25	KI.2
[(1) 55 07] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	KI.3
(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	KI.4
(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	KI.[5]
(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	[KI.6]
(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	KI.7
(1) 41 33 45 14 3 45	13 19	20 49	KI.8
(1) 38 33 36 36	8 01	12 49	KI.9
(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	KI.10
(1) 33 45	45	1 15	KI.11
(1) 29 21 54 2 15	27 59	48 49	KI.12
(1) 27 00 03 45	2 41	4 49	KI.13
(1) 25 48 51 35 6 40	29 31	53 49	KI.14
(1) 23 13 46 40	28	53	KI.15

Figure 3. Transliteration of Plimpton 322.

Tablo 1.1.2. ***Robson***'a göre Plimpton 322 no'lu tabletin çevirisi. Bu tablodaki köşeli parantezler içinde verilen bölümler tabletteki hasarlı yerleri, dolayısıyla okunamayan yerleri ve küçük parantezler içinde verilen bölümler yani "1" rakamının bulunduğu bölümler ise tabletteki okunması çok güç olan yerleri göstermektedir. Buna göre ***Robson*** tabletin sol tarafındaki "1"lerin hiç okunamadığını söyler.

şeklinde çözdükten sonra, bu sütundaki sayıların kesinlikle "1" rakamıyla başladığını ama bu rakamın hiçbir satırda okunamadığını bildirdi (Bkz. *"Words and Pictures: New Light on Plimpton 322, The Mathematical Association of America, Monthly 109 (Şubat 2002)"*, Sayfa: 105-120/107).

2.3. YBC 7289 no'lu tabletin resimlerini çekerek tüm dünyaya tanıtılmasını sağlayan ünlü araştırmacı-fotoğrafçı ***Bill Casselman*** ise, 2003'te tabletin son sütunundaki 14. satırdaki sayının başındaki "1" rakamının okunabildiğini bildiriyor. Ancak bu ilginç bulgu tabletin bir siyah-beyaz imajında doğruymuş gibi gözükmesine rağmen renkli imajlarına geçildiğinde aynı şeyi söylemenin çok zor olduğu görünmektedir. Bana göre bu durum, büyük bir ihtimalle tabletin sol tarafındaki kırıklığın bu kısımda "1" rakamı gibi görüntü vermesinden kaynaklanıyordu (Bkz. *"Bill Casselman: The Babylonian tablet Plimpton 322"*).

2.4. Bu tabletteki bulguma geçmeden önce, tabletin son durumunu ve son sütundaki bulguları kısaca değerlendirmek istiyorum. Öncelikle bu tablet toprak altından çıkarılırken 2. sütun boyunca kırık olarak 2 parça halinde çıkarılmış olduğu anlaşılmaktadır ama, sol taraftaki yani 4. sütundaki "1" rakamlarının bulunduğu hat boyunca oluşan kırıklık keskin bir şekilde olup ilkindeki gibi doğal değildir. Dolayısıyla tableti ilk kez okuyup yorumlayan ***Neugebauer*** ve ***Sachs,*** 1945'teki ilk çalışmalarında bu sütundaki sayıların okunuşlarında bir çekince koyarak yani bu sayıların tabletteki mevcut okunuşlarını vererek, dik üçgendeki metrik bağıntı nedeniyle bu sayıların başına "1" rakamının gelmesi gerektiğine inandılar. Daha sonra ***Neugebauer*** 1951, 1957 ve 1969'daki çalışmalarında konuya bir açıklık getirmeye çalışsa da son sütundaki başlık ve buradaki sayıların doğru okunuşu açıklığa kavuşamamış ve diğerlerinin yorumları da konuya bir açıklık getirememiştir.

Çok sonraları bu yorumlara dayanan ***Robson***, ilkin 2001'deki çalışmasında son sütundaki sayıların okunuşu için 2 farklı kuralla birlikte ***Neugebauer*** ve ***Sachs***'ın inancını dile getirirken (ama bunu yaparken de hiçbir satırda "1" rakamının okunamadığını belirtiyor), 2002'deki ikinci çalışmasında bu tablet ile YBC 6967 no'lu tabletindeki Problem 20'yi karşılaştırarak, tabletin kırık yerlerinde bulunan son sütunun 1. ve 2. satır başlangıcındaki **"[ta]"** ve **"[ša 1 in]"** eklerini keşfederek ***Neugebauer*** ve ***Sachs***'ın yorumunu düzeltir ve böylece son sütun başlığını tamamlamış olur.

Fakat bu yorumlarla birlikte son zamanlarda bazı araştırmacıların son sütundaki bazı (10., 11., 12. ve 14. satırlardaki) sayıların başında "1" rakamını görmesi ve ***Robson*** tarafından keşfedilen eklerle sütun başlığının tamamen okunabilir hale gelmesi, bir yerde halüsinasyon görmekten ibaret olan olaylar idi. Yani bunları ispat etmek mümkün değildi. Bu nedenle bu tabletin orijinal resmine bakmak için internetten Columbia Üniversitesi'ndeki Plimpton Kütüphanesi'ne girdim. Amacım bu tabletin orijinal resmi ile diğer resimlerini karşılaştırarak Photoshop ile farkları ortaya çıkartmak idi. Çünkü bu tablete ait çekilen resimlerde ışığın miktarı ve geliş açısı son derece önemliydi. Örneğin bir resimde tablete çok güçlü (projektörle) bir ışık verilmiş ama yansımalar nedeniyle bazı detaylar fark edilemiyordu. Yani her resim tabletin farklı detaylarını veriyordu. Bu arada, YBC 7289 no'lu tabletin resimleri için gösterilen özenin bu tablette gösterilememiş olması, bizim için çok büyük bir talihsizlik ama diğerleri için çok daha büyük bir talihsizlik olmuştur. Çünkü aşağıdaki bulgum bunu kesinlikle doğrular niteliktedir.

Demek ki zamanında dikkat edememişim ve yorumculara güvendiğimden olsa gerek, o sırada şimdiye kadar fark edemediğim şu şok geçirtici bulguyla karşılaştım:

Resim 1.1.7. Plimpton 322 No'lu Tabletindeki 4. Satır-4. Sütun'daki Sayı: 1; 50[+3], 10, 29, 32, 52, 16 (Columbia Üniversitesi Kütüphaneleri, Plimpton Kütüphanesi, 20.02.2008, Giriş Saati: 17:43:40, Keşif Saati: 18:08)

İlk resim, bu tabletin 4. Satır-4. Sütun'undaki sayıya ait orijinal resimdir ve onun altındakiyse bu orijinal resmin 2 kat büyütülmüş halidir. ***Neugebauer,*** bu sayıyı okurken 1'i okuyamadığını ama var olması gerektiğini, 1'den sonra gelen 53 rakamındaki 50'yi tamamen, 10 rakamını zayıf bir şekilde ve sonraki rakamları ise tamamen gördüğünü söylüyor. Fakat 50 rakamını okuyan ***Neugebauer***, nasıl oluyor da ondan önceki 1 rakamını göremiyor diye insanın hayıflanmaması mümkün değil. Çünkü burada halüsinasyon görmüyorsam, ki öyledir ve bu görüntü tabletteki herhangi bir kırıklıktan da meydana gelmiş değildir, 1 rakamı kendini açık bir şekilde gösteriyor: Dikkat ederseniz 1 rakamı, 50'nin hemen solunda, bütün gövdesiyle birlikte her 2 resimde adeta *"Ben buradayım, arkadaş. Ama sen okuyamıyorsan ben ne yapayım!"* diyor. Bu bir.

İkinci olarak bu araştırmam sırasında son sütundaki 2. ve 3. satırlarda da yakın bir zamanda yapıldığı belli olan bazı rötuşlar gördüm. Ancak Photoshop ile görebildiğim ve elle yapıldığı anlaşılan bu rötuşlardan "53, K, 55, 1426" karakterlerini okudum. Bu bir şifre mi? Çünkü bunların tabletteki sayılarla pek bir ilgisi yok. Belki de tabletteki sayıları okumaya çalışan acemi birinin izleri olabilir diyeceğim ama bu sefer de "1426"nın tabletteki sayılarla hiçbir ilgisi yok. Yani diğer karakterleri yanlış okusam bile (ki tablete çıplak gözle baktığımda bu karakterler görülmüyordu ancak Photoshop ile güç-bela okuyabildim), "1426" sayısı 3. satırdaki sayının son rakamı olan 45'in üzerinde, biraz dikkatli bir şekilde bakıldığında çıplak gözle bile, açıkça okunabilmekte ve muhtemelen keşfedildikten hemen sonra tablete konulan ilk envanter numara bu olsa gerek!

Şu halde bu bulgularıma göre Plimpton 322 no'lu tabletle oynandığı ve bu tabletin 4. Satır-4. Sütun'daki sayının başındaki "1" rakamının açık bir şekilde görüldüğü, dolayısıyla son sütundaki diğer sayıların da "1" rakamıyla başlaması gerektiği sonucu çıkmaktadır. Bununla birlikte Eski Babilonya Matematiği'ndeki "0" rakamının kullanımı da şu şekilde ortaya çıkmış olur: Eğer 60 tabanlı bir sayının başında ve/veya sonunda 0 rakamı varsa yazılmaz yani boşluk bırakılmaz. Örnekse YBC 7289 no'lu tabletindeki 0;30 ve 0;42,25,35. Ama ara basamaklarda 0 rakamı varsa bulunduğu basamaklardaki birimin yokluğunu belirtmek için, dolayısıyla basamakların karışmasını önlemek için bir boşluk bırakılır. Örnekse Plimpton 322 no'lu tabletindeki 1;59,0,15 ve 1;27,0,3,45 sayıları.

Şimdi "0" ve "1" rakamları için 2 ana başlık altında verdiğim bu bilgilerden sonra hâlâ bu bulgulara, dolayısıyla Eski Babilonya Matematiği'ndeki "0" rakamının kullanımına itiraz edecek olanlar varsa acilen bir doktora görünsünler. Çünkü burada halüsinasyonlardan bahsetmiyorum; gerçeklerden söz ediyorum. Bu konuda özellikle Batılıların emperyalist politikaları gereğince çok hassas olduklarını biliyoruz. Örneğin ***Bill Casselman*** 2003'te Plimpton 322 no'lu tabletin 14. Satır-4. Sütun'daki sayının başında "1" rakamını okurken, ***Eli Maor*** bunu 2007'de Tablo 1.1'de 10-12 ve 14. satırlarda görmüştü ve ben de Resim 1.1.7'de 4. Satır-4. Sütun'un başındaki "1" rakamının mevcut olduğunu ispat ettim. Ama şimdi, 2011 tarihli "*Plimpton 322:A Review And A Different Perspective*" makalesini yazan ***John P. Britton***, ***Christine Proust*** ve ***Steve Shnider***, Tablo 1'de 1-4 ve 10-11. satırlar hariç diğer satırlarda "1" rakamlarının okunabildiğini bildiriyorlar. Demek ki tabletin sol tarafını tam kıramamışlar!

1.1.4. 2. Çözüm (Tabletteki $\sqrt{2}$ İçin Verilen 1;24,51,10'nun Keşfi). Eski Babilonya Matematiği'ne göre tablette $\sqrt{2}$ için 60 tabanında verilen 1;24,51,10 değerini şu şekilde keşfettim:

$\sqrt{2}$'ye 60 Tabanındaki Yaklaşıklıklar, 06.12.2021, 06:25:18-39							
Karenin YBC 7289'a Göre Geometrik Serideki Konumu	n	$[\![2^n\sqrt{2}]\!]$		$k=2^n\sqrt{2}$	$[\![2^n\sqrt{2}]\!]+1$		$\sqrt{2}\simeq\dfrac{2[\![2^n\sqrt{2}]\!]+1}{2^{n+1}}$
		60 tabanında	10 tabanında		10 tabanında	60 tabanında	
2	0	1	1	1.414213562…	2	2	1;30
3	1	2	2	2.828427124…	3	3	1;15
5	2	5	5	5.656854249…	6	6	1;22,30
7	3	11	11	11.31370849…	12	12	1;26,15
9	4	22	22	22.62741699…	23	23	1;24,22,30
11	5	45	45	45.25483399…	46	46	1;25,18,45
13	6	1,30	90	90.50966799…	91	1,31	1;24,50,37,30
15	7	3,1	181	181.0193359…	182	3,2	1;25,04,41,15
17	8	6,2	362	362.0386719…	363	6,3	1;24,57,39,22,30
19	9	12,4	724	724.0773439…	725	12,5	1;24,54,08,26,15
21	10	24,8	1448	1448.154687…	1449	24,9	1;24,52,22,58,07,30
23	11	48,16	2896	2896.309375…	2897	48,17	1;24,51,30,14,03,45
25	12	1,36,32	5792	5792.618751…	5793	1,36,33	1;24,51,03,52,01,52,30
27	13	3,13,5	11585	11585.23750…	11586	3,13,6	1;24,51,17,03,02,48,45
29	14	6,26,10	23170	23170.47500…	23171	6,26,11	1;24,51,10,27,32,20,37
31	15	12,52,20	46340	46340.95001…	46341	12,52,21	1;24,51,07,09,47,06,33
33	16	25,44,41	92681	92681.90002…	92682	25,44,42	1;24,51,08,48,39,43,35
35	17	51,29,23	185363	185363.8000…	185364	51,29,24	1;24,51,09,38,06,02,06
37	18	1,42,58,47	370727	370727.6000…	370728	1,42,58,48	1;24,51,10,02,49,11,22
39	19	3,25,57,35	741455	741455.2001…	741456	3,25,57,36	1;24,51,10,15,10,45,59
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tablo 1.1.2. $\sqrt{2}$'ye 60 tabanında yaklaşımlar (**Not.** Tablonun başındaki saniyelerde baştaki Mathematica dosyasının açıldığı ve sondaki kaydedildiği saatleri gösterir). İlk sütunda k köşegeninin YBC 7289 no'lu tablete göre iç içe geçmiş (iç teğet) geometrik serideki karelerden hangi karede yer aldığı gösterilmektedir. Bkz. *Tablo 3.1*. Son sütunda kırmızı renkli olanlar hatalı rakamları gösterir ve oradaki $\forall m\in\mathbb{N}$ için $n=2^m-1=0,1,3,7,\cdots$ formunda olmayan her bir yaklaşıklık kendisinden önceki 2 yaklaşıklığın aritmetik ortalamasıdır.

Öncelikle bu tabloya baktığımda ilkin şu sonucu görüyorum: Anlaşılan o ki eski Babilli kâtip eski Mısır'daki birim kesirlerin yazılmasındaki gibi aritmetik ortalama metodu altında 2'ye bölmeyi kullanmış. Ama kâtibin son sütundaki değerleri elde edebilmek için altına girdiği hesap gerçekten de korkutucu. Çünkü 7. satırdan itibaren resmen patladım. Ama neyse ki onun da kolay bir yolu varmış: k köşegenin alt ve üst sınırları bir öncekinin ya 2 katıdır ya da 2 katından 1 fazla. Tabloda deniz mavisiyle koyulaştırdığım satırlar, Mod 2'deki 0 ve 1 kalanlarına göre, alt sınırlarda bir öncekinin 2 katından 1 fazlasını ve üst sınırlarda bir öncekinin 2 katını gösteriyor. İşte bu sonuç kâtibi hesaplarda büyük bir zahmetten kurtarıyordu.

Diğer sonuçlar şöyledir:

1. Eski Babillilerin iç içe geçmiş karelerdeki $k=2^n\sqrt{2}=\sqrt{2.2^{2n}}=\sqrt{2^{2n+1}}$ köşegenine (1.1.10)'daki algoritmayla tam ve rasyonel yaklaşımlarda bulunduklarını biliyoruz. Burada iç içe geçmiş kareler BM 15285 no'lu tabletteki örneklerde 2 ya da 3 tane olarak görülür (Bkz. *2. Parça*, *4. Parça* ve *5. Parça*). Bununla birlikte köşegenin $k=\sqrt{2^{2n+1}}$ şeklinde yazılması, karelerin alanların oranının karekökünden geliyordu (Bkz. "*Proof of the Irrationality of the Square Root of 2 Contained in Babylonian Geometry Problem Tablets*").

Diğer Tabletler: Tablodaki hesaplar için baş kaynağımız ***Neugebauer***'in "*Rechentabellen zur sumerisch-akkadischen Mathematik*" adlı kitabı olacaktır (Arşivdeki Yeri: "*Babylonische Rechentabellen undated*" ve Bulunduğu Sayfa: "*Babylonische Rechentabellen*"). Yani bu kitaptaki ilgili tabloların eski Babil tabletlerinde mevcut olup olmadığını araştıracağız. Örneğin $k^2=2^{2n+1}$ eşitliğindeki 2'nin kuvvetleri eski Babil tabletlerinde mevcut mudur? Bu konuda elimizde $9^0,9^2,\cdots,9^{46}$ ve $9^{11},9^{11}.12,9^{11}.12^2,\cdots,9^{11}.12^{40}$ gibi inanılmaz kuvvet hesaplarının yapıldığı tabletler vardır (Bkz. "*The Power of 9 and Related Mathematical Tables From Babylon*", "*Die Mathematik der Babylonier*" vb.). Çok ilginçtir, bu dizilerin sonundaki sayılar satranç tahtasının son karesine konulan buğday sayısından daha büyüktürler. Ama Hintlilerin 2^{63} sayısını hesaplayabildiklerinden pek emin değilim (Bkz. "*Satranç ve Buğday Hikâyesi*"). Çünkü tablonun sonundaki köşegenin karesini yani $n=19$ için $k_{19}=\sqrt{2^{2.19+1}}=\sqrt{2^{39}}$ olduğunu göz önüne alırsanız 2^{63}'ün hesabının kolay olmadığını görürsünüz!

2. Buna göre eski Babilliler, 5. sütundaki k köşegenin hangi ardışık 2 tam sayı arasında yer aldığını yani 3. ve 7. (ya da 4. ve 6.) sütunlardaki tam değerleri bulabiliyorlardı.

Yani kâtip tablodaki karelerin köşegenlerini 60 tabanında

$$(1.1.20)\quad \begin{cases} k_0=\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1}>1, & k_{11}=\sqrt{2^{23}}=\sqrt{38,50,10,8}=\sqrt{48,16^2+29,52}>48,16,\\ k_2=\sqrt{2^5}=\sqrt{32}=\sqrt{5^2+7}>5, & k_{12}=\sqrt{2^{25}}=\sqrt{2,35,20,40,32}=\sqrt{1,36,32^2+1,59,28}>1,36,32,\\ k_3=\sqrt{2^7}=\sqrt{2,8}=\sqrt{11^2+7}>11, & k_{13}=\sqrt{2^{27}}=\sqrt{10,21,22,42,8}=\sqrt{3,13,5^2+1,31,43}>3,13,5,\\ k_4=\sqrt{2^9}=\sqrt{8,32}=\sqrt{22^2+28}>22, & k_{14}=\sqrt{2^{29}}=\sqrt{41,25,30,48,32}=\sqrt{6,26,10^2+6,6,52}>6,26,10,\\ k_5=\sqrt{2^{11}}=\sqrt{34,8}=\sqrt{45^2+23}>45, & k_{15}=\sqrt{2^{31}}=\sqrt{2,45,42,3,14,8}=\sqrt{12,52,20^2+24,27,28}>12,52,20,\\ k_6=\sqrt{2^{13}}=\sqrt{2,16,32}=\sqrt{1,30^2+1,32}>1,30, & k_{16}=\sqrt{2^{33}}=\sqrt{11,2,48,12,56,32}=\sqrt{25,44,41^2+46,20,31}>25,44,41,\\ k_7=\sqrt{2^{15}}=\sqrt{9,6,8}=\sqrt{3,1^2+7}>3,1, & k_{17}=\sqrt{2^{35}}=\sqrt{44,11,12,51,46,8}=\sqrt{51,29,23^2+1,22,23,19}>51,29,23,\\ k_8=\sqrt{2^{17}}=\sqrt{36,24,32}=\sqrt{6,2^2+28}>6,2, & k_{18}=\sqrt{2^{37}}=\sqrt{2,56,44,51,27,4,32}=\sqrt{1,42,58,47^2+2,3,35,43}>1,42,58,47,\\ k_9=\sqrt{2^{19}}=\sqrt{2,25,38,8}=\sqrt{12,4^2+1,52}>12,4, & k_{19}=\sqrt{2^{39}}=\sqrt{11,46,59,25,48,18,8}=\sqrt{3,25,57,35^2+1,22,27,43}>3,25,57,35,\\ k_{10}=\sqrt{2^{21}}=\sqrt{9,42,32,32}=\sqrt{24,8^2+7,28}>24,8, & \vdots \end{cases}$$

şeklinde hesaplarken, bunlar 10 tabanında şunlara karşılık gelir:

$$(1.1.21)\quad \begin{cases} k_0=\sqrt{2^{2.0+1}}=\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1}>1, & k_{11}=\sqrt{2^{2.11+1}}=\sqrt{2^{23}}=\sqrt{8.388.608}=\sqrt{2896^2+1792}>2896,\\ k_2=\sqrt{2^{2.2+1}}=\sqrt{2^5}=\sqrt{32}=\sqrt{5^2+7}>5, & k_{12}=\sqrt{2^{2.12+1}}=\sqrt{2^{25}}=\sqrt{33.554.432}=\sqrt{5792^2+7168}>5792,\\ k_3=\sqrt{2^{2.3+1}}=\sqrt{2^7}=\sqrt{128}=\sqrt{11^2+7}>11, & k_{13}=\sqrt{2^{2.13+1}}=\sqrt{2^{27}}=\sqrt{134.217.728}=\sqrt{11585^2+5503}>11585,\\ k_4=\sqrt{2^{2.4+1}}=\sqrt{2^9}=\sqrt{512}=\sqrt{22^2+28}>22, & k_{14}=\sqrt{2^{2.14+1}}=\sqrt{2^{29}}=\sqrt{536.870.912}=\sqrt{23170^2+22012}>23170,\\ k_5=\sqrt{2^{2.5+1}}=\sqrt{2^{11}}=\sqrt{2.048}=\sqrt{45^2+23}>45, & k_{15}=\sqrt{2^{2.15+1}}=\sqrt{2^{31}}=\sqrt{2.147.483.648}=\sqrt{46340^2+88048}>46340,\\ k_6=\sqrt{2^{2.6+1}}=\sqrt{2^{13}}=\sqrt{8.192}=\sqrt{90^2+92}>90, & k_{16}=\sqrt{2^{2.16+1}}=\sqrt{2^{33}}=\sqrt{8.589.934.592}=\sqrt{92681^2+166831}>92681,\\ k_7=\sqrt{2^{2.7+1}}=\sqrt{2^{15}}=\sqrt{32.768}=\sqrt{181^2+7}>181, & k_{17}=\sqrt{2^{2.17+1}}=\sqrt{2^{35}}=\sqrt{34.359.738.368}=\sqrt{185363^2+296599}>185363,\\ k_8=\sqrt{2^{2.8+1}}=\sqrt{2^{17}}=\sqrt{131.072}=\sqrt{362^2+28}>362, & k_{18}=\sqrt{2^{2.18+1}}=\sqrt{2^{37}}=\sqrt{137.438.953.472}=\sqrt{370727^2+444943}>370727,\\ k_9=\sqrt{2^{2.9+1}}=\sqrt{2^{19}}=\sqrt{524.288}=\sqrt{724^2+112}>724, & k_{19}=\sqrt{2^{2.19+1}}=\sqrt{2^{39}}=\sqrt{549.755.813.888}=\sqrt{741455^2+296863}>741455,\\ k_{10}=\sqrt{2^{2.10+1}}=\sqrt{2^{21}}=\sqrt{2.097.152}=\sqrt{1448^2+448}>1448, & \vdots \end{cases}$$

Bunları tabloda 60 tabanında 3 ve 7. sütunlarda ve 10 tabanında da 4 ve 6. sütunlarda verdim. Burada k_n köşegeninin tam kısmından büyük ve tam kısmının 1 fazlasından küçük yani matematiksel olarak,

$$(1.1.22)\quad [\![k_n]\!]<k_n<[\![k_n]\!]+1$$

olduğuna dikkat ediniz!

3. Son sütunda ise k_n köşegeninin $[\![k_n]\!]$ ve $[\![k_n]\!]+1$ alt ve üst sınırlarının aritmetik ortalamasının 60 tabanındaki değerleri vardır. Eski Babilliler bunu da biliyorlardı. Bunun için eğer dikkat ederseniz son sütunda $\sqrt{2}$'nin basamakları bazı satırlarda (9, 13, 29. satırlar) istikrarsız olsa da genelde istikrarlı bir şekilde teker teker ortaya çıkmaktadır. Tabloda vurgulamak istediğim bu idi. Çünkü "*EK 1: YBC 7289 No'lu Tablette √2 İçin Verilen 1;24,51,10 Yaklaşıklılığının Bulunması*"ndaki son paragrafta verdiğim sonuç bu idi. Orada şöyle demiştim: *"Hangi yöntemi kullanırsanız kullanın, 1;24,51,10'un bulduktan sonra bunun tüm basamaklarının doğru olduğunu bir sonraki yaklaşımda da onaylamanız gerekir!"*

İşte tabloda 18, 19. ve sonraki satırlarda hep bu sonucu yani 1;24,51,10'u görüyoruz. Bu ise kâtibin hedeflediği sonuç idi!

4. Öncelikle n-inci satırdaki k_n köşegeni için $[\![k_n]\!]\le k_n<[\![k_n]\!]+1$ temel çifte eşitsizliğine göre $n+1$-inci satırda, özellikle tabloda koyulaştırdığım satırlarda alt sınırda bundan daha kuvvetli olan

$$(1.1.23)\quad [\![k_n]\!]+\frac{1}{2}<k_n=k_{n+1}-k_n<[\![k_n]\!]+1$$

eşitsizliklerinin geçerli olduğuna dikkat etmek gerekiyor.

Burada eğer $k_{n+1}=2k_n$ eşitliğini göz önüne alırsak k_{n+1} köşegeni için

$$(1.1.24)\quad 2[\![k_n]\!]+1<k_{n+1}<2[\![k_n]\!]+2$$

eşitsizlikleri geçerli olur.

Şu halde (1.1.24)'e göre tablodaki tüm satırlar için

$$(1.1.25)\quad \begin{cases} 2[\![k_n]\!]+1<k_{n+1}, & \text{Tablodaki koyu satırlarda}\\ k_{n+1}<2[\![k_n]\!]+1, & \text{Tablodaki koyu olmayan satırlarda} \end{cases}$$

ya da

$$(1.1.26)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}<k_n-[\![k_n]\!]<1, & \text{Tablodaki } (n+1)\text{. koyu satırda}\\ 0<k_n-[\![k_n]\!]<\frac{1}{2}, & \text{Tablodaki } (n+1)\text{. koyu olmayan satırda} \end{cases}$$

sonuçları geçerli olur.

5. Eğer (1.1.10)'daki algoritmayla $n=1,2,3,4,5,6$ için $k_n=2^n\sqrt{2}=\sqrt{2^{2n+1}}$ köşegeninden hareketle $\sqrt{2}$'ye rasyonel yaklaşımlarda bulunursak tablonun son sütunundaki değerlerden daha iyi sonuçlar elde ederiz ama n değeri büyüdükçe b'yi $n=4$'te olduğu gibi düzgün bir sayı olarak elde etme ihtimali zayıflar!

Bunun için eğer $n = 1,2,3,4,5,6$ için $k_n = 2^n\sqrt{2} = \sqrt{2^{2n+1}}$ köşegeninde (1.1.10)'daki algoritmaya göre $\sqrt{2}$'ye rasyonel yaklaşımlarda bulunursak şu sonuçları elde ederiz:

$$(1.1.27)\quad \begin{cases} k_0 = \sqrt{2^{2.0+1}} = \sqrt{2} = \sqrt{1^2+1} < 1 + \dfrac{1}{2\times 1} = 1\dfrac{1}{2} = 1;30 \\ k_1 = 2^1\sqrt{2} = \sqrt{2^{2.1+1}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = \sqrt{3^2-1} \lesssim 3 - \dfrac{1}{2\times 3} = 3 - \dfrac{1}{6} = 2\dfrac{5}{6} = 2;50 \Rightarrow \sqrt{2} \lesssim \dfrac{2;50}{2} = 1;25 \\ k_2 = 2^2\sqrt{2} = \sqrt{2^{2.2+1}} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32} = \sqrt{6^2-4} \lesssim 6 - \dfrac{4}{2\times 6} = 6 - \dfrac{1}{3} = 5\dfrac{2}{3} = 5;40 \Rightarrow \sqrt{2} \lesssim \dfrac{5;40}{4} = 1;25 \\ k_3 = 2^3\sqrt{2} = \sqrt{2^{2.3+1}} = \sqrt{2^7} = \sqrt{128} = \sqrt{12^2-16} \lesssim 12 - \dfrac{16}{2\times 12} = 12 - \dfrac{2}{3} = 11\dfrac{1}{3} = 11;20 \Rightarrow \sqrt{2} \lesssim \dfrac{11;20}{8} = 1;25 \\ k_4 = 2^4\sqrt{2} = \sqrt{2^{2.4+1}} = \sqrt{2^9} = \sqrt{512} = \begin{cases} \sqrt{22^2+28} \lesssim 22 + \dfrac{28}{2\times 22} = 22 + \dfrac{7}{11} \\ \sqrt{23^2-17} \lesssim 23 - \dfrac{17}{2\times 23} \end{cases} \\ k_5 = 2^5\sqrt{2} = \sqrt{2^{2.5+1}} = \sqrt{2^{11}} = \sqrt{2048} = \sqrt{45^2+23} \lesssim 45 + \dfrac{23}{2\times 45} = 45\dfrac{23}{90} = 45;15,20 \Rightarrow \sqrt{2} \lesssim \dfrac{45;15,20}{32} = 1;24,51,15 \\ k_6 = 2^6\sqrt{2} = \sqrt{2^{2.6+1}} = \sqrt{2^{13}} = \sqrt{8192} = \sqrt{90^2+92} \lesssim 90 + \dfrac{92}{2\times 90} = 90\dfrac{23}{45} = 45;15,20 \Rightarrow \sqrt{2} \lesssim \dfrac{45;15,20}{64} = 1;24,51,15 \\ \vdots \end{cases}$$

Burada $n = 4$'te $b = 22$ ya da $b = 23$ düzgün olmayan sayıları gelmiş, dolayısıyla bunlardan elde edilen sonuçlar geçerli değildir. Çünkü eski Babilliler paydaya düzgün olmayan bir sayı geldiğinde, bunun 60 tabanındaki açılımı sonsuz olduğundan genelde bu tür sayılarla hesap yapmazlardı. MS 2317 no'lu tabletindeki 13 hariç tabii ki.

1.1.5. Değerlendirme

Eski Babil Dönemi'ne (M.Ö. 2000-1600) ait YBC 7289 no'lu tablet ile ilgili şu sonuçları verebilirim:

1. Bu tabletteki karenin çiziminde kullanılan cetvel ya da cetvel görevi gören bir çubuk Eski Babil Dönemi'ndeki bir kübite göre birimlendirilmiştir. Fakat bu kübit Erken Hanedanlık ve Sargon dönemlerinde de kullanılmıştır. Çünkü bu dönemlerde 1 Kübit 6 El'e ve her El de 5 Parmak'a, dolayısıyla 30 Parmak'a bölünürken sonraki dönemlerde kübitteki standartlaştırma işlemi nedeniyle 24 Parmak'a bölündü. Buna göre cetvelin birimlendirilmesinde kullanın kübitin uzunluğu 30 Parmak (1 Parmak yaklaşık 17 MM genişliğinde) olup, karenin bir kenar uzunluğu 6 Parmak'ın yarısı 3 Parmak'tır.

Örneğin M.Ö. 2650'ye tarihlenen Nippur kübiti ve üzerindeki parçalar şu şekildedir:

Resim 1.1.8. Nippur kübiti, [*İstanbul Arkeoloji Müzesi*]. İlk satırdaki sayıların birimleri Parmak'tır (ki sığmayacağı için yazmadım), 2. satırdaki ölçüler kübitin başından itibaren verilen ½ Arşın (Kübit) ve 1 Ayak, 3. satırdaki ölçü 1 Kübit (Arşın) (ki bu İstanbul Arkeoloji Müzesi'nde tanıtım amaçlı olarak sergilenen bilgilendirmede 1 Arşın yerine yanlışlıkla ½ Arşın olarak yazılmıştır) ve 4. satırda kübitin tam uzunluğunu veren 4 Ayak'tır. İTÜ'den ***Z. Duran*** ve ***U. Aydar*** tarafından 3-boyutlu dijital modelleme ve ölçümler (gerçek ölçümlerin yanında fotogrametri ve laser taramadan elde edilen ölçümler) yapıldı (Bkz. "*Measurement And 3D Modelling of An Ancient Measuring Device: Nippur Cubit Rod*", 2008, 2012). Fakat gerçek ölçümler kübitteki bölümlendirmelerin hassas bir şekilde yapılmadığını gösteriyor. Öyle ki kübitin kendisi bile istenilen uzunluktan kısa yapılmıştır. Bu nedenle araştırmacılar 1 Kübit'in kaç CM olduğuna ilişkin çeşitli hesaplamalar yaptılar (Bkz. "*The Measures of the Nippur Cubit*", "*On the Mathematical Connections of Ancient Measures of Length*" vb.). Çünkü çeşitli parçaların bir araya getirilip 1 Kübit'e ilişkin hesaplamalar ağırlıklı olarak 51.80 CM ve 51.85 CM sonuçlarını veriyordu. Bana göre aranılan sonuç,

$$(1.1.28)\quad 16 \text{ Parmak} = 4 \text{ Parmak} + 12 \text{ Parmak} = 6.70 \text{ CM} + 20.95 \text{ CM} = 27.65 \text{ CM} \Rightarrow 1 \text{ Kübit} = 30 \text{ Parmak} = \frac{30}{16} \times 27.65 \text{ CM} = 51.84375 \text{ CM}$$

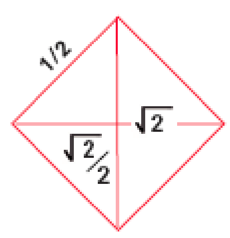
dir. Bu, yaklaşık olarak

$$(1.1.29)\quad 1 \text{ Kübit} \cong \frac{14}{27} = 0.\overline{518518} \text{ M}$$

demektir.

İşte bu kübit YBC 7289 no'lu kübitin üzerindeki karenin bir kenar uzunluğunun 3 Parmak olduğunu açıklar durumdadır. Ama 4672 yıl geriye (ki bu, Eski Mısır'da ***Zoser***'in dönemi demektir) gitmemize gerek yok, 3 parmağınızı tabletteki karenin bir kenarına koyarsanız tam olarak oturduğunu göreceksiniz. Çünkü insan evrimi o kadar hızla değişmez!

2. Bir kenar uzunluğu 3 Parmak olan karenin köşegen uzunluğu kaç El'dir?

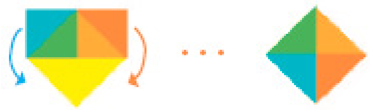


Bu problemin çözümü tıpkı AO 6484 no'lu tabletteki gibi olup, $\sqrt{2}$ için bu tabletin bir köşegeni üzerine yazılmış 1;24,51,10 yaklaşıklığını alırsak yandaki karenin köşegen uzunluğunu

$$(1.1.30)\quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > x_4 = 1;24,51,10 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1;24,51,10}{2} = 0;30 \times 1;24,51,10 = 0;42,25,35$$

yaklaşıklığından $6 \times 0;42,25,35 = 4;14,33,30$ Parmak olarak elde ederiz ve bu da, yaklaşık olarak 1 El demektir!

3. Eski Babil Dönemine ait Standart Ters Sayılar Tabloları'na bakıldığında 2'den 81'e kadar düzgün sayılar ve bunlara karşılık gelen ters sayıların yazılmış olduklarını görürsünüz. Diğer sayıların tersleri ise basit cebrik ve geometrik tekniklerden tutun da yukarıdaki genel metottaki gibi karmaşık metotlardan da bulunabilmekteydi. Örneğin, bu sayıların içerisinde "*$\sqrt{2}$'nin tersi nedir?*" sorusunun yanıtı, AO 6484 no'lu tabletinde (1.1.13)'e göre 0;42,30 iken YBC 7289 no'lu tablette (1.1.30)'a göre çok daha hassas bir şekilde 0;42,25,35'tir. Buradan YBC 7289 no'lu tablette Standart Ters Sayılar Tabloları'nda yer almayan $\sqrt{2}$'nin tersinin yazılmış olduğu ve bu sayının çok daha hassas hesaplarda kullanıldığı sonucu çıkar.



Diğer yandan, tabletteki kareyi ve ilgili yerlere yazılan sayıları günümüzdeki gibi gösterirsek hemen yukarıdaki şekil bize, tablette ele alınan asıl problemin $\sqrt{2}$'nin tersi olduğunu açık bir şekilde gösterir. Tabii ki bu geometrik gösterim, Pisagor Teoremi'nin özel bir hali olan **"Kare içindeki kare (bir karenin orta noktalarından oluşan kare) şekli"**ndeki geometrik ispatın sonucunda elde edilmekteydi!

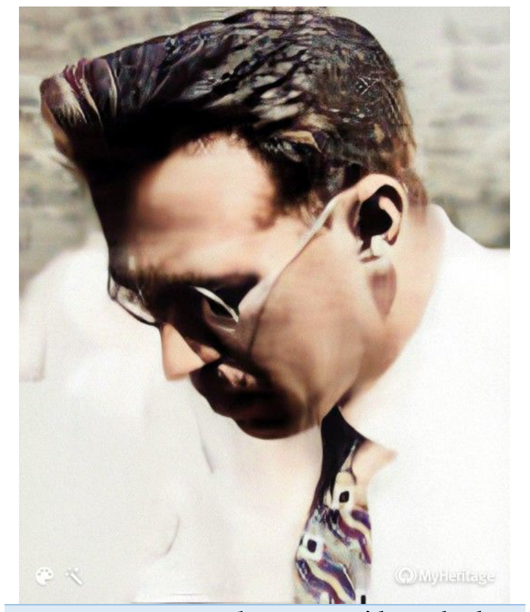
Söz konusu bu geometrik dönüşüm yalnızca matematikte değil, mimari yapılarda da kullanılmıştır. Bunu gösteren tabletler ve harabe yapılar vardır. Örneğin aşağıdaki orijinali verilen tablette ve çeviri yazısında bir karenin orta noktalarından oluşan ve iç içe geçmiş 2 kare ve 3 kareden meydana gelen geometrik çizimler vardır (Bkz. *BM 15285*; *2. Parça*, *4. Parça* ve *5. Parça*). Bu linklerdeki anılan şekillerde eski Babillilerin yukarıdaki geometrik dönüşümde geçen bir karenin orta noktalarından geçen kareyi bildikleri gibi, bu metotla elde edilen geometrik seriyi de bildikleri anlaşılmaktadır. Ayrıca bu şeklin genel durumu için yani eski Babillilerin Pisagor bağıntısını genel halde bildiklerini gösteren tablet için Eski Babil Dönemi'ne ait BM 13901 no'lu tabletine bakabilirsiniz (Bkz. ***"Jöran Friberg: Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics, Copyright © 2007 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Sayfa. 40, Şekil 1.12.3"***e).

4. 1945'te çok yönlü bir bilim adamı olan ***Otto Neugebauer*** ve yardımcısı Asurolog ***Prof. Abraham Joseph Sachs*** tarafından **"*O. Neugebauer-A. J. Sachs*, Matematiksel Çivi Yazı Metinleri (Mathematical Cuneiform Texts), New Heaven, Conn., 1945"** adlı kitabın 42. ve 43. sayfalarında YBC 7289 no'lu tabletin muhtemel bir çözümü verildi ve o günden bugüne 63 yıldır hem onların tezi hem de birçok karşıt tez yayımlandı. Onların tezini geliştirmek, daha doğrusu anlamak isteyenler oldu ama hep azınlıkta kaldılar ve ne yazık ki bu gayretler ***Neugebauer***'in çözümüne yeni bir bilgi katmadı.

Peki ***Neugebauer***'in çözümünde ne vardı? Örneğin bu çözümde geçen Babil Algoritması nereden gelmekteydi?

Şüphesiz, ***Neugebauer***, YBC 7289 no'lu tablette geçen Babil algoritmasını konuyla ilgili birçok tablete baktıktan sonra edindiği engin tecrübesi sonunda buldu. Gerçekten Babil Algoritması'nın orijini için $\sqrt{a} < x_n$ eşitsizliği gözönüne alınırsa cebrik olarak (1.1.6) ve geometrik olarak (1.1.7)'den (1.1.1)'deki Babil algoritması elde edilir. Buna ilişkin kare açılımını gösteren Eski Babil tabletleri vardır. Ayrıca Eski Babil tabletlerinde küp açılımının ve zayıf da olsa küpkök yaklaşımlarının verilmesi bunu kesinlikle doğrulamaktadır.

Fakat bütün bu bilgiler içinde en az bu çalışma kadar önemli olan soru şudur: ***Neugebauer***'in gerçekte kim olduğu ve bu çalışmaları ne için yaptığıdır?



Resim 1.1.9. *Neugebauer*, 1932'de şöyle der: *"Yunan olanı Yunan-öncesine her bağlama girişimi çok yoğun bir karşı koymayla karşılaşıyor. Alışılageldik Yunan imajını değiştirme gerekliliği ihtimali düşüncesi, **Winkelmann**'ın döneminden beri mevcut imajın geçirdiği bütün değişmelere rağmen her defasında arzu edilmez görünmüştür. Hâlbuki o zamandan bu güne geçen 2500 yıllık 'tarihe' bir 2500 yılın daha eklenmesi gerektiği gibi çok basit bir olgu vardır, ve buna göre Yunanlıların artık başta değil, ortada bulunmaları gerekiyor.", İslamda Bilim ve Teknik*, Cilt I, S. 14.

Örneğin ***Neugebauer*** için bir kaynakta şu ifadeler geçerken,

*"Gerçekte asrımız 1925'lerden bu yana Avusturyalı âlim **Otto Neugebauer** tarafından gösterilen ve Greklerin ilimler tarihindeki yerinin tâ başlarda olmayıp, fakat onların kendilerinden önce yaşamış başka nesillerin bilgilerine mirasçı oldukları düşüncesini benimsetmeye yönelen önemli bir çabaya şahit olmuştur. Bu ilim adamı şikâyet ederek, şöyle demek zorunda kalmıştır:* Greklerin başarılarını, kendilerinden önceki milletlere bağlama yönündeki her türlü teşebbüs şiddetli bir muhalefet ile karşılaşmaktadır. Kadîm Yunan çağından evvel 2500 senenin geçtiğini ve bu süre içinde onları ilimler tarihinin başına değil de ortasına koyacak kadar çeşitli ilmî başarıların bulunduğunu ispat eden bütün araştırmalara rağmen, Greklerin ilimler tarihindeki alışılmış konumunun şeklini tadîl etmeye hiç kimse yanaşmamaktadır.*", Müslümanların İlimler Tarihindeki Yeri, S. 138-139.*

bir diğer kaynakta ise ilkine tamamıyla zıt şu ifadeler geçer:

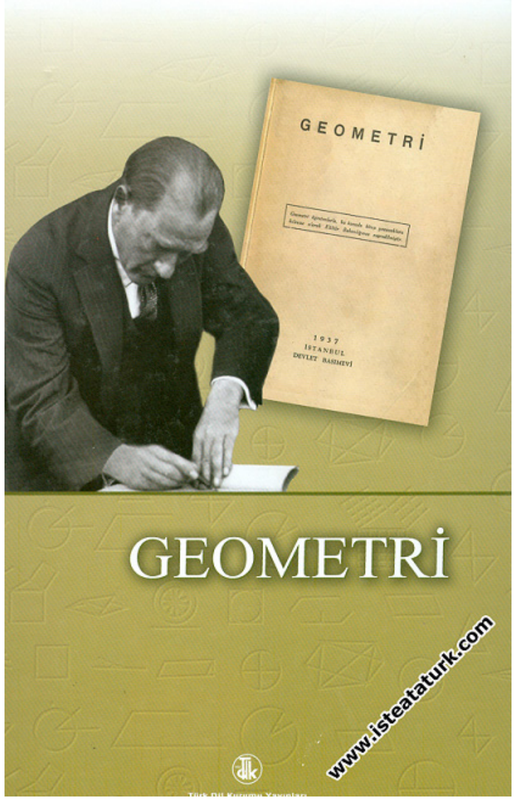
*"**Thureau-Dangin**, **Taha Baqir**, **Bruins**, **Van der Waerden** gibi, zamanımızın bazı yazarları Mezopotamya ilmini olağanüstü önemde saymaktadır. Oysa Antik Çağ yazarlarından **Ödemos**'a dayanan Orta Çağ yazarı **Proklos**, **Thales**'in, bilgilerini, Mısır'dan aldığına inanmış ve matematik tarihini **Thales** ile başlatmıştır. **Neugebauer** de **Thales**'i ve **Sokrates** öncesi matematikçileri atlayıp, ilmî geometriyi **Ödoksos** ve **Theaetetos** ile başlatmıştır. **Plutarkhos, Vitruvius** ve yine **Proklos** ise **'Pithagoras Teoremi'**ni ve **'Alan Tatbiki'** metotlarını **Pithagoras**'ın kendi şahsî keşfi sanmışlardır.*

*Ayrıca, **Proklos**, **Pithagorasçılar**'ın düzgün çok yüzlüler hakkındaki bilgilerin de **Pithagoras**'a atfedildiğini söyler. Pitagorcuların düzgün çok yüzlülerden küp, tetrahedron ve dodekahedron'u bildikleri **Öklit**'in ifadesinden de anlaşılmaktadır. Zamanımızın **Neugebauer** gibi bazı yazarları ise Eski Yunanlıların Mısır ve Mezopotamya'dan sağlamış oldukları yararların teorik yönden önemli olduğunu pek kabul etmek istememektedirler.", Mısır ve Mezopotamyalılar'da Matematik, Astronomi ve Tıp, Mezopotamyalılarda Geometri.*

Özetle ***Neugebauer*** hakkında diğer kaynaklara bakıldığında, bunlara paralel olan görüşlerin çoğunun ***Neugebauer***'in aleyhinde olduğu görülür. Çünkü yardımcısı ***Sachs*** ile birlikte onun ve diğerlerinin çalışmalarıyla yeni bir çığırın açıldığı yıllarda Bilim Tarihi radikal değişikliklere sahne olurken yukarıdaki tabletlerden anlaşılacağı üzere Matematik Tarihi'nin çatısını çökerten gelişmeler de yaşanıyordu. Bu yüzden onlara **"Eski Babilli (Old Babylonian)"** anlamına gelen ama argo dilinde çok çirkin anlamı olan **"OB"** yakıştırmasını yaptılar ve çalışmalarını insafsızca eleştirdiler. Örneğin İngiliz araştırmacı ***Eleanor Robson***, makalelerinde bu kısaltmayı gereksiz şekilde kullanır.

Atatürk'ün Antik Yunan Yüceltimine Karşı Bir Yanıtı: Dikeyin Çap Karesi

Atatürk, vefatından 1.5 yıl önce, 3. Dil Kurultay'ından hemen sonra, 1936-1937 yılı kış aylarında Dolmabahçe Sarayı'nda son bir kültür hamlesi yapar. Çünkü 1937 yılından önce öğrenciler matematiği Osmanlıca terimlerle öğreniyorlardı. Daha doğrusu öğrenmiyorlar, ezberliyorlardı. Bu nedenle 1937 yılının Kasım ayında yeni bir eğitim ve öğretim yılına girilirken Türk Dil Kurumu'nun çeşitli bilim dallarına ait Türkçe terimleri saptadığını, bu sayede dilimizin yabancı dillerin etkisinden kurtulma yolunda esaslı bir adım attığını ilan eder. Aynı yıl okullarda eğitim Türkçe terimlerle basılmış olan kitaplarla başlar ve bu olay kültür hayatı için önemli bir adım olur. ***Atatürk***, dilde özleşmeyi olanakların son kertelerine kadar zorlamış, bilim ve düşün dilinin sadeleştirilmesinin ve eğitimin Türkçe yapılmasının gerekliliğini önemle vurgulamıştır.



Agop Dilaçar'ın kitabın 1971 baskısına yazdığı önsöze göre 1936 yılının sonbaharında ***Atatürk***, Özel Kalem Müdürü ***Süreyya Anderiman*** ve ***Agop Dilaçar***'ı Beyoğlu'ndaki Hachette (Haşet) kitabevine gönderir ve 2 tane Fransızca geometri kitabı aldırır. Kitaplar gelince uzmanlarla beraber gözden geçirir ve geometri kitabının ilk çalışmalarına başlar. Kış ayları boyunca Dolmabahçe Sarayı'nda çalışan ***Atatürk***'ün hazırladığı yandaki kitap Kültür Bakanlığı tarafından 1937 yılında yayımlanır. Kitabın yazarının ***Atatürk*** olduğu belirtilmemiş; kapağında sadece **"Geometri öğretenlerle, bu konuda kitap yazacaklara kılavuz olarak Kültür Bakanlığı'nca neşredilmiştir"** şeklinde bir not düşülmüştür.

Geometri eski terimle Hendese, eğitim sistemimizde önemli bir yer tuttuğu hâlde bunun terim düzeni çok ağdalı ve karmaşıktı. Arapça ile Farsça okul programından kaldırılmıştır. Fakat Arapça üzerine kurulmuş olan terimler kalmıştı ve bu durum öğrencilerin anlama ve öğrenmelerini olumsuz etkilemekte idi. ***Atatürk***, öğrencideki bu anlayış yolunun tıkanıklığını açmak için Osmanlı döneminde okullarda okutulan Nazari ve Ameli Hendese I, II, III adlı kitapların hepsini birleştirerek yazdığı 44 sayfalık kitapta birçok terimi Türkçeye çevirmiştir: Boyut, uzat, yüzey, düzey, çap, yarıçap, kesek, kesit, yay, çember, teğet, açı, açıortay, içters açı, dış ters açı, taban, eğik, kırık, çekül, yatay, düşey, dikey, yöndeş, konum, üçgen, dörtgen, beşgen, köşegen, eşkenar, ikiz kenar, paralel kenar, yamuk, artı, eksi, çarpı, bölü, eşit, toplam, orantı, türev, alan, varsayım v.b. Bunlarla birlikte arkeolojik çalışmaları da takip ettiğinden bazı matematik ifadeleri de düzeltmiştir. Örneğin Nazari ve Ameli Hendese II'deki Pisagor Teoremi'ne **"Dikeyin Çap Karesi"** demiştir (Bkz. "*1900-1940 Seneleri Arasındaki Ortaokul Matematik Ders Kitaplarının Günümüz Matematik Kitapları İle Mukayesesi*", S. 20). Bu, Osmanlı döneminden 1937'ye kadar ve 1938'den günümüze kadar duyulmuş şey değildi. Çünkü bu teorem Plimpton 322 no'lu tabletinden de gördüğümüz üzere eski Babilonya'dan geliyordu ve demek ki ***Atatürk*** de, benim bu makalede yaptığım gibi ilgili yayınları takip ediyor ve bu teoreme bu yüzden o adı vermişti. Buna göre ***Atatürk***'ün 13 Kasım 1937'de Sivas Lisesi'ndeki 9-A sınıfında Pisagor teoremini anlatmış olduğu ifadesi doğru gelmiyor bana ama onlara eşlik etmiş görünür!

Şimdi ***Atatürk***'ün bu teoreme **"Pisagor Teoremi"** deyip demediğini ve demişse bu teoremi nasıl anlattığını Sivas Lisesi'ne gelişinden itibaren tüm detaylarıyla birlikte inceleyelim.

Atatürk, Sivas Lisesi'ne geliyor!

1937 sonbaharıydı. Sivas Lisesi'nin tüm öğrencileri sabah yoklaması için okulun bahçesinde toplanmıştı. Lise müdürü ***Ömer Beygo***'nun yaptığı duyuruyla büyük heyecana kapıldılar: ***Atatürk*** Sivas'a geliyordu!

Teneffüslerin tek konusu buydu artık:

"Liseye de gelir mi?"
"E tabii, Kongre'nin yapıldığı yer, muhakkak gelir."
"Kongre salonuyla müzeyi gezerse biz onu göremeyiz ki!"
"İstasyon meydanına karşılamaya gidilecekmiş."
"Konuşabilir miyiz acaba?"
"Yaa, ***Atatürk***'ün de başka işi yokmuş, seninle konuşmaya geliyormuş zaten!"
"Dikkat edin, gözleri o kadar güçlüymüş ki, kimse gözlerine bakamazmış, bakanlar çarpılmışa dönermiş."
"O kalabalıkta uzaktan azıcık bile görürsen şükret, nerede kaldı gözüne bakmak!"

Onu mutlaka görecek!

9-A sınıfından ***Sarı Cemil***, ***Atatürk***'ü yakından görmeyi aklına koymuştu. 13 Kasım sabahı okuldan kaçtı, soluğu istasyonda aldı. Kısa bir keşif ve evet, işte şu ağacın üstüne çıkarsa trenden inenleri rahatça görebilecekti.

Cemil, **"sarı"** lakabını ipince bir çocuk olduğu için almıştı. Tokat'ın bugün de ilk duyanların adını asla doğru yazamadığı Erbaa ilçesindendi. Annesi o küçücükken ölmüştü. Babası ***Celal*** Bey oğlunu okutmaya kararlıydı. Lise Sivas'taydı, ***Cemil*** de oraya yatılı gelmişti.

Atatürk yanında birkaç adam ve pantolon giyen genç bir kadınla trenden indi. ***Cemil*** eğilip daha iyi göreyim derken neredeyse düşüp boynunu kıracaktı. Kısa süre sonra ***Atatürk*** görüş menzilinden çıkınca ağaçtan indi, koşa koşa okula gitti. Meydandan dönen okul kafilesine karıştı. Sınıflara dağıldılar.

Atatürk, Sivas'a son kez 13 Kasım 1937 tarihinde geldiğinde Sivas Lisesi'nin Kızılırmak Oymağı istasyonunda karşılandı. Yanında Kültür Bakanı ***Saffet Arıkan***, İçişleri Bakanı ***Şükrü Kaya***, ***Sabiha Gökçen***, ***İsmail Hakkı Tekçe*** ve yaveri ***Naşit Mengü*** bulunuyordu.

Atatürk, lise müdürü matematik öğretmeni ***Ömer Beygo*** ve başyardımcısı felsefe öğretmeni ***Faik Dranaz*** ve öteki ilgililerle birlikte doğrudan doğruya liseye geldi. Burada ilkin 4 Eylül 1919'da tarihsel kongrenin toplandığı kongre salonunu ve özel odalarını gezdi, duygulandı.

Sonra, topluluk halinde lisenin 9-A sınıfında programdaki Geometri (o zamanki adıyla Hendese) dersine girdi. Bundan sonrasını ***Sarı Cemil (Cemil Say)***'den dinleyelim.

Ah Saadet ah, yaktın bizi!

Ders hendeseydi, yani bizim bugün **"Geometri"** dediğimiz şey. Arka sırada oturan ***Cemil*** dersi istese de can kulağıyla dinleyemiyordu. ***Atatürk***'ü gördüğünü torunlarına nasıl anlatacağını düşünüyordu belki de. Zaten bu hendese denen meret de anlaşılır şey değildi; **"Müsellesin zaviyetan-ı dahiletan mecmu'ü yüz seksen derecedir"** gibisinden tuhaf Arapça tekerlemelerle doluydu. Aniden kapı açıldı, içeri ***Atatürk*** girdi!

Sınıf ayağa fırladı. ***Atatürk*** oturmalarını işaret etti. Hangi dersi yaptıklarını sordu ve ön sırada oturan sınıfın en çalışkan kızı ***Saadet***'i tahtaya kaldırarak konuyu anlatmasını rica etti. ***Saadet*** bir yandan tebeşirle müselleser çizip zaviyelerini işaretlemeye, bir yandan da **"Müselles-i mütesaviyü'l-adla, zaviyeleri biribirine müsavi müselles demektir"** diye anlatmaya başladı.

Atatürk dikkatle dinledi, sonra ***Saadet***'e *"Tahtaya bir ikizkenar üçgen çiz çocuğum!"* dedi. Allahtan ***Saadet*** çok soğukkanlı bir kızdı. *"O nedir bilmiyorum!"* dedi sakince.

Atatürk "Müdür nerede?" dedi. Kendisi de matematik öğretmeni olan ***Ömer*** Hoca hemen kafiledeki bakanların arasından sıyrılıp ***Atatürk***'ün karşısında yerini aldı.

Atatürk, *"Yeni kitaplarda bu terimlerin Türkçesi var. Neden onları öğretmiyorsunuz?"* diye sordu. *"Sivas'a gelmedi henüz yeni kitaplar Paşam"* dedi ***Ömer Beygo***.

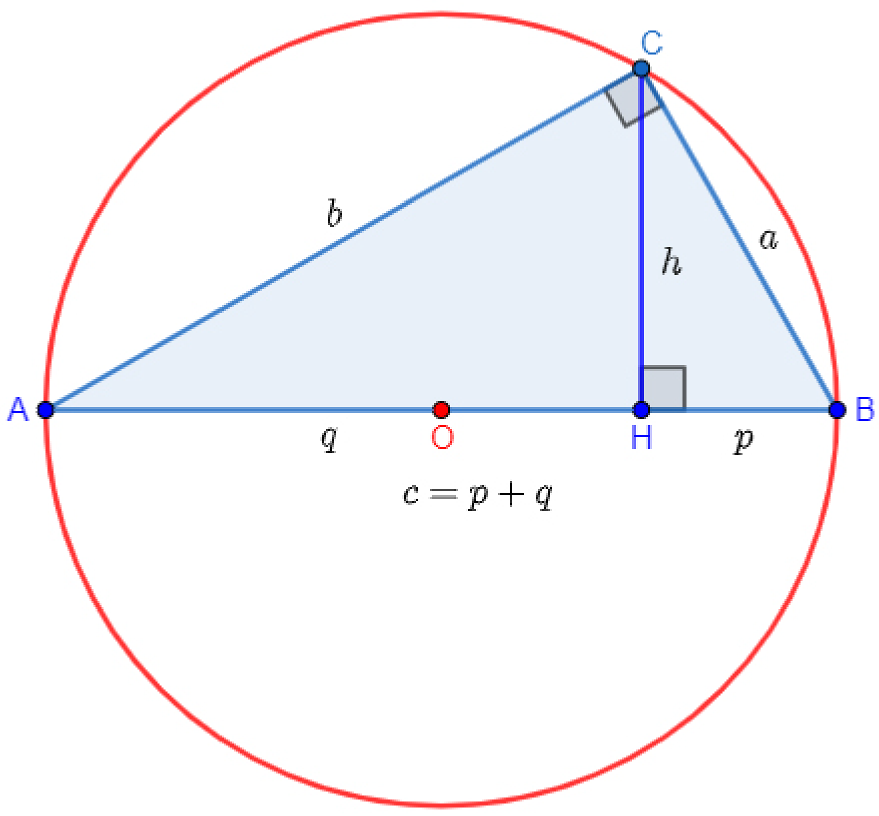
Bu kez çağrılma sırası Milli Eğitim Bakanı ***Saffet Arıkan***'daydı. ***Atatürk*** *"Ankara'ya döndüğümde soracağım. O zamana dek yeni kitaplar gelmiş olacak"* dedi kısaca.

Resim 1.1.10. ***Atatürk***, tahtada yeni terimlerle paralel 2 doğrunun kesen ile yaptığı açıları anlatmak için ilkin üst paralel doğruyu çiziyor. Sağ tarafında kadraja girmeyen yaveri ***Naşit Mengü*** ve Kültür Bakanı ***Saffet Arıkan*** bulunuyor. Onlar da dersi dinliyorlar.

Ve sonra ***Atatürk*** tebeşiri eline alıp anlatmaya başladı: **"Müselles"**e **"üçgen"**, **"zaviye"**ye de **"açı"** diyecektik. **"İkizkenar üçgen"** de hocaların bile dilinin zor döndüğü **"müselles-i mütesâviyü'ssâkeyn"** denen şeydi. Öğrencilerin gözlerinin önündeki bir perde kalkıyordu adeta. Böyle söyleyince neyin ne olduğu isminden belli oluyordu! Tarihin gördüğü en büyük adamlardan birinden Pisagor teoreminin kanıtını dinlediler. Ve anladılar.

40 yıl sonra bu hikâyeyi bana anlatan ***Cemil Say***, sözlerini *"O çıktıktan sonra herkes 'Bana baktı! Sürekli gözlerimin içine baktı!' diyordu. Gözleri objektif gibiydi"* diye bitiriyordu. Kitaplar mı? Bir hafta içinde gelmiş (Bkz. *"Atatürk'ün Sivas Lisesi'nde Geometri dersine girmesi"*).

Burada ve diğer hatıratlarda ***Atatürk***'ün Pisagor Teoremi'ni nasıl anlattığına ilişkin herhangi bir bilgi verilmez. Ben bunun nasıl olduğunu "Geometri" kılavuzu ya da kitapçığından hareketle anlatırken ***Cem Say*** (ki bu hatıratı babası ***Cemil Say***'dan alıp nakletmiştir) ya da başka biri var ve eğer bir hatam varsa düzeltsin lütfen!



Atatürk'ün Dikeyin Çap Karesi'ni Anlatması Hakkında!

Bilindiği üzere ***Atatürk***, Türkçe çalışmalarından sonra Geometri'deki Arapça ve Farsça terimleri Türkçeleştirirken Pisagor Teoremi'ne de el atmış ve onu da **"Dikeyin Çap Karesi"** olarak Türkçeleştirmiştir.

Bu terim için "Geometri" kılavuzuna baktığımız zaman, ***Atatürk***, 21. sayfada şunları söyler:

"55. Dikey (Dik) Üçgen: Bir açısı dikey olan üçgendir.

Bir dikey üçgende, dikey açı karşısında bulunan kenara **'Dikeyin Çapı'** denir."

Demek ki ***Atatürk***, dik üçgeni hipotenüsü çap olacak şekilde bir çember içinde alıyor ve teoremi şöyle anlatıyor: ***Öklit***'in dik kenar bağıntılarına göre,

$$(1.1.31) \quad a^2 = p.c, b^2 = q.c$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak Pisagor teoremi dediğiniz şeyi bulursunuz:

$$(1.1.32) \quad a^2 + b^2 = p.c + q.c = (\mathrm{p}+\mathrm{q}).c = c.c = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

Burada c'ye **"Dikeyin Çapı"** ve c^2'ye **"Dikeyin Çap Karesi"** denir. Bunu **"[AB] çapını gören ACB çevre açısı diktir"** bilgisinden kolayca anlayabilirsiniz. Ama bu bilgilerin hepsi (bu çemberdeki bilgiler dahil olmak üzere Öklit bağıntıları, Pisagor bağıntısı. Bkz. *"Amazing Traces of A Babylonian Origin In Greek Mathematics"*) eski Babil döneminde zaten biliniyordu!

İşte ***Atatürk***, buna, ***Cem Say***'ın babasının aktardığına göre, güya **"Pisagor Teoremi"** demiş. Ama bu mümkün değil çünkü ***Atatürk***, o sırada bunları yeni hazırladığı "Geometri" kılavuzuna göre anlatıyor ve 20. ABD Başkanı ***James A. Garfield***'ten farkı bu idi ama bu fark anlatılır gibi değildi (Bkz. "*James A. Garfield's Proof of the Pythagorean Theorem*"). Fakat bu teoremin adı ***Atatürk***'ün ölümünden sonra değiştirildi ve eskisi gibi **"Pisagor Teoremi"** denilerek günümüze kadar geldi. Çünkü bu kültür hareketinden anlaşıldığı üzere Atatürk döneminde yapılan inkılâplar ile eğitim, sosyal yapı, fikrî hayatla ilgili aklın ve çağın ihtiyaçlarına cevap verecek düzenlemeler yapılmıştır. Bu düzenlemelerde esas unsur **"Milli Kültür"** olmuştur. Ve fakat, ***Atatürk***'ün ölümü ile cumhurbaşkanı olan ***İnönü***'nün döneminde kültür politikalarında etkisi günümüze kadar sürecek olan büyük bir kırılma olmuş ve hümanist bir kültür politikası izlenmeye başlandı. Hümanist anlayış, Tanrı merkezli sosyal ve kültürel hayatın yerine insan merkezli bir yapılanma öngörmüş ve aynı anlayış, yönetim tarafından Latin-Yunan kültür kaynaklarına inilmesi olarak tarif edilmiştir. Yeni belirlenen kültür politikasının yayılması için adı konmamış bir **"Türk Hümanizmi Projesi"** geliştirilmiştir. Böylece Latin-Yunan kültürüyle Türk kültürü kaynaştırılarak Türk hümanizminin yaratılması amaçlanmıştır. Bu dönemde edebiyat, tiyatro, eğitim ve kültür gibi birçok alanda hümanizm faaliyetlerinin izlerini görmek mümkündür (Bkz. "*İnönü Döneminde Kültür Politikalarında Hümanizm*").

Özetle ***Atatürk***'ün **"Dikeyin Çap Karesi"** dediği teoremin başına bu geldiğine inanıyoruz. Çünkü ***Atatürk*** sadece normal yayınları okumuyordu; arkeolojiye de meraklıydı ve ilgili yayınları takip ediyordu. O sırada bu teoremin ***Pisagor***'a ait olmadığı tabletlerle kanıtlanmıştı bile. Yani ***Atatürk***'ün bu teoreme neden öyle dediği açıktı. Ancak **"Türk Hümanizmi Projesi"** kapsamında her türlü buluş **"Antik Yunan İcadı"** olarak gösterme dalaveresine gidilmiş, dolayısıyla ***Atatürk***'ün **"Dikeyin Çap Karesi"** çıkarımı kitaplardan silinmiş ve eskisi gibi **"Pisagor Teoremi"** ifadesi konulmuştur (Bkz. "*Antik Yunan Yüceltiminin Türk Karşıtı Tarihsel Kökleri*"). Bunun için sadece Fulbright Anlaşması'na baksanız gerisi çorap söküğü gibi kendiliğinden gelir (Bkz. "*Milli Eğitim'de ABD ve Fulbright Anlaşması*", "*Meğer 'Milli' sandığımız eğitim Amerikan'mış!*"). Örneğin bu anlaşma nedeniyle Prof. Dr. ***Salim Göhce***'nin 2 doktora öğrencisinin başına gelen vahim olaylara ek olarak başımdan geçen şu olayı verebilirim: 80'lerde öğrenciliğimizde bize İnkılap Tarihi derslerimizde I. Dünya Savaşı'nda ABD'nin İtilaf Devletleri arasında yer aldığı hiç söylenmedi!

5. Sadede gelecek olursam artık günümüzde **"Heron'un Algoritması"**, **"Newton'un Metodu"**, **"Newton'un İterasyonu"** ve **"Newton-Raphson İterasyonu"** gibi değişik isimlerle anılan algoritmanın **"Babil Algoritması"** olduğu ve bu isimler parantez içinde ikinci isimle anılarak yavaş yavaş terkedilmeye başlanmıştır. Örneğin "*Derya PAMUKTULUM, Hesabın Destanındaki İlk Gerçek Algoritma: YBC 7289 No'lu Tabletindeki Babil Algoritması, 20.04.2006, 17:00*" adıyla http://members.lycos.uk/gizapyramids adlı web sitemde yayımladığım çalışmada bu algoritmanın aynen **"Babil Algoritması"** olduğu ortaya çıkmış ve keşfimizin yapıldığı yılda basılan "*Latif MUTLU, Uygarlığın Durak Yerleri, Uygarlığın İkinci Durak Yeri: İskenderiye Kütüphanesi, Bilimin Öncüleri, Heron, S. 169*" adlı kitapta da **Heron**'un **"Metrica"**sındaki bu algoritma için şu kesin sonuca varılmıştı: ***"Aynı kitapta, bir sayının karekökünün yaklaşık olarak bulunması için bir yöntem de yer almaktadır. Babilliler'den İskenderiye'ye geçen bu yöntem günümüz bilgisayarlarında da yaygın olarak kullanılmaktadır."***

D. PAMUKTULUM

DERYA PAMUKTULUM

Dijital olarak imzalayan DERYA PAMUKTULUM
Tarih: 2022.07.14 09:27:10 +03'00'

Ekler

EK 1: Babil Algoritması'nı Kullanarak Arşimet'in $\sqrt{3}$ İçin Verdiği Kesirleri Bulmak!

Bu çalışmayı (1.1.38)'deki yeni gelişme nedeniyle yaptım ve böylece ***Arşimet***'in Önerme 3'ündeki alt ve üst sınırlarına yaklaşık kesirler veren Babilonya algoritmasıyla birlikte takımı tamamlamış oldum. Çünkü (1.1.38)'in elde edilmesinde de (1.1.10)'daki Babilonya algoritması geçerlidir.

1. **Üst Sınır Kesri:** İlkin (1.1.10)'a göre

$$(1.1.33)\quad 3\sqrt{3}=\sqrt{3^2.3}=\sqrt{3^3}=\sqrt{27}=\sqrt{5^2+2}<5+\frac{2}{2\times 5}=5+\frac{1}{5}=\frac{26}{5}\Rightarrow\sqrt{3}<\frac{26}{15}$$

(ki buna ***Thomas L. Heat*** tarafından "*The Works of Archimedes*", S. LXXXIII, PDF'de 87'de dikkat çekilmiştir) ya da Heron algoritmasına göre

$$(1.1.34)\quad 5<3\sqrt{3}=\sqrt{3^2.3}=\sqrt{3^3}=\sqrt{27}=\sqrt{5^2+2}<5+\frac{2}{2\times 5}=5+\frac{1}{5}=\frac{26}{5}<\frac{27}{5}$$

alt ve üst sınırlarının aritmetik ortalamasıyla

$$(1.1.35)\quad 5<3\sqrt{3}<\frac{27}{5}\Rightarrow 3\sqrt{3}<\frac{5+\frac{27}{5}}{2}=\frac{26}{5}\Rightarrow\sqrt{3}<\frac{26}{15}.$$

şeklinde bir üst sınır elde ederiz.

İkinci olarak her 2 algoritmayla aynı üst sınır kesri elde ettiğimize göre ve $\sqrt{3}$'ü AO 6484 no'lu tabletinin 8. problemindeki gibi yazarsak,

$$(1.1.36)\quad \frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}<\frac{26}{15}\Rightarrow\frac{45}{26}<\sqrt{3}$$

alt sınır kesrini elde ederiz.

Şu halde $\sqrt{3}$ için şu alt ve üst sınırlarını verebiliriz:

$$(1.1.37)\quad \frac{45}{26}<\sqrt{3}<\frac{26}{15}.$$

Bu durumda her 2 sınırın aritmetik ortalamasını alırsak,

$$(1.1.38)\quad \sqrt{3}<\frac{\frac{45}{26}+\frac{26}{15}}{2}=\frac{\frac{1351}{390}}{2}=\frac{1351}{780}$$

şeklinde ***Arşimet***'in $\sqrt{3}$ için verdiği üst sınır kesrine ulaşmış oluruz (6.12.2021, 07:22:18).

2. **Alt Sınır Kesri:** Bu sefer (1.1.10)'a göre $2\sqrt{3}$ için aynı işlemleri yaparsak, $\sqrt{3}$ için

$$(1.1.39)\quad \begin{cases} 3<2\sqrt{3}=\sqrt{2^2.3}=\sqrt{12}<4\Rightarrow\dfrac{7}{2}=\dfrac{3+4}{2}<2\sqrt{3}\Rightarrow\dfrac{7}{4}<\sqrt{3} \\ \dfrac{7}{4}<\sqrt{3}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}\Rightarrow\sqrt{3}<\dfrac{12}{7} \end{cases}\Rightarrow\frac{7}{4}<\sqrt{3}<\frac{12}{7}$$

alt ve üst sınırlarını buluruz ve buradan

$$(1.1.40)\quad \begin{cases} \sqrt{3}<\dfrac{\frac{7}{4}+\frac{12}{7}}{2}=\dfrac{\frac{97}{28}}{2}=\dfrac{97}{56} \\ \dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}<\dfrac{97}{56}\Rightarrow\dfrac{168}{97}<\sqrt{3} \end{cases}\Rightarrow\frac{168}{97}<\sqrt{3}<\frac{97}{56}\Rightarrow\frac{265}{153}=\frac{168+97}{97+56}<\sqrt{3}$$

şeklinde ***Arşimet***'in $\sqrt{3}$ için verdiği alt sınır kesrine ulaşmış oluruz. Bu, ***Thomas L. Heat***'in ***Heron***'un yöntemine göre karışık stratejiyle bulduğu değerdir (Bkz. "*Archimedes' calculations of square roots*", S. 10). Fakat (5)'te gösterilen $\sqrt{3}$'ün buradaki alt ve üst sınırları ***Thomas L. Heat*** tarafından değil, ***Oppermann***'ın $\sqrt{a.b}$ için verdiği a ve b'nin aritmetik ve harmonik ortalamalara ilişkin sınırlardan gelir (Bkz. "*The Works of Archimedes*", S. XCIX, PDF'de 103).

Söz konusu aynı sayfada ***Oppermann***'ın algoritmasına göre $\sqrt{3}$ için üretilen alt ve üst sınır kesirleri verildikten sonra ***Thomas L. Heat***,

$$(1.1.41)\quad \frac{168+97}{97+56}=\frac{265}{153}$$

birleştirmesini yapar. Fakat bu alt sınır kesri (1.1.38)'deki gibi bulunamaz!

Şimdi aynı kitaptaki ***Thomas L. Heat***'in PDF'de S. 84-88'de yer alan "*7. Archimedes' approximations to √3*" başlıklı çalışması için tahminlerine bakarsam ***Arşimet***'in $\sqrt{3}$ için vermiş olduğu alt ve üst sınır kesirlerinde aşırı zorlama yapmış olduğunu görüyor, dolayısıyla orada yapılanları doğru bulmuyorum. Onun tek doğru tahmini, yukarıdaki birleştirmeyle elde ettiği (1.1.41)'deki alt sınır kesridir. Buna göre diğer yorumcular tarafından yapılan tahminlerin hepsi çizgi dışında kalır (Bkz. "*Note on alternative hypotheses with regard to the approximations to √3*", PDF'de S. 94-103).

D. PAMUKTULUM