17 Ağustos 1999 Gölcük depreminde yardımımıza ilk koşan ülke komşumuz Yunanistan olmuştu. Dönemin Yunan Başbakanı ***Kostas Simitis***, Türkiye'nin deprem yaralarının sarılması için acil yardım ekiplerini alarma geçirmiş ve Yunan Hava Kuvvetleri'ne ait bir nakliye uçağı, onlarca doktor ve tıbbi ekip, kurtarma faaliyetlerine katılan uzman ekipler, özel eğitilmiş köpekler ve acil yardım malzemesi gibi birçok yardımı ülkemize sağlamıştı. O sırada Yunan halkı ve birçok Yunan gazetesinde tek bir söylem vardı: *"Dayan komşu!"*.

Yukarıdaki itfaiyecilerden oluşan Yunan Kurtarma Timi'den ***Panagiotis Kotridis*** şunları söyler (ki yapay zekâ (Ai) yukarıdaki resimde önde olanları çocuğa döndürürken yani kötü bir yaklaşımda bulunurken arkadakileri gerçeğe yaklaştırmıştır. Bu durum yapay zekâda kullanılan algoritmalardan kaynaklanmaktadır. Tıpkı buradaki algoritmalardaki gibi): *"Her yerde yıkılmış binalar vardı. İnsanlar ağlayarak etrafta koşuşuyorlardı. Yakınlarını bulabilmek için yardım istiyorlardı. Şok olmuştum. Bütün grup da şok içindeydi. Kendimi bu yıkımın içinde kalmış gibi hissettim. Yardım isteyen insanları görünce ayrım yapmak da imkânsız hale geldi. Yaşadığım duyduğum kendime ya da ailemin başına geldiğinde duyacağımdan az değildi. Hemen, canlıların olabileceği söylenen bir bölgede çalışmaya koyulduk.*

Acı ve ıstırap, keder. Bu tip şeylerin özel bir dili yok. Deri rengimin de onlar için önemi yok."

Yunan kurtarma timinden ***Kryıstallidis Manolis*** de şunları söyler: *"Birçok Türkçe kelime öğrendik: Yavaş yavaş, gel burdan, gel gel, Güvenç, duvar, manivela, kazma, divan"*

"Güvenç" kelimesi Değirmendere ve Yalova'da arama-kurtarma çalışmalarında bulunan Yunan kurtarma ekibinin hafızasına kazınmıştı. Çünkü Yunanlı Gönüllüler Değirmendere'de ***Güvenç*** adındaki bir çocuğu enkaz altından çıkarmışlardı.

Manolis, ***Güvenç***'in enkaz altından çıkarılışını şöyle anlatır: *"O çalışırken bir başka gönüllü, **Panayotis** bir ses duydu ve bana seslendi. Orada bir kurban daha olduğuna karar verdik. Bir çocuk yıkıntıların arasındaydı, yardım istiyordu."*

Kotridis ise şunları söyler: *"Gülüyordu, kurtardığımız çocuk hiç durmadan gülüyordu. Dışarı çıkmadan önce bir dizi garip tepki gözlemledik. Dışarı çıkınca gülmeye başladı. Sanırım ne olduğunu anlamıştı. Sevinç gözyaşları döküyordu."*

Manolis, devamında şöyle der: *"Hepimiz insanız. Acı ve sevinç bizler için farklı şeyler değil. Bildiğim tek şey herkesin ağladığıydı. Herkes ağladı ama kamera ekibi yakaladı. Hiç kimsenin gözleri kuru değildi ki… kendi kardeşimi kurtarmış gibiydim. O anı asla unutamayacağıma emin olabilirsiniz… bütün bu hatıralar benimle kalacak. Ölene kadar hatırlayacağım…"*

Kotridis de şunları söyler: *"Türkiye'deki depremden eve döndüğümüzde birbirimizi aradık. **Güvenç**, gel buraya… bu küçük çocuk hepimizin hatıralarında yaşıyor…"*

Özetle ***Manolis*** ve ***Kotridis***'in bu depremden çıkarttığı dersler şöyledir:

Manolis: *"Bir daha böyle deneyimler yaşamamayı ümit ediyorum. Yıkım ve ölüm… bize gereken sevgi ve birliktelik. Böylece ilerleyebiliriz ve daha iyi bir dünya yaratabiliriz.*

Uluslararası bir kurtarma ekibi kurmamız iyi fikir. Böyle bir durumda insanların yardımına daha kolay koşabilir, onlara daha iyi bir ortam sağlayabiliriz. Böyle bir çalışmada bulunmaktan zevk duyarız."

Kotridis: *"Eğer Birleşmiş Milletler böyle bir kurtarma timi kurmaya karar verirse ilk imza atanlardan biri olurum."*. Bkz. "O Gece".

Önsöz

Depreme Özel Yayın

Bu makalede "*RİK 4*", "*Genelleştirilmiş Piobert-Parmentier Metodu*", "*YBC 7289 No'lu Tablet ve 2. Çözümü*" ve "*YBC 7289 No'lu Tablet*" makalelerimde sık sık bahsettiğim ***ATA M Algoritmaları***'nın ilk versiyonunu verirken çalışmalarımın tezimdeki yerlerini göstereyim!

"Babil Algoritmasından Modern Kök Algoritmalarına Doğru 4000 Yıllık Bir Yolculuk", A4, SS. 198, 4.43 MB.

Yukarıdaki çalışmalarımın bazılarını ilkin "*YBC 7289 No'lu Tableti ve 2. Çözümü*" ve sonra en son gelişmelere göre tamamını genişletilmiş şekilde "*YBC 7289 No'lu Tablet*"te verdim. Bu son makalede kapakla ile önsözü çıkart, geriye A3 formatında 40 sayfa kalır ve bu da A4'te 80 sayfayla yukarıdakinin 2 katı eder!

Bu makalede yer alan çalışmalarım tezimde şu şekildedir:

Fakat ağırlığı 2. ve 3. versiyonlara verdiğimden ilk versiyonda fazla çalışamadım. Şimdi bu makalede onu da giderdim ve yukarıdaki çalışmaları tekrar ele alarak genişlettim. Bununla birlikte 6 Şubat 2023'teki Kahramanmaraş'taki depremlerdeki Batılıların yardımları nedeniyle girişteki **"Sözlük Anlamı"**ndan sonra Batılılar hakkında yazdığım olumsuz düşüncelerimi sildim. Özellikle hep ***"kardeşim!"*** dediğim Yunanlıların arama-kurtarmada gösterdikleri insanüstü gayret gözlerimi yaşartmıştı. ***Venizelos*** ve ***Atatürk***'ün başlattığı Türk-Yunan Dostluğu geri mi gelmişti ne?

O zaman buradan tüm Yunanlılara bir sorum olacak: *"Deprem zamanında gördüğümüz bu dostluk neden barış döneminde görülmüyor?"*

Türk-Yunan Dostluğu Geri Geldi!

Yunan yazar ***Petros Triantafyllidis*** de benim gibi düşünüyor: *"İki ülkenin kötü günler dışında da dostluklarının sürmesini canı gönülden dilerim. İyi komşu olarak yaşamak iki ülke halkının çıkarınadır. Bu dostluklarımızı hep sürdürmeliyiz."* (Bkz. "*Atalarının mübadeleyle gittiği Yunanistan'dan gelip depremzedelerin yardımına koştu*"). Ayrıca bu makaleyi ilk yayımladığım zaman (19 Şubat 2023) skandal bir fotoğraf nedeniyle ***Kotridis*** ile görüşeceğimi söylemiştim.

Kotridis'e gönderdiğim mesaj şuydu: *"Αγαπητέ κ. **Παναγιώτη Κοτρίδη**, σας γράφω αυτό το μήνυμα από την Κωνσταντινούπολη. Δεδομένου ότι είμαστε και οι δύο Έλληνες-Τούρκοι φίλοι, είπα στην ιστοσελίδα μου (βλ. https://rombergintegrali.org/…/126-ata-m-algoritmalari…) ότι θα επικοινωνήσω μαζί σας για την τελευταία σας φωτογραφία. Τι θα θέλατε να πείτε σχετικά με αυτή τη φωτογραφία για τους Τούρκους αναγνώστες σας; Επειδή ο λαός μας δεν σκέφτεται πολύ θετικά για αυτή τη φωτογραφία. Αν έχετε θετικές σκέψεις για αυτή τη φωτογραφία για χάρη της τουρκοελληνικής φιλίας, θα ήθελα να τις λάβω. Με τους καλύτερους χαιρετισμούς **D. PAMUKTULUM**.*

Önsöz

*(Sayın **Panagiotis Kotridis**, bu mesajı size İstanbul'dan yazıyorum. İkimiz de Yunan-Türk dostu olduğumuz için, web sitemde (bkz. https://rombergintegrali.org/.../126-ata-m-algoritmalari...) son fotoğrafınız için sizinle iletişime geçeceğimi söyledim. Türk okuyucularınız için bu fotoğraf hakkında ne söylemek istersiniz? Çünkü halkımız bu fotoğraf hakkında çok olumlu düşünmüyor. Türk-Yunan dostluğu adına bu fotoğraf hakkında olumlu düşünceleriniz varsa almak isterim. Saygılarımla **D. PAMUKTULUM**)"*

Kotridis'in yanıtı şöyle oldu:

Kotridis'in Photoshop'ta Midjourney adlı yapay zekayla hazırladığı imzalı fotoğrafı.

*"**Derya Pamuktulum** Αγαπητέ φίλε! Η Δημιουργία αυτής της εικόνας, έγινε με τις πιο αγνές προθέσεις για να μεταφέρω το μήνυμα αλληλεγγύης και αγάπης στον Τουρκικό λαό που υποφέρει τόσο πολύ. Ήθελα για άλλη μία φορά όπως το 1999 να τους δείξω την συμπαράσταση μας και την αγάπη μας σε αυτή την καταστροφή. Η φωτογραφία φτιάχτηκε μέσω υπολογιστή και ποτέ δεν ισχυρίστηκα ότι είναι αληθινή και ήθελα να δείξω το ότι ένας έλληνας πυροσβέστης αγκαλιάζει τόσο τρυφερά ένα μικρό παιδάκι από την Τουρκία δείχνοντας του ότι είναι εκεί τώρα που τον χρειάζεται. Θέλω να μεταφέρετε την αγάπη μου και την αλληλεγγύη μου στον Τουρκικό λαό. Επίσης θα ήθελα να τους μεταφέρεται την ευγνωμοσύνη μου και τα ευχαριστώ μου, που κάθε χρόνο 17/8, μου στέλνουν την αγάπη τους και τις ευχαριστίες τους για την βοήθεια που είχαμε προσφέρει το 1999. Όλα αυτά τα έγγραφα στο κείμενο το οποίο είχα βάλει στη φωτογραφία μου, αλλά κάποιοι πήραν τη φωτογραφία χωρίς την υπογραφή και το κείμενο και γι' αυτό έγινε η παρεξήγηση. Δεν υπάρχει καμία πρόθεση για προπαγάνδα ή κάτι άλλο εθνικιστικό. Ήταν μια εικόνα αγάπης και συμπαράστασης.*

*(**Derya Pamuktulum** Sevgili dostum! Bu resim, çok acı çeken Türk halkına dayanışma ve sevgi mesajını iletmek için en saf niyetlerle yapıldı. 1999'da olduğu gibi bir kez daha bu felakette onlara desteğimizi ve sevgimizi göstermek istedim. Fotoğraf bilgisayar aracılığıyla çekildi ve hiçbir zaman gerçek olduğunu iddia etmedim ve bir Yunan itfaiyecinin küçük bir Türk çocuğunu şefkatle kucakladığını ve ona ihtiyacı olduğunda yanında olduğunu göstermek istedim. Türk halkına sevgi ve dayanışma duygularımı iletmek istiyorum. Ayrıca 1999 yılında yaptığımız yardımlar için her yıl 17/8'de bana sevgilerini ve teşekkürlerini ilettikleri için onlara minnettarlığımı ve teşekkürlerimi iletmek istiyorum. Tüm bu belgeler fotoğrafıma koyduğum metinde yer almaktadır ancak bazı kişiler fotoğrafı imza ve metin olmadan çekmiş ve bu nedenle yanlış anlaşılma meydana gelmiştir. Propaganda ya da başka bir milliyetçi niyet söz konusu değildir. Bu bir sevgi ve destek fotoğrafıydı.)"*

Önsöz

Bu sonuçla ***Kotridis***'i dolandırıcı gösteren haberlere itibar etmeyiniz lütfen (Bkz. "*Sosyal medyada yapay zeka ile oluşturulan resimlerle dolandırıyorlar!*"). Çünkü ülkemizde her konuda olduğu gibi bu olayda da olan biten budur. Bunun dışında bir anlam aramak art niyet olur ki *ATA M Algoritmaları Ver. 1* makalemin tanıtımında şunları söylemiştim: "'***Kotridis*** *ile görüşeceğim ama anladığım kadarıyla, arkadaşlarının başarısını daha iyi bir resimle göstermeye çalışmış ve şöyle demiş: 'Türkiye'de depremzedeleri kurtarmak için ellerinden geleni yapan meslektaşlarımı onurlandırmak için bu fotoğrafı çektim. Senin için buradayım!'. Ancak fotoğraf sahte!*"

Eğer ***Madonna***, bu fotoğrafı instagram hesabından paylaşmasa (ki daha sonra bu mesaj birçok yerde paylaşıldı. Muhtemelen $p = 6$'daki iterasyon sayısı kadar), bu tartışma yaşanmayacaktı bile (Bkz. "*Türk depremi – Madonna, hayranlarını mağdurlara yardım etmeye çağıran Türk çocuk fotoğrafıyla duygusal Yunan EMAK'ı yayınladı*").

Buna ek olarak ***Kotridis***'in 17/8 hatırlatmasına göre şu anıyı paylaşayım:

1999 Marmara Depremi'nin ardından Dışişleri Bakanı ***İsmail Cem*** ve ***Yorgo Papandreu***, Türk-Yunan Dostluğu için Kuşadası'nda "barış güvercini"ni uçurdular, 2001.

Peki bundan önce ne olmuştu?

Öcalan'ın yakalanmasından sadece 3 gün sonra, Yunanistan'da Türkiye ile yıldızı bir türlü barışmayan ***Theodoros Pangalos***'un yerine esasen vizyoner bir politikacı olan ***Yorgos Papandreou*** dışişleri bakanlığına getirildi. Türkiye ve Yunanistan krizi derinleştirmektense, iş birliğine yönelik bir politika izlemeyi tercih ettiler. Merhum Dışişleri Bakanı ***İsmail Cem***, Yunan muhatabına 24 Mayıs 1999 tarihinde bir mektup göndererek Yunanistan'ın terör örgütlerine desteğini keserek terörle mücadelede bir iş birliği anlaşması imzalaması kaydıyla, Kasım 1997 yılında Avrupa Birliğine sunduğu "Uzlaşma Planı" çerçevesinde ilişkileri geliştirmeye hazır olduğunu bildirdi. ***Cem***'in mektubuna cevap fazla gecikmedi. ***Papandreou*** 25 Haziran tarihli yanıt mektubunda, Türkiye'nin ön koşulunu kabul etmekle yetinmeyip iş birliği alanlarının terörizmle mücadelenin yanı sıra, turizm, kültür, çevre, yasadışı göç gibi diğer alanlara da yayılmasını önerdi. Bu mektup teatisini 3 Temmuz'da New York'ta gerçekleşen ***Cem-Papandreu*** görüşmesi izledi. Ardından bürokratların hazırladığı bir eylem programı çerçevesinde 5 ortak çalışma grubu oluşturuldu. Tam da bu sırada 17 Ağustos'ta Marmara depremi ve 7 Eylül'de de Atina depremi meydana geldi. O yılki BM genel kuruluna 2 ülke afetlerle mücadele konusunda ortaklaşa bir karar tasarısı sundular. Bu süreç yıl sonunda Yunanistan'ın Helsinki Zirvesinde Türkiye'nin AB'ye adaylığına itiraz etmemesi ile taçlandı. Ez cümle depremler Türk-Yunan yakınlaşmasını başlatmadı, ancak ivme kazandırdı!

Hiç unutmam, aynı dönemin Kültür Bakanı ***İstemihan Talay*** da 9/11 Olayları için şunu söylemişti: "***Hades*** *bir daha gelmesin!*"

Şu halde Türk-Yunan Dostluğu geri geldiğine göre, 20.5 yıl önce ***Arşimet***'in Önerme 3'ünün yeni bir versiyonuyla başlattığım girişimime devam edebilir (ki ilk versiyon MS 5. yy'da yeniden yorumlayan ***Eutokios***'a aitti) ve böylece ***Atatürk-Venizelos***'tan beri 93 yıldır kesintilerle süren Türk-Yunan Dostluğunu devam edebiliriz.

Tarihi bilgilerimize göre Türk-Yunan Dostluğu özetle şöyle başlamıştı:

Türk-Yunan Dostluğu Antlaşması

Lozan Antlaşması'ndan sonra 1928 yılında ***Venizelos*** Yunanistan'da tekrar iktidara gelene kadarki süreçte, özellikle Mübadele Protokolü'nün yorumu ve uygulamasındaki sorunlar ile Fener Ortodoks Rum Patrikhanesi ile ilgili birtakım meseleler sebebiyle Türk-Yunan ilişkilerinde pürüzler yaşanmıştır. 19 Ağustos 1928 seçimleriyle ***Venizelos*** son derece güçlü bir şekilde iktidara geldiğinde, Yunan nüfusunun yaşam koşullarını iyileştirme gayreti içine girmiştir. Venizelos hükümeti diğer taraftan Yunanistan'ın büyük güçlerle ve komşu ülkelerle ilişkilerini düzenlemek istemiştir. Sorunlar olmasına rağmen Türkiye ile yakın iş birliğine gitmek, ***Venizelos***'un dış siyasetinin en önemli hedefini teşkil etmiştir. Bunun en çarpıcı göstergesi, ***Venizelos***'un seçim zaferinden sadece 11 gün sonra Türk Dışişleri Bakanı ***Tevfik Rüştü (Aras) Bey***'e ve Başbakan ***İsmet (İnönü) Paşa***'ya gönderdiği mektuptur. Mektuba Türkiye'den de olumlu yanıt gelmesi üzerine Türk-Yunan dostluğuna giden yol açılmıştır.

Venizelos dostluk adına Yunanistan'da özellikle göçmenlerden gelen muhalefeti göğüslemiş, kendisini bu dostluktan alıkoymak isteyenlere kulaklarını kapatmış ve Yunan halkına barışın önemini, Yunanistan sınırları içindeki alanın gelişmek için yeterli olduğunu anlatan mesajlar vermiştir. Bu sayede Yunan başbakanının Ankara ziyareti 30 Ekim 1930 günü Dostluk, Tarafsızlık, Uzlaşma ve Hakemlik Antlaşması; Deniz Kuvvetlerinin Sınırlandırılmasına İlişkin Protokol; İkamet, Ticaret ve Seyrisefain Antlaşması'nın imzalanmasıyla neticelenmiştir. Yunanistan bu antlaşmalarla öncelikle sınırlarını güvenceye almayı ve deniz silahlanmasına ayrılacak kaynakları başka sahalara aktarmayı amaçlamıştır. Yunan tarihçileri ***Venizelos***'un dostluk uğruna bazı icraatlarını ve söylemlerini aşırı bularak eleştirilebilmektedir. Yine de pek çoğuna göre 1930 yılındaki antlaşmalar ***Venizelos***'un en büyük diplomatik başarılarıdır ve geçmişten gelen sorunları aşmak, dostlukla iş birliğine yönelmek isteyen iki halkın özgür ve bağımsız diplomatik etkinliği, cesaretli bir girişim ve gerçekçi bir siyasettir (Bkz. "*Yunan Tarihçilerin Gözüyle 1930 Türk-Yunan Dostluk Antlaşması ve Venizelos'un Bu Sürece Katkıları*").

Öyle görünüyor ki Türk-Yunan dostluğunun ne demek olduğunu ***Atatürk*** ve ***Venizelos***'tan daha iyi anlayabilen kimse yok gibi ve bize düşen en mantıklı seçim onların başlattığı bu dostluğu sürdürmek olacaktır. Bu, aynı zamanda Önerme 3'ün çıkış yerini gösterir!

Makale Hakkında

Bu makaledeki çalışmalar yukarıda belirttiğim gibi ***"Babil Algoritmasından Modern Kök Algoritmalarına Doğru 4,000 Yıllık Bir Yolculuk, 2008"*** adlı tezimdeki 40-62. sayfalarından alınarak geliştirilmiştir. İlkin bu çalışmadaki algoritmalara **"ATA"** adını verdikten sonra bunun bilişim alanındaki anlamını aradım ve Babil algoritmasına göre en iyi şekilde tanımlamaya çalıştım. Bu nedenle ilk parça ***"Babil Sürekli Kesirleri"*** oldu. Fakat Babil sürekli kesirlerini "*YBC 7289 No'lu Tablet*" makalesinde eşlenik alma yoluyla bulurken bu sefer kuvvet alma yoluyla yeniden buldum. Örnek olarak kare almayla (1.3.1) ve küp almayla (1.3.2)'deki algoritmaları verdim. Sonra kuvvet almadan hareketle Binom açılımını periyodik olarak açtım. Çünkü bunu 2002'de BBP serilerinde görmüştüm ve hatta bu alanda çalışmalarım ve keşiflerim de mevcuttur (Bkz. "*2. Süper Arktanjant Formülleri*", "*Log7: Bir alterne seri mi değil mi?*").

Genel olarak $\sqrt[p]{a}$ için algoritmalar üreten METOT'ta bu özel açılımı tüm yönleriyle inceledim. Metoda göre örnek olarak $\sqrt{a}$ ve $\sqrt[3]{a}$ sayılarına yakınsayan algoritmaları verdim ve bunların çıkış yerleri şöyledir:

1. **$\sqrt{a}$ İçin Algoritmalar.** Bu algoritmaları elde edebilmek için $\left(\sqrt{a}-b\right)^{2k}$ ifadesinin Binom açılımını (1.17)'deki gibi periyodik olarak açarsak yani terimleri $2j$ ve $2j+1$ olacak şekilde toplam indisini tek ve çift için ayırırsak,

$$\left(\sqrt{a}-b\right)^{2k}=\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}\left(\sqrt{a}\right)^{2k-j}(-b)^{j}=\sum_{j=0}^{2k}(-1)^{j}\binom{2k}{j}a^{k}\left(\sqrt{a}\right)^{-j}b^{j}=\sum_{j=0}^{\left[\!\left[\frac{2k}{2}\right]\!\right]}(-1)^{2j}\binom{2k}{2j}a^{k}\left(\sqrt{a}\right)^{-2j}b^{2j}+\sum_{j=0}^{\left[\!\left[\frac{2k-1}{2}\right]\!\right]}(-1)^{2j+1}\binom{2k}{2j+1}a^{k}\left(\sqrt{a}\right)^{-(2j+1)}b^{2j+1}$$
$$=\sum_{j=0}^{k}\binom{2k}{2j}a^{k-j}b^{2j}-\sqrt{a}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{2j+1}a^{k-j-1}b^{2j+1}=C_{0,0}(a,b)-C_{0,1}(a,b)\sqrt{a}$$

eşitliği geçerli olur ve buradan (eşitliğin her 2 yanını $\sqrt{a}$ ile çarparak) (1.3.58)'deki ilk eşitliği ve bu eşitliğin her 2 yanını $\sqrt{a}-b$ ile çarparak ikinci eşitliği elde ederiz. Burada $0\le\left(\sqrt{a}-b\right)^{2k}$ ve $\left(\sqrt{a}-b\right)^{2k}$ pozitif ya da negatif olduğundan her 2 eşitsizliğin $\sqrt{a}$'ya göre çözümleri size (1.3.58) ya da (1.3.60)'taki algoritmaları verir. Bunlar (1.2.6)'daki Babil sürekli kesirleridir. Sonuç 1.3.1 bunun nasıl gerçekleştiğini gösteren bir inceleme iken Uyarı 1.3.1 ise Binom açılımından elde ettiğimiz bu çift toplamın yeniden çift toplama ayrılmasını ve bu hesabın periyodik olarak nasıl yapıldığını gösterir. Bu sonuç Binom açılımının yalnızca $p=q=2$'ye açılmasının yeterli olduğunu gösterir. Çünkü $q=4,8,16,\cdots$ için yapılan tüm açılımlar $p=2$'deki açılımdan elde edilebilmektedir. O halde (1.3.58) ya da (1.3.60) ve (1.3.70) ya da (1.3.71)'deki rasyonel polinomlarda $b\to b_n$ dönüşümünün yapar ve kendilerine de b_{n+1} dersek bu algoritmalar otomatikman süperlineer iterasyonlara dönüşür. Bunlardan (1.3.58) ya da (1.3.60)'tan elde edilen süper lineer iterasyon çiftini (1.3.73)'te açık bir şekilde verdim.

2. **$\sqrt[3]{a}$ İçin Algoritmalar.** Bu algoritmaları elde edebilmek için $\left(\sqrt[3]{a}-b\right)^{3k}$ ifadesinin Binom açılımını bu sefer $3j, 3j+1$ ve $3j+2$ için periyodik olarak açarsak,

$$\left(\sqrt[3]{a}-b\right)^{3k}=\sum_{j=0}^{3k}\binom{3k}{j}\left(\sqrt[3]{a}\right)^{3k-j}(-b)^{j}=\sum_{j=0}^{\left[\!\left[\frac{3k}{3}\right]\!\right]}\binom{3k}{3j}\left(\sqrt[3]{a}\right)^{3k-3j}(-b)^{3j}+\sum_{j=0}^{\left[\!\left[\frac{3k-1}{3}\right]\!\right]}\binom{3k}{3j+1}\left(\sqrt[3]{a}\right)^{3k-(3j+1)}(-b)^{3j+1}+\sum_{j=0}^{\left[\!\left[\frac{3k-2}{3}\right]\!\right]}\binom{3k}{3j+2}\left(\sqrt[3]{a}\right)^{3k-(3j+2)}(-b)^{3j+2}$$
$$=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{3k}{3j}a^{k-j}b^{3j}-\sqrt[3]{a^2}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{j}\binom{3k}{3j+1}a^{k-j-1}b^{3j+1}+\sqrt[3]{a}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{j}\binom{3k}{3j+2}a^{k-j-1}b^{3j+2}=C_{0,0}(a,b)-C_{0,1}(a,b)\sqrt[3]{a^2}+C_{0,2}(a,b)\sqrt[3]{a}$$

eşitliğini elde ederiz. (1.3.75)'teki diğer eşitlikler bu eşitliğin her 2 yanının $\sqrt[3]{a}-b$ ve $\left(\sqrt[3]{a}-b\right)^{2}$ ile çarpılmasından elde edilmiştir.

Şu halde (1.3.75)'e göre genel olarak şu sonucu verebiliriz: n doğal sayısı için

$$\left(\sqrt[3]{a}\pm b\right)^{n}=A(a,b)\sqrt[3]{a}+B(a,b)\sqrt[3]{a^2}+C(a,b)$$

eşitliği mevcuttur. Bu, ***Lagrange***'ın kübik denklemin köklerini bulmada kullandığı yönteme benzer. Çünkü $\sqrt[3]{a}\pm b$'nin n. kuvveti altında a ve b'nin tam katsayılı A, B ve C polinomları ile $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^2}$, 1'in çarpımlarından oluşan bu lineer kombinezonda $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^2}$, 1'in devresel değişimleri ortaya çıkar. Burada yine $\left(\sqrt{a}-b\right)^{3k}, \left(\sqrt{a}-b\right)^{3k+1}$ ve $\left(\sqrt{a}-b\right)^{3k+2}$ pozitif ya da negatif olduklarından (1.3.75)'ten $\sqrt[3]{a^2}$ için elde edilen çözümler (1.3.80)'deki gibi olur ve bu eşitsizliklerden de (1.3.81), (1.3.82) ve (1.3.83)'teki algoritmalar elde edilir. Eğer bu algoritmaları (1.3.80)'de kullanırsak (1.3.84)-(1.3.89)'daki algoritmalar ve (1.3.90)-(1.3.92)'deki algoritmalar da (1.3.80)'deki 3. eşitsizlikte (1.3.81), (1.3.82) ve (1.3.83)'ün kullanılmasıyla elde edilir. Fakat (1.3.84)-(1.3.92)'deki 3 algoritma çakıştığından toplamda 6 tane algoritma mevcut olur. Bunları (1.3.96)'da toplu olarak verdim. Bu sonuçlara göre (1.3.93)'teki 3 iterasyon (1.3.94)'e göre (1.3.95)'te derhal kübik olarak yakınsarken (1.3.96)'daki diğer 6 iterasyon (1.3.100)'e göre (1.3.99) ile kübik yakınsama yapar. Sonuç 1.3.2 ise çalışmada veremediğim diğer sonuçları gösterir.

Bunlar 1. Yol'a göre bulduğum sonuçlar idi. 2. Yol'da $\sqrt[3]{a}$ için (1.3.104) ve $\sqrt[3]{a^2}$ için (1.3.105) iterasyonları elde edilir ve bunları yakınsaklıklarını (1.3.104) ve (1.3.106)'da gösterdim.

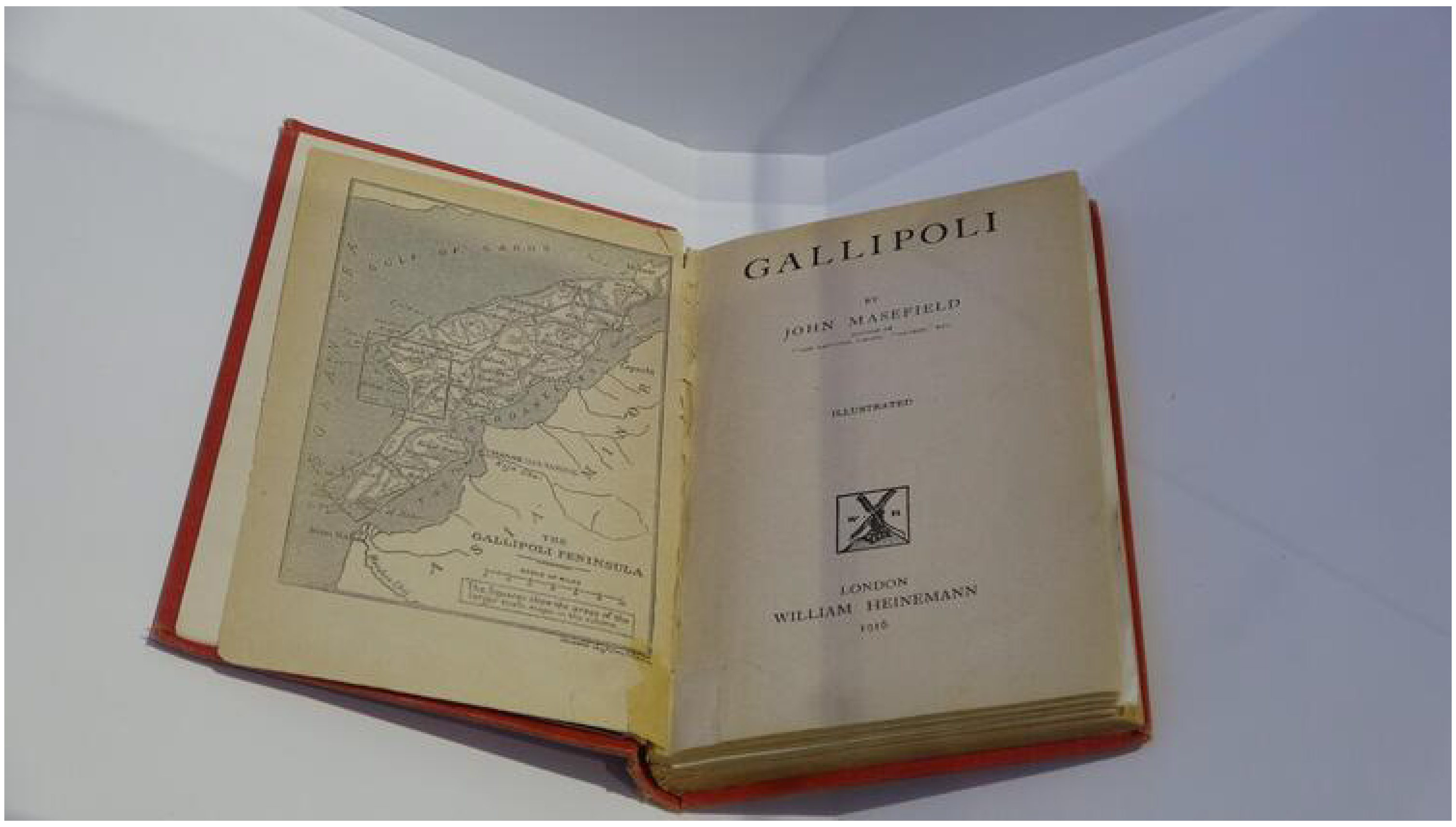
Son olarak günün anlam ve önemine ilişkin ***Atatürk***'ün Çanakkale Savaşları ile ilgili eserlere gösterdiği ilgisine odaklanalım ve sonra Anzak Askeri Kayıtları'ndan ***Mustafa Kemal***'in (***Atatürk***) Çanakkale Savaşları'nda bulunduğuna dair ve şimdiye kadar bilinmeyen tarihsel kayıtlara bir bakalım!

Atatürk'ün Çanakkale Savaşları İle İlgili Yapımlara İlgisi

1. "*Gallipoli (Gelibolu)*", ***John Masefield***, *1916:* Çanakkale Savaşları'nda **"Anafartalar Kahramanı"** olarak ün salan ***Atatürk***'ün Çanakkale Savaşları ile ilgili ilk okuduğu kitap, İngiliz yazar ***John Masefield***'in 1916 tarihli *"Gallipoli (Gelibolu)"* adlı kitabıdır. ***Atatürk*** bu kitabı okurken üzerinde çok sayıda düzeltme yapmıştır. Çünkü ***Masefield***, kitabı propaganda amaçlı yazmıştı.

Önsöz

Bu kitabın en önemli özelliği yazarın kimliğinde saklı. Gelibolu yenilgisi sonrasında ABD'yi savaşa katılmaya ikna edebilmek için İngiliz Savunma Bakanlığı tarafından kendisine verilen görev için Gelibolu'ya gelir. Burada İngiliz birliklerinin onurlu bir geri çekilme sağladığı (!) aslı astarı olmayan bir mektuba dayandırılır.



Atatürk, ***John Masefield***'ın *"Gallipoli (Gelibolu)"* adlı kitabındaki metinleri düzeltip, üzerine çok sayıda not almıştır.

Bu mektup hakkında kitabın 84. sayfasının son paragrafında şunlar yazılıdır: *"Ordumuz Yarımada''yı ele geçirmişti. Ölen bir Türk subayının cesedinin üzerinde, bir gece önce karısına yazdığı, çoğunlukla kişisel meselelerle dolu, hassas bir mektup vardı. Mektupta şu ifadeler yer alıyordu: '**Bu İngilizler dünyanın en iyi savaşçılarıdır. Biz yanlış dostlar seçmişiz!'**"*

Bunlar tabii ki gerçeği yansıtmayan ifadelerdi. Çanakkale savaşlarına bizzat katılan ve olan biteni kendi gözleriyle gören ***Mustafa Kemal Atatürk***, bu ve benzeri metinleri düzelterek kitap üzerinde çok sayıda not aldı (Bkz. *"Atatürk'ün Çanakkale Savaşları ile ilgili okuduğu ilk kitap araştırma merkezinde sergileniyor"*).

2. *"Tell England (İngiltere'yi Anlat)"*, ***Anthony Asquith-Geoffrey Barkas***, *1931:* ***Atatürk***'ün Çanakkale Savaşları ile ilgili ilk izlediği film 1931 İngiliz yapımı *"Tell England"*tır. Film ***Ernest Raymond***'un 1922'de yayımladığı *"Tell England"* adlı romandaki Gelibolu'da savaşan 2 gencin yaşadıkları hikâye ediliyor.

"Tell England"'ın yönetmenleri ***Anthony Asquith*** ile ***Geoffrey Barkas***'ın Çanakkale Savaşı ile yakından ilgisi vardı. ***Asquith***'in babası ***Herbert Henry Asquith***, I. Dünya Savaşı sırasında Birleşik Krallık başbakanıydı. ***Barkas*** ise Çanakkale Savaşı'nda Suvla Koyu'nda savaşmıştı. Ayrıca filmin başrol oyuncularından ***Fay Compton***'ın kardeşi ***Mackenzie Compton***, 6 Ağustos 1915'teki Anafartalar Çıkarması'na katıldı.

Önsöz

General ***Stapford***'un başında olduğu bir İngiliz birliği Suvla koyunda çıkartma yaparken. Çıkartma 6.8.1915 gecesi saat 22:00'da başladı ve ilk etapta 4 taburluk İngiliz birliği karaya çıktı.

88 dakikalık *"Tell England"*'ın çekimlerine 1930'un Mayıs ayında Malta'da başlandı. Gösterime 2 Mart 1931'de giren filmdeki çıkarma sahnelerinde İngiltere Ordusu'nun gemileri, silahları kullanılırken gerçek askerler figüranlık yaptı. Çekimler için ayrıca Malta Kalesi'nden gerçek top atışları da yapıldı. *"Tell England"*, Türkiye'de *"Çanakkale 1914-18"* adıyla gösterime girdi ve ***Atatürk***, filmi 22 Ocak 1932'de İstanbul'daki Opera Sineması'nda izledi.

Atatürk, siper gerisinde ayakta gözlem yaparken bir Anzak siperinden bu **"sarışın (blonde)"** subayın kim olduğu soruluyordu. Daha sonra "Sarı Paşa" olarak anıldı, dolayısıyla **"Sarışın Kurt"** efsanesinin çıkış yeri burasıdır.

Türkiye İzcilik Federasyonu tarafından 22-26.04.2012 tarihleri arasında düzenlenen "Çanakkale Milli Bilinç Kampı" tamamlandı.

ANZAK Askeri Kayıtlarına Göre Çanakkale Savaşları'ndaki "Mustafa Kemal"

2016'da Büyük Piramit'te bir Anzak askerinin "N.C. 1915 (Resim 4.7)" kaydını araştırırken tesadüfen *"AWM4 Subclass 1/27 - Intelligence, Headquarters Australian and New Zealand Army Corps"* bölümündeki *"AWM4 1/27/3 PART 1 - May 1915"* parçasında ***Mustafa Kemal***'den söz edildiğini görmüştüm!

Önsöz

AWM4 (Australian Imperial Force Unit War Diaries 1914-18 War) başlıklı ve 1/27/3 öğe numarasıyla Mayıs 1915'e ait bu 1. Parça'da ***Mustafa Kemal***'in kim olduğuna ilişkin şu ilk kayıtlar mevcuttur:

1. PDF'deki 25. sayfanın sol tarafındaki 19. sayfada 57. Alay'ın (57'th Rt.) karşısına ***"Suleiman Mustafa Pasha"*** yazarken sağ taraftaki 20. sayfada ***"Mustafa Kemal Bey"*** yazar. Bu sonuçla Anzaklar, 3 Mayıs 1915'te ***Mustafa Kemal***'in hangi alayı idare ettiğini teşhis etmişlerdir.

2. 27. sayfada 19. Tümen-57. Alay'ın karşısına ***"Bize karşı (against us)"*** notu düşülmüştür. Bu, ***Mustafa Kemal***'in yönettiği alaydır. Yine, 30. sayfada 19. Tümen-57. Alay'ın karşısına ***"ANZAKlara karşı (against A. & N. Z. A. C.)"*** notu düşülmüştür.

3. 28. sayfanın sağ tarafındaki sayfada el yazısıyla ***Mustafa Kemal***'in adı geçer. Orada ***"Onlar 57. Alay'ın Komutanı Mustafa Kemal ile birliktedir"*** ifadesi geçer.

4. 32. sayfada ***"Kardeşlerimize (To Our Brethren)"*** hitabıyla başlayan mesajın sonunda ***"Kuran'dan bir metin, muhtemelen bir ayet eklenecek (Add text from Quran)"*** notu düşülmüştür. Bu durum düşündürücü olmakla birlikte ***Russell Crowe***'a sormak gerekir (Bkz. "*Son Umut*").

5. 42. sayfada 1. Tabur-33. Alay'dan ölen bir binbaşının üzerinden çıkan kayıtlara göre 43-44. sayfalarda 19. Tümen'i yöneten ***M. Kemal*** imzalı emirler mevcuttur. ***M. Kemal***, 26 Nisan 1915 tarihli bu 7 maddelik emirlerin son maddesinde şöyle der: ***"7) Tümen Karargâhı dağ bataryalarının merkezine yakın bir yerde konuşlandırılmalıdır."***

6. 54-55. sayfalarda 19. Tümen'in emirleri vardır. Bu emirlerin sonunda 19. Tümen Yarbay (19'th Division Lt. Col.) yazar ki, bunlar ***M. Kemal***'in emirleridir.

7. 56-57. sayfalarda yine 19. Tümen Yarbay'ının yani ***Mustafa Kemal***'in emirleri vardır.

Tarihçi ***Sinan Meydan***, "*Çanakkale'de Atatürk yoktu!*" sorusuna tarihsel kanıtları verirken keşke kendisine gönderdiğim bu Anzak kayıtlarından da bahsetseydi. Çünkü ikna etmekte zorlandığımız şeyi belki onlar daha kolay anlatabilir (Bkz. "*Churchill*").

Bu vesileyle 18 Mart Şehitleri Anma Günü ve Çanakkale Deniz Zaferi'nin 108. yıl dönümünde başta ***Gazi Mustafa Kemal Atatürk*** olmak üzere vatan uğruna canlarını feda eden şehitlerimizi rahmet ve minnetle, gazilerimizi saygı ve şükranla anıyoruz!

D. PAMUKTULUM, 18.03.2023, 19:15.

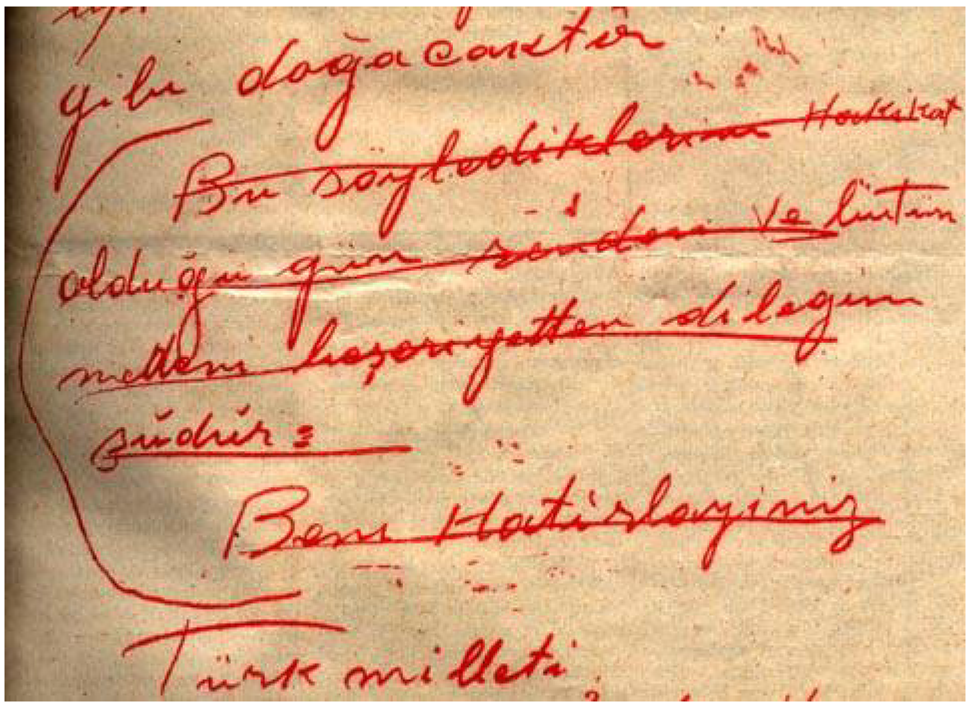
D. PAMUKTULUM

ONAYLANDI
DPT 17:38, 5.4.23

1.3. ATA M Algoritmaları Ver. 1 (4.8.2002, 19:00, 1.10.2008, 6:15)

Öncelikle bu ve sonraki 2 bölümdeki ***"ATA M Algoritmaları Ver. 1, 2 ve 3"*** çalışmaları nedeniyle **"ATA"**nın sözlük ve bilişimdeki anlamlarına bir bakalım.

1. **Sözlük Anlamı:** ATA M Algoritmaları'nın bazıları Babil Algoritması, Newton-Raphson iterasyonu (ki bu iterasyon daha önce ***Şarafettin el-Tusi*** ve ***François Viete*** tarafından verilmişti), Halley ve Hausholder iterasyonları ile, ve varsa diğer iterasyonlarla, doğal olarak çakıştığından, bu durumu en iyi ifade eden kelimenin "ATA" olduğunu söyleyebilirim. Çünkü bana göre **"ATA"**nın sözlük anlamı şu demektir: *"Bizden önceki ve ardışık olarak birbirini takip eden nesillerdeki ve de tabii ki başlangıçtaki insanlardan her birine 'ata' denir".*


gibi doğacaktır
~~Bu söylediklerim~~ Hakikat
olduğu gün sizden ve bütün
medeni beşeriyetten dileğim
şudur:
Beni Hatırlayınız
Türk milleti

Resim 1.3.1. 10. Yıl Nutku'nun taslak metninin son kısmı: ***"Bu söylediklerim hakikat olduğu gün sizden ve bütün medeni beşeriyetten dileğim şudur: Beni hatırlayınız!"***

Yukarıdaki üstü çizili sözlerin ***Genel Yazmanı Hikmet Bayur*** tarafından ölümü çağrıştırdığını ve ulusa veda anlamı içerdiğini söyleyerek kaldırılmasını istediğini ve kendisinin de bu sözleri kaldırarak nutkunu okumuş olduğunu görüyoruz. Fakat o sırada önemsizmiş gibi görünen bu sözler vefatıyla birlikte önem arz etmeye başlamış, kendi eliyle yazdığı *"Geometri"* kitabıyla Türk Matematiği'ne katkılarından dolayı Cumhuriyetimizin 80. Yıldönümü'nde *"ATA Formülü ve Uygulamaları 2003"* çalışmamı verdiğim gibi, Cumhuriyetimizin 85. ve ölümünün 70. Yıldönümleri'nde de ***"ATA M Algoritmaları Ver. 1, 2, 3"*** adlı çalışmamı vermekten büyük bir onur ve gurur duyduğumu ve O'nu hiç unutmadığımızı, tersine O'na her zamankinden daha fazla ihtiyacımızın olduğunu belirmek isterim!

Şimdi bu algoritmaları keşfeden kişi olarak; Son Haçlı Seferi'ni kazanarak mâkus talihimizi değiştiren, Türkler'in ve Anadolu insanının kökleri ve ataları hakkında Cumhuriyetin ilânından ölümüne kadar ilgisi artarak araştırmaya devam eden (ki son zamanlarında üst üste uykusuz geceler geçirerek adeta bu uğurda ölümüne mücadele etmişti), ölümünden hemen önce yazdığı *"Geometri"* kitabıyla Türk Matematiği'ne katkıda bulunan (bkz. *"ATA Formülü ve Uygulamaları: Bölüm 1"*) ve ölümünden sonra da tüm insanlığa ve atalarımız hakkında bize fikirleriyle ışık tutarak yolumuzu aydınlatan (ki Eski Mısır, Babil ve diğer eski uygarlıkları araştırmamda gözümün açılmasına neden olmakla birlikte daha pek çok kişinin yaşamına yön vermiştir. Örneğin yalnızca kişisel ilgisi sayesinde ülkemize (yıl başında piyasaya çıkacak 5 TL'nin arka yüzünde resmi olan) ***Ord. Prof. Dr. Aydın Sayılı***'yı bir **"Bilim Tarihçisi"** olarak kazandırmış ve o da, ***"Mısırlılarda ve Mezopotamyalılarda Matematik, Astronomi ve Tıp, Türk Tarih Kurumu Basımevi, Ankara 1966"*** kitabıyla ülkemize eşsiz bir katkı yapmıştır. Eğer ***Sayılı*** yaşasaydı, buradaki Babil Algoritması ile ilgili ve diğer gelişmeler karşısında eminim ki çok şaşırırdı!) Yüce Önderimiz ***ATATÜRK***'ün adının kısaltılmışı olarak (ki İngilizce sözlüklerde de bu şekilde yer alır) **"ATA"** adını verdim. Öyle ki bu adı daha ***"ATA M Algoritmaları Ver. 2"***deki **Teorem 1.4.1**'deki açılımın $\sqrt[n]{a}$ için genelleştirilebilineceğini (***Lagrange***'ın tahmindeki gibi) gördüğüm anda (02.03.2005, 21:45) söylemeye başlamıştım bile ve aradan 3 yıl geçtikten sonra bu adı değiştirmek yerine 4.8.2002, 19:00'da Babil Sürekli Kesirleri için keşfettiğim metodu 1.10.2008, 6:15'te tekrar ele aldım ve köklü matematiksel sabitler için serilerin BBP serilerindeki gibi periyodik açılımlarını kullanarak ***"ATA M Algoritmaları Ver. 1"*** çalışmasını ortaya çıkarttım ve bu nedenle 26.12.2007, 20:45'te keşfettiğim ***"Polinomal İnterpolasyonlarla $f(x)$ Eğrisinin Köklerine Süperlineer Yaklaşımlar Metotları"***na ***"ATA M Algoritmaları Ver. 3"*** adını verdim.

Araştırmacı-Matematikçi *D. PAMUKTULUM*, 27 Ekim 2008, 20:30.

2 Dakikada Haiti'ye Dönen Şehirler: Kahramanmaraş, Adıyaman, Kilis, Şanlıurfa, Diyarbakır, Adana, Osmaniye, Gaziantep, Malatya, Hatay, Rojava, İdlib, Halep, Hama, Lazkiye, Tartus vd.

Şimdi söyleyeceklerim bugüne aittir (9.02.2023, 05:31): *"YBC 7289 No'lu Tableti"* hakkında tezimi yazarken ABD'nin Yunanistan'da kurduğu üsler nedeniyle Yunanlıları eleştirmiş ama hiçbir zaman sağduyuyu elden bırakmamıştım. Örneğin Başbakan ***Miçotakis***, şimdi şunları söylüyor: *"Yunanistan ve Türkiye zor zamanlarda birbirlerine yardım etmesi gereken komşulardır. Bu, ülkelerimizi vuran ilk deprem değil. Bu, geçici olarak farklılıklarımızı bir kenara bırakmanın ve çok çok acil bir durumu ele almanın zamanıdır".* Başbakan, trajik kayıplar için Yunan halkı adına üzüntüsünü bir kez daha dile getirdi ve Yunanistan'ın iki halkın yanında duracağını, enkazda hayatta kalanların bulunması için acil yardım sağlayacağını ve kendilerini evsiz bulacak yüz binlerce, belki de milyonlarca insanı desteklemek için insani yardım sağlayacağını yineledi (Bkz. *"Brüksel'de bir Bağışçılar Konferansı düzenleyin!"*).

Resim 1.3.2. Hatay'da arama-kurtarma çalışmalarına katılan Yunan kurtarma ekibi, 6 yaşındaki bir çocuğunu enkaz altından sağ olarak çıkardı (Bkz. *"Kurtarma ekibinin anlattıkları Yunanistan'ı sarstı"*). Onların arasında ***Panagiotis Kotridis*** de vardı. O, 99 depreminde Yunan Kurtarma Timi'nde mücadele ederken bu sefer İtfaiye Tümgenerali olarak görev yaptı!

Bununla birlikte EMAK'a bağlı arama kurtarma uzmanı 21 itfaiyeci, 2 doktor, 3 acil yardım sağlık personeli, 2 arama kurtarma köpeğinden oluşan ekip, Yunan Silahlı Kuvvetlerine ait C-130 tipi uçakla dün Atina yakınlarındaki Elefsina Havaalanı'ndan hareketle Türkiye'ye geldi. Yunan ekip dün meydana gelen depremde en çok etkilenen illerden biri olan Hatay'a ulaşır ulaşmaz çalışmalarına başladı ve enkaz altından 6 yaşındaki bir kız çocuğunu çıkardı.

Çocuğu sedyeyle çıkaran ekipler, bölgedeki vatandaşların alkışlarıyla karşılaştı. Yunan ekiplerin çocuğun çıkarıldığı andaki mutluluğu birbirlerine sarılarak paylaşmaları görülmeye değerdi (Bkz. "*Yunan arama kurtarma ekibi sevince boğuldu*"). Yani bizi dostluk değil ama deprem birleştirdi. Keşke hep böyle dost kalabilsek!

2. **Bilişim Anlamı:** "ATA" kelimesi sözlük anlamının yanında bilişim alanında da anlamını aradım ve şu mantıklı sonuca ulaştım:

ATA (Artımlı Transformasyon Algoritmaları, 15.05.2008, 20:30): ATA, Algoritmalar Tarihi'nde daha önceki bilgi dağarcığını unutmadan, ileri transformasyonla(rla) (dönüşümle(rle)) yeni bilgi(ler) alan algoritmalardır. Daha açık bir ifadeyle, ilkel bir algoritmanın zaman içinde yeni bilgiler alması suretiyle evrimleşerek modern bir hâl almasıdır. Örneğin, M.Ö. 2000'lerde kareköklü bir sayının hesaplanmasında Babilliler tarafından kullanılan

$$b_{n+1} = \frac{b_n^2 + a}{2b_n} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{a}$$

şeklindeki kuadratik algoritma günümüzde farklı metotlarla da elde edilebilmektedir. Buna göre Babilliler bu algoritmayla a'nın karekökü için her bir yaklaşıklığı birkaç adımda hesaplarlarken, günümüzde bütün bu işlemler **"formül"** kavramı nedeniyle tek bir formül içinde yapılabilmektedir. Fakat her iki kullanım şekli de aynı sonuçlar ürettiğinden, **"Babil Algoritması"** 4000 yıldan beri algoritmik yapısı değişmeden günümüze kadar gelebilen ender algoritmalardan biridir!

Not 1.3.1. Bu tür algoritmalar için daha önceki keşfim, ***"ATA (Advanced Transformated Algorithms: İleri Dönüşümlü Algoritmalar)"*** idi ve ben, **"ATA"** isminin temel anlamını da kucaklayan, kapsama alanı en geniş matematiksel ismi araştırıyordum. Araştırmalarım istediğim sonucu verdi. Çünkü bu son açılımın Türkçesi anlam bakımından da İngilizce olanından daha baskın çıktı! Bu konuda yanılmıyorsam, ki bunu bana bir Türkçe öğretmeni anlatmıştı; ***Yahya Kemal Beyatlı*** *"Rindlerin Ölümü"* şiirindeki **"serin"** kelimesi için 8 yıl beklemiş! Benimkisi ise hazır bir kalıba en uygun ismi aramaktan ibaretti. Ama bunun her iki halde de yorucu bir uğraş olduğu açık.

Şimdi "ATA"nın anlamlarını öğrendiğimize göre, ilk versiyondaki yeni metoda kapı açan Babil Sürekli Kesirleri'nin nasıl elde edildiğini görelim. Daha sonra bu kesirlerle birlikte genel olarak $\left(\sqrt[p]{a} - b\right)^n$'nin periyodik açılımlarından $\sqrt[p]{a}$ için elde edilen süperlineer algoritmalarını incelemeye geçebiliriz.

1.3.1. Babil Sürekli Kesirleri. Bu sefer 1.2. bölümdeki (Bölüm 2) gibi eşlenik alma yerine $0 \le \left(\sqrt{a} - b\right)^n \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$ eşitsizliğinden Binom açılımına göre $\sqrt{a}$'yı çözmeye çalışalım. İlkin $n = 1$ alınırsa (tam değer fonksiyonunun tanımı nedeniyle) (1.2.1)'deki eşitsizlik ya da tanım elde edilir. Eğer $n = 2$ alırsak,

$$0 \le \left(\sqrt{a} - b\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\sqrt{a}(-b) + (-b)^2 = a - 2\sqrt{a}.b + b^2 \Rightarrow \sqrt{a} \le \frac{a + b^2}{2b}$$

eşitsizliklerinden şu yaklaşım elde edilir:

$$(1.3.1) \quad \sqrt{a} \le \frac{a + b^2}{2b}.$$

Eğer $n = 3$ alırsak Binom açılımına göre

$$0 \le \left(\sqrt{a} - b\right)^3 = \left(\sqrt{a}\right)^3 + 3\left(\sqrt{a}\right)^2(-b) + 3\sqrt{a}(-b)^2 + (-b)^3 = a\sqrt{a} - 3ab + 3\sqrt{a}.b^2 - b^3 \Rightarrow \frac{3ab + b^3}{a + 3b^2} \le \sqrt{a}$$

eşitsizliklerinden

$$(1.3.2) \quad \frac{3ab + b^3}{a + 3b^2} \le \sqrt{a}$$

yaklaşımı ortaya çıkar ve diğer n değerleri için işleme bu şekilde devam edersek (1.2.62)'deki (ya da (1.2.6)) Babil Sürekli Kesirleri'ni elde etmiş oluruz. Fakat bu kesirleri teker teker bu şekilde elde etmek yerine hepsini toplu bir şekilde elde etmeye çalıştığımız zaman, yeni bir yöntemin kapısını şu şekilde açmış oluruz:

1.3.2. Metot. Bilindiği gibi bazı matematiksel sabitlerin belli bir tabanda hesaplanmasına imkân veren BBP tipindeki seriler, özellikle π için kurulan ters tanjant özdeşliklerindeki seriler, ortak bir tabanda yazılması için periyodik açılımlara tâbi tutulurlar. Buna göre eğer $\left(\sqrt[p]{a} - b\right)^n$ ifadesini periyodik olarak açmak istersek $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $1 < p \le q \le n + 1$ olacak şekilde

$$(1.3.3) \quad \left(\sqrt[p]{a} - b\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\sqrt[p]{a}\right)^{n-i} (-b)^i = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{(-1)^i \binom{n}{i} a^{\frac{n-i}{p}} b^i}_{=:B_{n,i}\left(\sqrt[p]{a},b\right)} = \sum_{r=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{\left[\!\left[\frac{n-r}{q}\right]\!\right]} B_{n,qj+r}\left(\sqrt[p]{a}, b\right)$$

şeklinde bir açılım elde ederiz. Burada Binom açılımından elde edilen periyodik açılımdaki genel terim şöyledir:

$$(1.3.4) \quad B_{n,qj+r}\left(\sqrt[p]{a}, b\right) = (-1)^{qj+r} \binom{n}{qj + r} a^{\frac{n-(qj+r)}{p}} b^{qj+r}.$$

Şu halde genel olarak $n = qk + s$ $(s = 0,1,\cdots,q - 1)$ için

$$(1.3.5) \quad \left(\sqrt[p]{a} - b\right)^{qk+s} = \sum_{r=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{\left[\!\left[\frac{qk+s-r}{q}\right]\!\right]} B_{qk+s,qj+r}\left(\sqrt[p]{a}, b\right)$$

formülünü periyodik olarak açarsak,

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt[p]{a}-b\right)^{qk} &= \sum_{r=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{[\![\frac{qk-r}{q}]\!]} B_{qk,qj+r}\left(\sqrt[p]{a},b\right) = \sum_{r=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{[\![\frac{qk-r}{q}]\!]} (-1)^{qj+r}\binom{qk}{qj+r} a^{\frac{qk-(qj+r)}{p}} b^{qj+r} \\
&= \sum_{j=0}^{[\![\frac{qk}{q}]\!]}(-1)^{qj}\binom{qk}{qj} a^{\frac{qk-qj}{p}} b^{qj} + \sum_{j=0}^{[\![\frac{qk-1}{q}]\!]}(-1)^{qj+1}\binom{qk}{qj+1} a^{\frac{qk-(qj+1)}{p}} b^{qj+1} + \cdots + \sum_{j=0}^{[\![\frac{qk-(q-1)}{q}]\!]}(-1)^{qj+q-1}\binom{qk}{qj+q-1} a^{\frac{qk-(qj+q-1)}{p}} b^{qj+q-1} \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{qj}\binom{qk}{qj} a^{\frac{q(k-j)}{p}} b^{pj} + \sqrt[p]{a^{q-1}}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{qj+1}\binom{qk}{qj+1} a^{\frac{q(k-j-1)}{p}} b^{qj+1} + \cdots + \sqrt[p]{a}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{qj+q-1}\binom{qk}{qj+q-1} a^{\frac{q(k-j-1)}{p}} b^{qj+q-1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt[p]{a}-b\right)^{qk+1} &= \sum_{r=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{[\![\frac{qk+1-r}{q}]\!]} B_{qk+1,qj+r}\left(\sqrt[p]{a},b\right) = \sum_{r=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{[\![\frac{qk+1-r}{q}]\!]} (-1)^{qj+r}\binom{qk+1}{qj+r} a^{\frac{qk+1-(qj+r)}{p}} b^{qj+r} \\
&= \sum_{j=0}^{[\![\frac{qk+1}{q}]\!]}(-1)^{qj}\binom{qk+1}{qj} a^{\frac{qk+1-qj}{p}} b^{qj} + \sum_{j=0}^{[\![\frac{qk+1-1}{q}]\!]}(-1)^{qj+1}\binom{qk+1}{qj+1} a^{\frac{qk+1-(qj+1)}{p}} b^{qj+1} + \sum_{j=0}^{[\![\frac{qk+1-2}{q}]\!]}(-1)^{qj+2}\binom{qk+1}{qj+2} a^{\frac{qk+1-(qj+2)}{p}} b^{qj+2} + \cdots + \sum_{j=0}^{[\![\frac{qk+1-(q-1)}{q}]\!]}(-1)^{qj+q-1}\binom{qk+1}{qj+q-1} a^{\frac{qk+1-(qj+q-1)}{p}} b^{qj+q-1} \\
&= \sqrt[p]{a}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{qj}\binom{qk+1}{qj} a^{\frac{q(k-j)}{p}} b^{qj} + \sum_{j=0}^{k}(-1)^{qj+1}\binom{qk+1}{qj+1} a^{\frac{q(k-j)}{p}} b^{qj+1} + \sqrt[p]{a^{q-1}}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{qj+2}\binom{qk+1}{qj+2} a^{\frac{q(k-j-1)}{p}} b^{qj+2} + \cdots + \sqrt[p]{a^{2}}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{qj+q-1}\binom{qk+1}{qj+q-1} a^{\frac{q(k-j-1)}{p}} b^{qj+q-1},
\end{aligned} \tag{1.3.6}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt[p]{a}-b\right)^{qk+q-1} &= \sum_{r=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{[\![\frac{qk+q-1-r}{q}]\!]} B_{qk+q-1,qj+r}\left(\sqrt[p]{a},b\right) = \sum_{r=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{[\![\frac{qk+q-1-r}{q}]\!]} (-1)^{qj+r}\binom{qk+q-1}{qj+r} a^{\frac{qk+q-1-(qj+r)}{p}} b^{qj+r} \\
&= \sum_{j=0}^{[\![\frac{qk+q-1}{q}]\!]}(-1)^{qj}\binom{qk+q-1}{qj} a^{\frac{qk+q-1-qj}{p}} b^{qj} + \sum_{j=0}^{[\![\frac{qk+q-1-1}{q}]\!]}(-1)^{qj+1}\binom{qk+q-1}{qj+1} a^{\frac{qk+q-1-(qj+1)}{p}} b^{qj+1} + \cdots + \sum_{j=0}^{[\![\frac{qk+q-1-(q-1)}{q}]\!]}(-1)^{qj+q-1}\binom{qk+q-1}{qj+q-1} a^{\frac{qk+q-1-(qj+q-1)}{p}} b^{qj+q-1} \\
&= \sqrt[p]{a^{q-1}}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{qj}\binom{qk+q-1}{qj} a^{\frac{q(k-j)}{p}} b^{qj} + \sqrt[p]{a^{q-2}}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{qj+1}\binom{qk+q-1}{qj+1} a^{\frac{q(k-j)}{p}} b^{qj+1} + \cdots + \sum_{j=0}^{k}(-1)^{qj+q-1}\binom{qk+q-1}{qj+q-1} a^{\frac{q(k-j)}{p}} b^{qj+q-1}
\end{aligned}
$$

eşitliklerinden a ve b'nin tam katsayılı polinomları

$$
C_{s,r}(a,b) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{k}(-1)^{qj+r}\binom{qk+s}{qj+r} a^{\frac{q(k-j)}{p}} b^{qj+r}, & r \le s \text{ ise} \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{qj+r}\binom{qk+s}{qj+r} a^{\frac{q(k-j-1)}{p}} b^{qj+r}, & s < r \text{ ise} \end{cases} \tag{1.3.7}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt[p]{a}-b\right)^{qk} &= C_{0,0}(a,b) + C_{0,1}(a,b)\sqrt[p]{a^{q-1}} + \cdots + C_{0,q-1}(a,b)\sqrt[p]{a}, \\
\left(\sqrt[p]{a}-b\right)^{qk+1} &= C_{1,0}(a,b)\sqrt[p]{a} + C_{1,1}(a,b) + C_{1,2}(a,b)\sqrt[p]{a^{q-1}} + \cdots + C_{1,q-1}(a,b)\sqrt[p]{a^{2}}, \\
&\vdots \\
\left(\sqrt[p]{a}-b\right)^{qk+q-1} &= C_{q-1,0}(a,b)\sqrt[p]{a^{q-1}} + C_{q-1,1}(a,b)\sqrt[p]{a^{q-2}} + \cdots + C_{q-1,q-1}(a,b)
\end{aligned} \tag{1.3.8}
$$

sistemini elde eder ve bu sistemi matris notasyonuyla gösterirsek,

$$(1.3.9)\quad \begin{bmatrix} (\sqrt[p]{a}-b)^{qk} \\ (\sqrt[p]{a}-b)^{qk+1} \\ \vdots \\ (\sqrt[p]{a}-b)^{qk+q-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{0,1}(a,b) & C_{0,2}(a,b) & \dots & C_{0,q-2}(a,b) & C_{0,q-1}(a,b) & C_{0,0}(a,b) \\ C_{1,2}(a,b) & C_{1,3}(a,b) & \dots & C_{1,q-1}(a,b) & C_{1,0}(a,b) & C_{1,1}(a,b) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{q-1,0}(a,b) & C_{q-1,1}(a,b) & \dots & C_{q-1,q-3}(a,b) & C_{q-1,q-2}(a,b) & C_{q-1,q-1}(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt[p]{a^{q-1}} \\ \sqrt[p]{a^{q-2}} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

eşitliğini yazabiliriz. Burası çok önemli: Katsayılar matrisini sağ üst köşeden itibaren okuyoruz. Aksi takdirde matrisi (1.3.8)'dekinden farklı olarak hatalı yazarsanız!

Burada (1.3.9)'daki katsayılar determinantı $w^q = 1$ için

$$(1.3.10)\quad |\Delta_q| = \begin{vmatrix} C_{0,1}(a,b) & C_{0,2}(a,b) & \dots & C_{0,q-2}(a,b) & C_{0,q-1}(a,b) & C_{0,0}(a,b) \\ C_{1,2}(a,b) & C_{1,3}(a,b) & \dots & C_{1,q-1}(a,b) & C_{1,0}(a,b) & C_{1,1}(a,b) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{q-1,0}(a,b) & C_{q-1,1}(a,b) & \dots & C_{q-1,q-3}(a,b) & C_{q-1,q-2}(a,b) & C_{q-1,q-1}(a,b) \end{vmatrix} = (-1)^{\binom{q}{2}} \prod_{s=0}^{q-1} \left(\sum_{r=0}^{q-1} C_{0,q-r-1}(a,b) \sqrt[p]{a^{q-r-1}}\, w^{(q-r)s} \right) = (-1)^{\binom{q}{2}} \left(a^{\frac{q}{p}} - b^q \right)^{qk} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

olup sıfıra yakınsar.

İterasyonların Bulunması. Metodun en zor kısmı burasıdır. Çünkü iterasyonların nasıl bulunacağına ilişkin tek bir prosedür yoktur ve her bulunan iterasyonun yüksek mertebeden olduğunun garantisi yoktur. Bu nedenle burada $p = 2{,}3$ için yüksek mertebeden iterasyonların nasıl elde edildiklerini açık bir şekilde ve tüm yönleriyle (ki bunlar 2008'den kalma orijinal çalışmalarımdır) verirken $p = 4{,}5$ için sadece bir demostrasyon (gösteri) yapacağım. Bu iterasyonların elde ediliş şekli ***"ATA M Algoritmaları Ver. 2, 3"***tekilerine benzer. Yani her 2 yöntemdeki iterasyonların elde ediliş şekilleri hemen hemen aynıdır!

Geçmişe Duyulan Bir Özlem ve *Atatürk*

Bildiğiniz gibi *"Yaşar ne yaşar ne yaşamaz"* adlı 1974 tarihli filmde ve 1977 tarihli romanda kahramanın karşılaştığı hukuki problemler yüzünden vatandaşlık haklarından yararlanamadığı abartı ve gülmeceyle anlatılır (Bkz. *"'Yaşar ne yaşar ne yaşamaz' Romanı Ekseninde Türkiye'de Devlet-Vatandaş İlişkileri"*). Çünkü nüfus kaydının hatalı tutulması nedeniyle 1915'te Çanakkale'de ve 1935'te Dersim'de şehit kaydı düşülmüştür. ***Yaşar***'ın 1915'te Çanakkale Savaşları'nda şehit düşmesinin baskın olarak dile getirilmesi ve filmin sonundaki *"Çocuğun babası 55 yıl önce şehit düşmüş!"* ifadesi, bir tespitten ziyade geçmişe duyulan özlemi gösterir.

Resim 1.3.3. ***Mustafa Kemal***, İstanbul'dan gelen gazeteci, yazar ve şairler heyetine savaş alanlarını gezdirirken, 16 Temmuz 1915 (Bkz. *"Atatürk'ün Çanakkale Savaşları'ndaki Başarıları"*). Bu fotoğraf ***Atatürk***'ün bir siper gerisindeyken Binbaşı ***Alganer*** tarafından çekilen fotoğraftan 1 gün farkla tam 1 ay sonra çekildi (Bkz. *"Piobert-Parmentier Metodu'nun ℚ Üzerinde Genelleştirilmesi"* makalesinin 24. sayfasındaki Resim 4.6). Fakat her 2 fotoğrafta ***Atatürk***'ün üzerindeki her şey aynı olmasına rağmen bu fotoğrafta "A"ları gösteren gölgeleri göremezsiniz!

Efsane fotoğraftaki "A"ları nasıl keşfettim?

Anılan fotoğraftaki ***Atatürk***'ün ceketinin üzerindeki gölgelerin oluşturduğu "A" harflerini ilkin Google'da 9.10.2017, 16:05:41'de bilgisayarıma indirdiğim "ata1.jpg" resmini gördüğüm zaman fark etmiştim. Tabii ki bilgisayarda değil Google'da bakarken (Bkz. *"Portrait of Ataturk"*. Burada şu notu düşmem gerekir: ***Atatürk***'ün Avustralya Savaş Hatıratları Müzesi'nde daha pek çok resmi vardır. Bkz. *"Efsanenin Şafağı: Mustafa Kemal"*. Ben ise bu resimlerin orijinallerini sağda solda araştırarak buluyorum ve bu da çok zaman alıyor. Peki bizde niye böyle bir şey yok? Bu konuda *"Avustralya'da Atatürk Sevgisi"* makalesini okuyarak gerekli bilgileri alabilirsiniz). İlkin gözlerime inanamadığım için bu fotoğrafı Photoshop'ta birkaç işleme tabii tutarak ***Atatürk***'ün ceketi üzerindeki gölgelerin doğal olduğunu anladım ve sonra bu fotoğrafı colorize-it.com sitesinde renklendirdim. İlk okumada (11.10.2017, 21:34:56) ***Atatürk***'ün ceketinin sol tarafındaki üstte "P" ve altta "A" harflerini gördüm. Bu okumaları Google'da dolaşıma sokulan Binbaşı ***Alganer***'in fotoğrafı olduğu söylenen orijinal fotoğraf ve Anadolu Ajansı tarafından servis edilen aynı fotoğraf (ki bundaki netlik daha iyiydi) olmak üzere 2 fotoğrafta şu şekilde yaptım: "P" harfini ilk bakışta süslü "₽" olarak görmüştüm. Çünkü "ata1.jpg"e dikkatli bir şekilde bakarsanız oradaki "P" ve "A" harflerini nasıl gördümse onlara uygun özel karakterleri seçerek işaret ettiğimi görebilirsiniz. Fakat daha sonra detaylı analizde üstteki harfin "₽"den çok "A"ya benzediğini tespit ettim ve "A"ları nasıl gördüğümü "AA.jpg"den açıkça görebilirsiniz. Sizin Resim 4.6'da gördüğünüz fotoğraf 2021'e aittir ama onu ilk kez 24.01.2018, 22:31:33'te "AA.jpg" fotoğrafı olarak 27.06.2019, 04:14:19 tarihli *"Romberg İntegrasyonu 2016-2019.pdf"* tezime koymuştum (Bkz. *"ATA-2017"* ve *"ATA-2018"*). Aşağıdaki 7. sayfada anlattığım olay ise bu fotoğrafı düzenledikten 13 gün sonra meydana geldi ve sabah yaptığım o hatayı okuldan geldikten sonra hemen düzelttim!

Tarihte böylesine sarsıcı bir olaya yakın olanlar psikolojik olarak etkilenirler ve yaşamlarına yansıtırlar. Örneğin II. Dünya Savaşı'ndan 23 yıl sonra çekilen ve Uzay Yolu'ndaki (Star Trek) *"Mutlak Güç (Absolute Power)"* bölümünde bunu açık bir şekilde görebilirsiniz (Bkz. RİK 3, S. 18, Resim 1.5). Buradaki filmde ise çocuğun babasının 55 yıl önce şehit düştüğü söylenirken 1970 yılı kast edilmekte ve olayın sıcaklığının soğumadığını gösterir. Şimdi olaydan bir o kadar daha uzaklaştık. Fakat ***Atatürk***'e olan özlem ve sevgi tam tersine her geçen yıl daha da artıyor!

Şimdi ilkin şu genel prosedürden başlamalıyız: Eğer Metot'ta $p = q$ alırsak (1.3.8)'deki $\left(\sqrt[p]{a} - b\right)^{pk+s}$'lerin negatif ya da pozitif olmalarından hareketle $\sqrt[p]{a^{p-1}}$, $\sqrt[p]{a^{p-2}}$ ve $\sqrt[p]{a}$'ları $s, r = 0,1,2,3, \dots, \mathrm{p} - 1$ için $C_{s,r}(a, b_n)$'lerin rasyonel polinomları olarak çözersek (ki uygulamada 2 farklı yol verdim. Arzu edilirse çözüm yolu sayısı artırılabilir) $\sqrt[p]{a}$ için elde edilen tüm $E_{1,i_1}(a, b_n)$ iterasyonların yakınsaklıklarına ilişkin

$$(1.3.11) \quad E_{1,i_1}(a, b_n) - \sqrt[p]{a} = \tau_{i_1}(a, b_n)\left(b_n - \sqrt[p]{a}\right)^{pk+t}$$

ya da

$$(1.3.12) \quad E_{1,i_1}^p(a, b_n) - a = \rho_{i_1}(a, b_n)\left(b_n^p - a\right)^{pk+t}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Resim 1.3.4. 1922'deki Roma Yürüyüşü sırasında ***Mussolini*** ve Dört Birlik (Quadrumvirs). Soldan sağa: ***Michele Bianchi***, ***Emilio De Bono***, ***Italo Balbo*** ve ***Cesare Maria De Vecchi***. Arkada da sol elini sallayarak faşist akıma katılan bir çocuk var. Anlaşılan o ki, 1922'ye gelindiğinde 7'den 70'e herkes faşist akıma katılmış!

Bu sonuçlara göre $E_{1,i_1}(a, b_n)$ iterasyonları nasıl elde edilirse edilsinler doğrudan anılan mertebeden süperlineer yani yüksek mertebeden iterasyonlar olarak elde edilirler. Yani doğrudan

$$(1.3.13) \quad E_{1,i_1}(a, b_n) \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[p]{a}$$

limiti geçerli olur. Buna ilişkin $p = 2$ için 2 tane, $p = 3$ için 1. Yol'da 3 tane ve 2. Yol'da 1 tane olmak üzere toplamda 4 tane, $p = 4$ için 1. Yol'da 7 tane ve 2. Yol'da 1 tane olmak üzere toplamda 8 tane ve $p = 5$ için 1. Yol'da 164 tane ve 2. Yol'da 1 tane olmak üzere toplamda 165 tane iterasyon mevcuttur. Eğer Tarih'ten bir örnek vermek gerekirse, ***Mussolini***, 23.03.1919'da fütüristlerin ve savaş gazilerinin katıldığı bir toplantı düzenlemiş ve tuhaf karakterlerden oluşan bu toplantıda içlerinden ilk 50 kişi faşist akımını kurmuştu!

Fakat bu durum sonraki iterasyonlarda doğrudan ortaya çıkmaz; yani $j = 2, \cdots, p - 1$ için $E_{j,i_j}(a, b_n)$ iterasyonları

$$(1.3.14) \quad E_{j,i_j}(a, b_n) \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt[p]{a^j}$$

limiti nedeniyle lineer olarak yakınsarlar. Ama onları da aşağıda gösterdiğim gibi limit alma işlemleriyle $\sqrt[p]{a}$'ya süperlineer olarak yakınsatabiliriz!

Bununla birlikte, $\sqrt[p]{a^2}$ için elde edilen tüm $E_{2,i_2}(a, b_n)$ iterasyonların yakınsaklıklarına ilişkin

$$(1.3.15) \quad E_{2,i_2}^p(a, b_n) - a^2 = \rho_{i_2}(a, b_n)\left(b_n^p - a\right)^{pk+t},$$

$\sqrt[p]{a^3}$ için elde edilen tüm $E_{3,i_3}(a, b_n)$ iterasyonların yakınsaklıklarına ilişkin

$$(1.3.16) \quad E_{3,i_3}^p(a, b_n) - a^3 = \rho_{i_3}(a, b_n)\left(b_n^p - a\right)^{pk+t},$$

ve sonuçta $\sqrt[p]{a^{p-1}}$ için elde edilen tüm $E_{p-1,i_{p-1}}(a, b_n)$ iterasyonların yakınsaklıklarına ilişkin

$$(1.3.17) \quad E_{p-1,i_{p-1}}^p(a, b_n) - a^{p-1} = \rho_{i_{p-1}}(a, b_n)\left(b_n^p - a\right)^{pk+t}$$

eşitlikleri geçerli olur.

Şimdi az önce yukarıda bahsettiğim gibi bunlardan sonuncusu için (1.3.14)'teki limit geçerliyken

$$E_{p-1,i_{p-1}}^p(a, b_n) - a^{p-1} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Rightarrow E_{p-1,i_{p-1}}^p(a, b_n) \xrightarrow{k\to\infty} a^{p-1} \Rightarrow E_{p-1,i_{p-1}}(a, b_n) \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt[p]{a^{p-1}} = \sqrt[p]{\frac{a^p}{a}} = \frac{a}{\sqrt[p]{a}} \Rightarrow \frac{a}{E_{p-1,i_{p-1}}(a, b_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[p]{a}$$

limitlerine göre

$$(1.3.18) \quad \frac{a}{E_{p-1,i_{p-1}}(a, b_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[p]{a}$$

yakınsaklığı, dolayısıyla

$$(1.3.19) \quad \left(\frac{a}{E_{p-1,i_{p-1}}(a, b_n)}\right)^p - a = \mu_{i_j}(a, b_n)\left(b_n^p - a\right)^{pk+t}$$

eşitliği geçerli olur. Diğer $j = 2, \cdots, p-2$ için $E_{j,i_j}(a, b_n)$ iterasyonlarını $\sqrt[p]{a}$'ya süperlineer olarak yakınsatmak istersek bundan daha karmaşık limit işlemlerini yapmamız gerekir!

Şimdi bu genel prosedüre göre $p = 2,3,4,5$ için yüksek mertebeden iterasyonların nasıl elde edildiklerini göstereyim.

1. $p = 2$ ise: (1.3.8)'deki $\left(\sqrt{a} - b\right)^{2k}$ ve $\left(\sqrt{a} - b\right)^{2k+1}$'in pozitif ya da negatif olmalarından hareketle $\sqrt{a}$'ları $C_{0,0}(a, b_n), C_{0,1}(a, b_n), C_{1,0}(a, b_n)$ ve $C_{1,1}(a, b_n)$ polinomlarına göre çözdüğünüzde $\sqrt{a}$ için $p = 2$ tane $D_{1,1}(a, b_n)$ ve $D_{1,2}(a, b_n)$ iterasyonları doğrudan ortaya çıkarlar.

Bu iterasyonların yakınsaklıklarına ilişkin $i_1 = 1,2$ için

$$(1.3.20) \quad D_{1,i_1}(a, b_n) - \sqrt{a} = \tau_{i_1}(a, b_n)\left(b_n - \sqrt{a}\right)^{2k+t}$$

ya da

$$(1.3.21) \quad D_{1,i_1}^2(a, b_n) - a = \rho_{i_1}(a, b_n)(b_n^2 - a)^{2k+t}$$

eşitlikleri geçerli olur ve bu nedenle $D_{1,1}(a, b_n)$ ve $D_{1,2}(a, b_n)$ iterasyonları $\sqrt{a}$'ya kuadratik olarak yakınsarlar:

$$(1.3.22) \quad D_{1,i_1}(a, b_n) \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{a}.$$

Eğer burada

$$D_{1,i_1}(a, b_n) \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{a}{D_{1,i_1}(a, b_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{a}$$

limit işlemlerini göz önüne alırsak

$$(1.3.23) \quad \frac{a}{D_{1,i_1}(a, b_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{a}$$

limiti de kuadratik olarak yakınsar!

Bu durumda

$$(1.3.24) \quad \frac{a}{D_{1,i_1}(a, b_n)} - \sqrt{a} = \mu_{i_1}(a, b_n)\left(b_n - \sqrt{a}\right)^{2k+t}$$

eşitlikleri geçerli olur.

2. $p = 3$ ise: (1.3.8)'deki $\left(\sqrt[3]{a} - b\right)^{3k}, \left(\sqrt[3]{a} - b\right)^{3k+1}$ ve $\left(\sqrt[3]{a} - b\right)^{3k+2}$'in negatif ya da pozitif olmalarından dolayı $\sqrt[3]{a^2}$'lerin $\sqrt[3]{a}$'ya bağlı çözüm sayısı $p = 3$'tür. Eğer $\sqrt[3]{a^2}$'ye ait bu eşitsizliklerden $\sqrt[3]{a}$'yı çözer (ki bu çözümlerin sayısı 2'şer 2'şer karşılaştırılmalarından dolayı $m_1 = \binom{3}{2} = 3$ olup, bu çözümlerden elde edilen $D_{1,1}(a, b_n), D_{1,2}(a, b_n), D_{1,3}(a, b_n)$ iterasyonları doğrudan yüksek mertebeden olurlar) ve bunları ilkinde değerlendirirsek tüm iterasyonların sayısı $3.3 = 9$ tane olur. Bunlardan ilk 3'ü $\sqrt[3]{a}$ için elde edilen $D_{1,1}(a, b_n), D_{1,2}(a, b_n), D_{1,3}(a, b_n)$ ve diğer $3^2 - 3 = 6$'sı $\sqrt[3]{a^2}$ için elde edilen $D_{2,1}(a, b_n), D_{2,2}(a, b_n), \ldots, D_{2,6}(a, b_n)$ iterasyonlarıdır.

Bunlardan $D_{1,1}(a, b_n), D_{1,2}(a, b_n), D_{1,3}(a, b_n)$ iterasyonların yakınsaklıklarına ilişkin $i_1 = 1,2,3$ için

$$(1.3.24) \quad D_{1,i_1}(a, b_n) - \sqrt[3]{a} = \tau_{i_1}(a, b_n)\left(b_n - \sqrt[3]{a}\right)^{3k+t}$$

ya da

$$(1.3.25) \quad D_{1,i_1}^3(a, b_n) - a = \rho_{i_1}(a, b_n)(b_n^3 - a)^{3k+t}$$

eşitlikleri geçerli olur ve bu nedenle $\sqrt[3]{a}$'ya kübik olarak yakınsarlar:

$$(1.3.26) \quad D_{1,i_1}(a, b_n) \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[3]{a}.$$

Fakat $D_{2,1}(a, b_n), D_{2,2}(a, b_n), \ldots, D_{2,6}(a, b_n)$ iterasyonlarının yakınsaklıklarına ilişkin $i_2 = 1,2,3,4,5,6$ için

$$(1.3.27) \quad D_{2,i_2}^3(a, b_n) - a^2 = \rho_{i_2}(a, b_n)(b_n^3 - a)^{3k+t}$$

eşitlikleri geçerli olduğundan $\sqrt[3]{a^2}$'ye kübik olarak yakınsamazlar. Çünkü (1.3.25)'teki gibi devir daim olmadığından bu durum gerçekleşmez ve ancak $k \to \infty$'da $\sqrt[3]{a^2}$ limitine erişir. Burada k değeri artırıldıkça $D_{2,i_2}(a, b_n)$'nin $\sqrt[3]{a^2}$'ye lineer olarak artan bir hızla yakınsayacağına dikkat etmek gerekir.

İtiraf etmeliyim ki 2008'deki tezimde pek fazla incelemediğim için bu son iterasyonlar öylece kalakaldılar. Şimdi beni uyandıran şey, kazanma arzusundan çok bu çalışmayı ***Atatürk*** için yapmış olmam, dolayısıyla (1.3.27)'deki yakınsaklığı düzeltmem gerektiğine ilişkin inanç, onur ya da siz buna her ne ad verirseniz verin bu ayıbı ortadan kaldırmaktan başka bir şey değildi.

Şimdi madem durum böyle, yani

$$(1.3.28) \quad D_{2,i_2}(a,b_n) \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt[3]{a^2}$$

limiti mevcut, o zaman limit alma işlemlerine göre

$$D_{2,i_2}(a,b_n) \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt[3]{a^2} = \frac{a}{\sqrt[3]{a}} \Rightarrow \frac{a}{D_{2,i_2}(a,b_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[3]{a}$$

sonucuyla (1.3.27)'deki yakınsaklığı şu şekilde düzeltebiliriz:

$$(1.3.29) \quad \frac{a}{D_{2,i_2}(a,b_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[3]{a}.$$

İşte bu sonuca göre (1.3.27)'de devir daim olmayan kübik yakınsama şu şekilde gerçekleşmiş olur:

$$(1.3.30) \quad \left(\frac{a}{D_{2,i_2}(a,b_n)}\right)^3 - a = \mu_{i_2}(a,b_n)(b_n^3 - a)^{3k+t}.$$

"Olağanüstü iddialar olağanüstü kanıtlar gerektirir", Carl Sagan.

Peki bu doğru mu? Çünkü ***Carl Sagan***'a göre (1.3.29)'u iddia etmek olağanüstü kanıt gerektiriyordu.

Eğer (1.3.30)'da (1.3.27)'yi kullanırsak,

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{D_{2,i_2}(a,b_n)}\right)^3 - a &= \frac{a^3}{D_{2,i_2}^3(a,b_n)} - a = \frac{a^3}{a^2 + \rho_{i_2}(a,b_n)(b_n^3 - a)^{3k+t}} - a \\ &= -\frac{a\rho_{i_2}(a,b_n)}{a^2 + \rho_{i_2}(a,b_n)(b_n^3 - a)^{3k+t}} \cdot (b_n^3 - a)^{3k+t}\end{aligned}$$

olduğundan (1.3.29)'daki yakınsamanın doğru olduğunu görürüz!

Herhalde metodu tam bir şekilde ele almakla bu hatayı düzeltmem (ki şuna eksik bilgiyi tamamlamak dersek daha doğru olur) 2018'deki hatamı telafi eder. 27.06.2019, 04:14:19 tarihli, 187 sayfalık ve 13.3 MB büyüklüğündeki *"Romberg İntegrasyonu 2016-2019.pdf"* onaylı dosyamda olayı şöyle anlatmışım. Parantezler içindeki ifadeler şimdiki ve gerekli açıklamalarımdır:

*"… Özetle, aşağıdaki tüm h^2 ekstrapolasyonlarının **'E'** ile gösterdiğim (Richardson Ekstrapolasyonu) hariç hepsi yeni keşiflerdir. İşte bu yüzden başlıkta 2003'te ilk versiyonunu yayımladığım **E-ATA 1 Algoritmaları**'nın (ki bir örneği (2.34) ya da (2.39)'dadır) 2017'de devam çalışmasını yaparak (ki prototipi (2.74) ya da (2.75)'tedir) burada 2. versiyonunu (**E-ATA Algoritmaları Ver. 2**) yayımlıyorum. Fakat başlangıçta 2002'deki Snellius ekstrapolasyonunda olduğu gibi yine bir başarı söz konusu değildi. Bu nedenle, bu ekstrapolasyonlara ilişkin teorik çalışmalarda bulunurken **'Richardson Ekstrapolasyonu'na Yeni Bir Bakış'** ve **'Richardson Ekstrapolasyonu ve Genelleştirmesi Hakkında'** başlıklarını kullanıyordum, dolayısıyla **'A'** ile gösterdiğim bu yeni ekstrapolasyonları **'R'** ile gösteriyordum. Fakat iş ciddiye binince **'R'**yi adımın baş harfi olan **'D'** ile değiştirdim (ki bu, o sırada sadece koruma amaçlı bir tedbirdi ve üzerinde hiç düşünmemiştim). Ama sonra aklıma 2003'teki **'E-ATA 1 Algoritmaları'** gelince **'D'**yi **'A'** ile değiştirmenin daha doğru olduğunu anladım ve bu değişikliği 06.02.2018, 13:13'te yaptım!*

Çok iyi hatırlıyorum, o gün okuldan eve dönerken yolda aklıma bu vahim hata geldi ve o sırada kendimi başımdan aşağıya kaynar sular dökülmüş gibi hissettim. Eve varır varmaz ilk işim bu hatayı düzeltmek oldu!

Peki bu vahim hatayı neden yapmıştım?

O günkü siyasi konjektür kafamı karıştırmıştı (bkz. "CHP'de kafalar sahiden karışık") ama bendeki kafa karışıklığı daha çok o güne kadar isimlendirme üzerinde durmamamdan kaynaklanıyordu. Dolayısıyla bu ekstrapolasyonlar sadece adıma kayıtlı halde duruyordu.

*Tabii ki iterasyonlardaki bu isim değişikliğinden sonra başlığı da değiştirmek gerekiyordu ve onu da yine geç davranarak (ki o sırada bu başlığa değil, çalışmalara odaklanmıştım) 06.08.2018, 00:22'de şimdikine çevirdim. Yani bu çalışmalar ne de olsa 2003'teki E-ATA 1 Algoritmaları'nın devamı niteliğindeydi (**E-ATA Algoritmaları Ver. 2**) ve bu yüzden buradaki iterasyonlardaki **'A'**, **ATATÜRK**'ün kısaltılmış adı olan **'ATA'**'nın baş harfini gösterir. Ancak ne ilginçtir ki Resim 3.4'te (Resim 4.6) **Atatürk**'ün ceketinin üzerinde kaderin garip bir cilvesi olarak 2 tane **'A'** harfi mevcuttur. Hayır, bunları Photoshop'ta ya da başka bir şeyde oluşturmadım. Bu fotoğrafı ilk gördüğümde şaşırmış ve olamaz böyle bir şey diyordum. İnanılır gibi değil, bu fotoğrafa hangi kaynaktan bakarsam bakayım hep aynı anomaliler görülüyordu (ki bu anomalileri görmek, İngiliz siperlerinden karşı siperde ayakta dikili **Atatürk**'ün sarışın olduğunu görmek kadar kolaydı aslında) ama nasıl olmuşsa şimdiye kadar kimse fark edememişti. İşte bu yüzden, bu yeni ekstrapolasyonları **'A'** ile yazmam en doğrusu olarak gözükür!"*

Burada adı geçen ekstrapolasyonları sonraki yıllarda yazdığım makalelerde çalışmanın doğası gereği zaten çeşitli harflerle göstermek zorunda kalıyorsunuz, ama ben o hatayı hiç unutmadım (Bkz. "*Genelleştirilmiş Piobert-Parmentier Metodu*", "*Piobert-Parmentier Metodu'nun Q Üzerinde Genelleştirilmesi*" vb.). Şimdi şu dikkatimi çekiyor: Ben sadece ***Atatürk***'e aziz hatırasına bir zarar gelmesinden korktum (ki yukarıdaki Resim 1.3.3 hepimizin ***Atatürk***'e sahip çıkmamız gerektiğini gösterir. ***Atatürk***, 16 Temmuz 1915'te İstanbul'dan gelen bir heyete Çanakkale Savaşları'nın orada nasıl yaşandığı elleriyle göstererek anlatıyor. Daha ne yapsın?) ve 5 yıl önce bu yüzden dağılmışım!

3. $p = 4$ ise: (1.3.8)'deki $\left(\sqrt[4]{a} - b\right)^{4k+s}$'nin negatif ya da pozitif olmalarından hareketle $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[4]{a^2}$ ve $\sqrt[4]{a}$'nın $s, r = 0,1,2,3$ için $C_{s,r}(a, b_n)$'lerin rasyonel polinomal çözümlerine ilişkin 2 farklı yol vardır.

3.1. Öncelikle (1.3.8)'deki eşitliklerin sol taraflarındaki $\left(\sqrt[4]{a} - b\right)^{4k+s}$'ler pozitif ya da negatif olduğundan $\sqrt[4]{a^3}$'ün $\sqrt[4]{a^2}$ ve $\sqrt[4]{a}$'ya bağlı çözüm sayısının $p = 4$ olduğunu biliyoruz. Eğer bu eşitsizliklerden $\sqrt[4]{a^2}$'leri $\sqrt[4]{a}$'ya göre çözer (ki bu çözümlerin sayısı 2'şer 2'şer karşılaştırılmalarından dolayı $\binom{4}{2} = 6$'dır) ve sonra bu eşitsizliklerden de $\sqrt[4]{a}$'ları $C_{s,r}(a, b_n)$'ler cinsinden çözersek (ki bu çözümlerin sayısı da 2'şer 2'şer karşılaştırıldıklarından $\binom{6}{2} = 15$'tir. Fakat bunlardan her grupta 3 tane olmak üzere 4 grup kendi aralarında eşit olduklarından geriye $15 - 4.2 = 7$ kaldığından toplam $4 + 3 = 7$ tane iterasyon kalır) $D_{1,1}(a, b_n), D_{1,2}(a, b_n), \dots, D_{1,7}(a, b_n)$ iterasyonları doğrudan kuartik olarak elde edilirler. Eğer bu iterasyonları ikincisinde yerlerine koyar ve $\sqrt[4]{a^2}$'leri $C_{s,r}(a, b_n)$'ler cinsinden çözersek $7.6 = 42$ tane iterasyon söz konusu olurken bunlardan 11'i aynı olup atıldıklarından geriye $42 - 11 = 31$ tane birbirinden farklı $D_{2,1}(a, b_n), D_{2,2}(a, b_n), \dots, D_{2,31}(a, b_n)$ iterasyonları kalır. Son olarak $\sqrt[4]{a^2}$ ve $\sqrt[4]{a}$ için elde edilen bu iterasyonları ilkinde değerlendirir ve $\sqrt[4]{a^3}$'leri $C_{s,r}(a, b_n)$'ler cinsinden çözersek $4.7.31 = 868$ tane iterasyon söz konusu olur ki bunlardan aynı olanlarını çıkarırsak $868 - (15 + 10 + 5 + 4.2) = 830$ tane $\sqrt[4]{a^3}$ için birbirinden farklı $D_{3,1}(a, b_n), D_{3,2}(a, b_n), \dots, D_{3,830}(a, b_n)$ iterasyonları vardır.

3.2. (1.3.8)'e göre katsayıları $C_{s,r}(a, b_n)$ polinomları ve bilinmeyenleri $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[4]{a^2}$ ve $\sqrt[4]{a}$ olan 4 eşitsizliği 2'şer 2'şer karşılaştırır ve bunlardan $\sqrt[4]{a^3}$'leri $\sqrt[4]{a^2}$ ve $\sqrt[4]{a}$ cinsinden çözersek $\binom{4}{2} = 6$ tane rasyonel ifade elde edilir. Bu rasyonel ifadeleri de kendi aralarında 2'şer 2'şer karşılaştırıp $\sqrt[4]{a^2}$'leri $\sqrt[4]{a}$ cinsinden çözersek $\binom{6}{2} = 15$ tane rasyonel ifade elde edilir. Fakat bu rasyonel ifadeler bir öncekindekiyle aynı, yani her grupta 3 tane olmak üzere 4 grup kendi aralarında eşit olduklarından $15 - 4.2 = 7$ tane rasyonel ifade ve bu rasyonel ifadeleri de 2'şer 2'şer karşılaştırır $\sqrt[4]{a}$'yı çözmeye çalışırsak $\binom{7}{2} = 21$ tane rasyonel iterasyon elde edilir ama hepsi aynı olduğundan $\sqrt[4]{a}$ için sadece $D'_{1,1}(a, b_n)$ iterasyonu mevcut olur. Eğer bunu bir öncekinde yani $\sqrt[4]{a^2}$'lerin $\sqrt[4]{a}$'ya bağlı $7.1 = 7$ tane rasyonel ifadesinde yerlerine koyar ve gerekli hesapları yaparsak yine hepsinin aynı olduğunu görürüz, dolayısıyla $D'_{2,1}(a, b_n)$ iterasyonunu ve bunları da 2 öncekinde yani $\sqrt[4]{a^3}$ için 6 rasyonel ifadede yerlerine koyarsak yine hepsi aynı olduğundan $D'_{3,1}(a, b_n)$ iterasyonunu elde ederiz. Fakat buradaki iterasyonların ilk yoldakilerinden farklı olduklarına dikkat ediniz!

Şu halde her 2 yoldan elde edilen bu iterasyonlara göre $E_{1,1}(a, b_n), E_{1,2}(a, b_n), \dots, E_{1,8}(a, b_n)$ iterasyonlarının yakınsaklıklarına ilişkin $i_1 = 1,2, \dots, 8$ için

$$(1.3.31) \quad E_{1,i_1}(a, b_n) - \sqrt[4]{a} = \tau_{i_1}(a, b_n)\left(b_n - \sqrt[4]{a}\right)^{4k+t}$$

ya da

$$(1.3.32) \quad E_{1,i_1}^4(a, b_n) - a = \rho_{i_1}(a, b_n)(b_n^4 - a)^{4k+t}$$

eşitlikleri geçerli olur ve bu nedenle $\sqrt[4]{a}$'ya kuartik olarak yakınsarlar:

$$(1.3.33) \quad E_{1,i_1}(a, b_n) \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[4]{a}.$$

Burada yine $E_{2,1}(a, b_n), E_{2,2}(a, b_n), \dots, E_{2,32}(a, b_n)$ iterasyonlarının yakınsaklıklarına ilişkin $i_2 = 1,2, \dots, 32$ için

$$(1.3.34) \quad E_{2,i_2}^4(a, b_n) - a^2 = \rho_{i_2}(a, b_n)(b_n^4 - a)^{4k+t}$$

eşitlikleri geçerli olduğundan $\sqrt[4]{a^2}$'ye kuartik yakınsama olmaz!

Fakat

$$(1.3.35) \quad E_{2,i_2}(a, b_n) \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt[4]{a^2}$$

ile (1.3.33)'ü taraf tarafa çarparsak,

$$E_{1,i_1}(a, b_n)E_{2,i_2}(a, b_n) \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[4]{a}.\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[4]{a^3} = \frac{a}{\sqrt[4]{a}} \Rightarrow \frac{a}{E_{1,i_1}(a, b_n)E_{2,i_2}(a, b_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[4]{a}$$

işlemlerine göre

$$(1.3.36) \quad \frac{a}{E_{1,i_1}(a, b_n)E_{2,i_2}(a, b_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[4]{a}$$

sonucunu verebilir, dolayısıyla

$$(1.3.37) \quad \left(\frac{a}{E_{1,i_1}(a, b_n)E_{2,i_2}(a, b_n)}\right)^4 - a = \mu_{i_2}(a, b_n)(b_n^4 - a)^{4k+t}$$

eşitliğinin gerçekleştiğini söyleyebiliriz.

Peki bunlar doğru mu?

Eğer (1.3.37)'de (1.3.32) ve (1.3.34)'ü kullanırsak

$$\left(\frac{a}{E_{1,i_1}E_{2,i_2}}\right)^4 - a = \frac{a^4}{\left(a + \rho_{i_1}(b_n^4 - a)^{4k+t_1}\right)\left(a^2 + \rho_{i_2}(b_n^4 - a)^{4k+t_2}\right)} - a = a(b_n^4 - a)^{4k}.\frac{a^2\rho_{i_1}(b_n^4 - a)^{t_1} + \rho_{i_1}\rho_{i_2}(b_n^4 - a)^{4k+t_1+t_2} + a\rho_{i_2}(b_n^4 - a)^{t_2}}{\left(a + \rho_{i_1}(b_n^4 - a)^{4k+t_1}\right)\left(a^2 + \rho_{i_2}(b_n^4 - a)^{4k+t_2}\right)}$$

olduğundan (1.3.36) doğrudur!

Üçüncü olarak $E_{3,1}(a,b_n), E_{3,2}(a,b_n), \dots, E_{3,831}(a,b_n)$ iterasyonların yakınsaklıklarına ilişkin $i_3 = 1,2,\dots,831$ için

$$(1.3.38) \quad E^4_{3,i_3}(a,b_n) - a^3 = \rho_{i_3}(a,b_n)(b_n^4 - a)^{4k+t}$$

eşitlikleri geçerli olduğundan

$$E_{3,i_3}(a,b_n) \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt[4]{a^3} = \frac{a}{\sqrt[4]{a}} \Rightarrow \frac{a}{E_{3,i_3}(a,b_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[4]{a}$$

işlemlerine göre

$$(1.3.39) \quad \frac{a}{E_{3,i_3}(a,b_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[4]{a}$$

yakınsaması, dolayısıyla

$$(1.3.40) \quad \left(\frac{a}{E_{3,i_3}(a,b_n)}\right)^4 - a = \mu_{i_3}(a,b_n)(b_n^4 - a)^{4k+t}$$

eşitliği geçerli olur.

Burada da (1.3.40)'ta (1.3.38)'i kullanırsak,

$$\left(\frac{a}{E_{3,i_3}(a,b_n)}\right)^4 - a = \frac{a^4}{E^4_{3,i_3}(a,b_n)} - a = \frac{a^4}{a^3 + \rho_{i_3}(a,b_n)(b_n^4 - a)^{4k+t}} - a = -\frac{a\rho_{i_3}(a,b_n)}{a^3 + \rho_{i_3}(a,b_n)(b_n^4 - a)^{4k+t}} . (b_n^4 - a)^{4k+t}$$

olduğundan (1.3.39)'un doğru olduğunu görürüz!

4. $p = 5$ ise: 1. Yol'a göre (1.3.8)'deki $\left(\sqrt[5]{a} - b\right)^{5k+s}$'lerin negatif ya da pozitif olmalarından dolayı $\sqrt[5]{a^4}$'lerin $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[5]{a^2}$, $\sqrt[4]{a}$'ya bağlı çözüm sayısı $p = 5$'tir. Eğer $\sqrt[5]{a^4}$'e ait bu eşitsizliklerden $\sqrt[5]{a^3}$'ü $\sqrt[5]{a^2}$, $\sqrt[5]{a}$'ya göre çözer (ki bu çözümlerin sayısı 2'şer 2'şer karşılaştırılmalarından dolayı $\binom{5}{2} = 10$'dur ve hepsi birbirlerinden farklıdır), sonra bu eşitsizliklerden $\sqrt[5]{a^2}$'yi $\sqrt[5]{a}$'ya göre çözer (ki bu çözümlerin sayısı yine 2'şer 2'şer karşılaştırılmalarından dolayı $\binom{10}{2} = 45$'tir ama bunlardan her grupta 3 tane olmak üzere 10 grup kendi aralarında eşit olduklarından geriye $45 - 10.2 = 25$ tane rasyonel ifade kalır) ve bu son eşitsizliklerden de $\sqrt[5]{a}$'yı çözersek (ki bunların sayısı da $\binom{25}{2} = 300$'dür ama 136'sı aynı olduğundan geriye $300 - 136 = 164$ tane iterasyon kalır) $D_{1,i_1}(a,b_n)$ iterasyonları doğrudan yüksek mertebeden olarak elde edilirler.

Şimdi bunları üçüncüsünde değerlendirirsek $\sqrt[5]{a^2}$ için $D_{2,i_2}(a,b_n)$, $\sqrt[5]{a}$ ve $\sqrt[5]{a^2}$ için bulduğumuz $D_{1,i_1}(a,b_n)$ ve $D_{2,i_2}(a,b_n)$ iterasyonlarını ikincisinde yerlerine koyarsak $\sqrt[5]{a^3}$ için $D_{3,i_3}(a,b_n)$ ve hepsini ilkinde değerlendirirsek $\sqrt[5]{a^4}$ için $D_{4,i_4}(a,b_n)$ iterasyonlarını elde etmiş oluruz. Fakat $D_{1,i_1}(a,b_n), D_{2,i_2}(a,b_n), D_{3,i_3}(a,b_n)$ ve $D_{4,i_4}(a,b_n)$ iterasyonlarının sayısını bulabilmek oldukça güçtür. Çünkü eğer kabaca bir hesap yaparsak; $D_{1,i_1}(a,b_n)$ için 164 (ki yukarıdakilerle birlikte bu sonucu da ***Mathematica*** ile elde ettim), $D_{2,i_2}(a,b_n)$ için $164.25 = 4100$, $D_{3,i_3}(a,b_n)$ için $164.25.10 = 41000$ ve $D_{4,i_4}(a,b_n)$ için $164.25.10.5 = 205000$ tane iterasyon söz konusudur. Fakat Mathematica ile yapılacak bir doğrulamada (ki $p = 4$'teki toplam 917 iterasyonu ***Mathematica*** ile doğrulamamın 1 haftamı aldığına dikkat ediniz) bunların bazıları kendi aralarında aynı olacaklarından iterasyonlar ilki hariç bu sayıların altında çıkacaktır!

Şu halde bunlara 2. Yol'dan elde edilen iterasyonları da katarsak (ki $p = 4$'te her 2 yoldan elde edilen iterasyonlar birbirlerinden farklı çıkmıştı) $E_{1,i_1}(a,b_n)$ iterasyonların yakınsaklıklarına ilişkin

$$(1.3.41) \quad E_{1,i_1}(a,b_n) - \sqrt[5]{a} = \tau_{i_1}(a,b_n)\left(b_n - \sqrt[5]{a}\right)^{5k+t}$$

ya da

$$(1.3.42) \quad E^5_{1,i_1}(a,b_n) - a = \rho_{i_1}(a,b_n)(b_n^5 - a)^{5k+t}$$

eşitlikleri geçerli olur ve bu nedenle $\sqrt[5]{a}$'ya kuintik olarak yakınsarlar:

$$(1.3.43) \quad E_{1,i_1}(a,b_n) \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[5]{a}.$$

İkinci olarak, $E_{2,i_2}(a,b_n)$ iterasyonlarının yakınsaklıklarına ilişkin

$$(1.3.44) \quad E^5_{2,i_2}(a,b_n) - a^2 = \rho_{i_2}(a,b_n)(b_n^5 - a)^{5k+t}$$

eşitlikleri geçerli olduğundan $\sqrt[5]{a^2}$'ye kuintik yakınsama olmaz!

Bu yakınsaklığı

$$E_{2,i_2} \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt[5]{a^2} \Rightarrow E^2_{2,i_2} \xrightarrow{k\to\infty} \left(\sqrt[5]{a^2}\right)^2 = \sqrt[5]{a^4} = \frac{a}{\sqrt[5]{a}} \Rightarrow \frac{a}{E^2_{2,i_2}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[5]{a} \quad (1.3.45)$$

ya da

$$E_{1,i_1}E_{2,i_2} \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt[5]{a}.\sqrt[5]{a^2} = \sqrt[5]{a^3} \Rightarrow \left(E_{1,i_1}E_{2,i_2}\right)^2 \xrightarrow{k\to\infty} \left(\sqrt[5]{a^3}\right)^2 = a\sqrt[5]{a} \Rightarrow \frac{E^2_{1,i_1}E^2_{2,i_2}}{a} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[5]{a} \quad (1.3.46)$$

veyahut da

$$E_{1,i_1}^2 E_{2,i_2} \xrightarrow{k\to\infty} \left(\sqrt[5]{a}\right)^2 . \sqrt[5]{a^2} = \sqrt[5]{a^4} = \frac{a}{\sqrt[5]{a}} \Rightarrow \frac{a}{E_{1,i_1}^2 E_{2,i_2}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[5]{a} \quad (1.3.47)$$

şeklinde düzeltebiliriz.

Üçüncü olarak, $E_{3,i_3}(a,b_n)$ iterasyonlarının yakınsaklıklarına ilişkin

$$(1.3.48) \quad E_{3,i_3}^5(a,b_n) - a^3 = \rho_{i_3}(a,b_n)(b_n^5 - a)^{5k+t}$$

eşitlikleri geçerli olduğundan yine $\sqrt[5]{a^3}$'e kuintik olarak yakınsama olmaz!

Bu yakınsaklığı da

$$E_{3,i_3} \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt[5]{a^3} \Rightarrow E_{3,i_3}^2 \xrightarrow{k\to\infty} \left(\sqrt[5]{a^3}\right)^2 = a\sqrt[5]{a} \Rightarrow \frac{E_{3,i_3}^2}{a} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[5]{a} \quad (1.3.49)$$

ya da

$$E_{1,i_1} E_{3,i_3} \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt[5]{a} . \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5]{a^4} = \frac{a}{\sqrt[5]{a}} \Rightarrow \frac{a}{E_{1,i_1} E_{3,i_3}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[5]{a} \quad (1.3.50)$$

veyahut da

$$E_{1,i_1} E_{2,i_2} E_{3,i_3} \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt[5]{a} . \sqrt[5]{a^2} . \sqrt[5]{a^3} = a\sqrt[5]{a} \Rightarrow \frac{E_{1,i_1} E_{2,i_2} E_{3,i_3}}{a} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[5]{a} \quad (1.3.51)$$

şeklinde düzeltebiliriz.

Dördüncü olarak, $E_{4,i_4}(a,b_n)$ iterasyonlarının yakınsaklıklarına ilişkin

$$(1.3.52) \quad E_{4,i_4}^5(a,b_n) - a^4 = \rho_{i_4}(a,b_n)(b_n^5 - a)^{5k+t}$$

eşitlikleri geçerli olduğundan yine $\sqrt[5]{a^4}$'e kuintik olarak yakınsama olmaz ama bu yakınsaklık

$$E_{4,i_4} \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt[5]{a^4} = \frac{a}{\sqrt[5]{a}} \Rightarrow \frac{a}{E_{4,i_4}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[5]{a} \quad (1.3.53)$$

şeklinde düzeltebilir.

Şimdi bu metoda göre $\sqrt{a}$ ve $\sqrt[3]{a}$ için rasyonel polinomal iterasyonların nasıl elde edildikleri aşağıda göstereyim.

1.3.2.1. $\sqrt{a}$ İçin Süperlineer Algoritmalar. Metoda göre bu algoritmaları önce lineer olarak, sonra bu lineer algoritmalardan süperlineer yani yüksek mertebeden olanların nasıl elde edildiklerini görelim.

1.3.2.1.1. $\sqrt{a}$ İçin Lineer Algoritmalar. $p = 2 = q$ için (1.3.7)'den

$$(1.3.54) \quad \begin{aligned} C_{0,0}(a,b) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{2k}{2j} a^{k-j} b^{2j}, \qquad & C_{0,1}(a,b) &= -\sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k}{2j+1} a^{k-j-1} b^{2j+1}, \\ C_{1,0}(a,b) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j} a^{k-j} b^{2j}, & C_{1,1}(a,b) &= -\sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j+1} a^{k-j} b^{2j+1} \end{aligned}$$

olmak üzere (1.3.9)'a göre şu sistem geçerli olur:

$$(1.3.55) \quad \begin{bmatrix} \left(\sqrt{a} - b\right)^{2k} \\ \left(\sqrt{a} - b\right)^{2k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{0,1}(a,b) & C_{0,0}(a,b) \\ C_{1,0}(a,b) & C_{1,1}(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bu sistemdeki $C_{1,0}(a,b)$ ve $C_{1,1}(a,b)$ polinomları için (1.3.8)'den

$$C_{1,0}(a,b)\sqrt{a} + C_{1,1}(a,b) = \left(\sqrt{a} - b\right)\left(C_{0,1}(a,b)\sqrt{a} + C_{0,0}(a,b)\right) = \left(C_{0,0}(a,b) - bC_{0,1}(a,b)\right)\sqrt{a} + \left(aC_{0,1}(a,b) - bC_{0,0}(a,b)\right) \Rightarrow \begin{cases} C_{0,0}(a,b) - bC_{0,1}(a,b) = C_{1,0}(a,b), \\ aC_{0,1}(a,b) - bC_{0,0}(a,b) = C_{1,1}(a,b) \end{cases}$$

eşitliklerine göre şu özdeşlikler mevcuttur:

$$(1.3.56) \quad \begin{aligned} C_{0,0}(a,b) - bC_{0,1}(a,b) &= C_{1,0}(a,b), \\ aC_{0,1}(a,b) - bC_{0,0}(a,b) &= C_{1,1}(a,b). \end{aligned}$$

Buna göre (1.3.55)'teki sistemin katsayılar determinantı

$$|\Delta_2| = \begin{vmatrix} C_{0,1}(a,b) & C_{0,0}(a,b) \\ C_{1,0}(a,b) & C_{1,1}(a,b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{0,1}(a,b) & C_{0,0}(a,b) \\ C_{0,0}(a,b) - bC_{0,1}(a,b) & aC_{0,1}(a,b) - bC_{0,0}(a,b) \end{vmatrix} = aC_{0,1}^2(a,b) - C_{0,0}^2(a,b) = \left(C_{0,1}(a,b)\sqrt{a} - C_{0,0}(a,b)\right)\left(C_{0,1}(a,b)\sqrt{a} + C_{0,0}(a,b)\right)$$
$$= -\left(\sqrt{a}-b\right)^{2k}.\left(\sqrt{a}-b\right)^{2k} = -(a-b^2)^{2k}$$

eşitliklerine göre şu şekilde elde edilir:

$$(1.3.57) \quad |\Delta_2| = -(a-b^2)^{2k} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Diğer taraftan (1.3.55)'teki $\left(\sqrt{a}-b\right)^{2k}$ ve $\left(\sqrt{a}-b\right)^{2k+1}$ ifadelerinin soldan ya da sağdan 0'a yakınsamaları nedeniyle $\sqrt{a}$'nın a ve b'nin tam katsayılı polinomları olan $C_{s,r}(a,b)$ $(s,r=0,1)$'ler cinsinden çözülebilmesi, dolayısıyla rasyonel yaklaşıklıkların bulunması için şu 2 hal söz konusu olur:

1.1. $b \le \sqrt{a}$ ise: $0 \le \left(\sqrt{a}-b\right)^{2k}, \left(\sqrt{a}-b\right)^{2k+1}$ olduğundan (1.3.55)'e göre şu lineer algoritmalar elde edilir:

$$(1.3.58) \quad \begin{aligned} &0 \le \left(\sqrt{a}-b\right)^{2k} = C_{0,1}(a,b)\sqrt{a} + C_{0,0}(a,b) \Rightarrow -\frac{C_{0,0}(a,b)}{C_{0,1}(a,b)} \le \sqrt{a} \Rightarrow -\frac{C_{0,0}(a,b)}{C_{0,1}(a,b)} \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt{a}, \\ &0 \le \left(\sqrt{a}-b\right)^{2k+1} = C_{1,0}(a,b)\sqrt{a} + C_{1,1}(a,b) \Rightarrow -\frac{C_{1,1}(a,b)}{C_{1,0}(a,b)} \le \sqrt{a} \Rightarrow -\frac{C_{1,1}(a,b)}{C_{1,0}(a,b)} \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Şu halde buradan $a = b^2 + c$ için

$$(1.3.59) \quad \left(b;\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(2k)} = \frac{\sum_{j=0}^{k}\binom{2k+1}{2j+1} b^{2j+1}(b^2+c)^{k-j}}{\sum_{j=0}^{k}\binom{2k+1}{2j} b^{2j}(b^2+c)^{k-j}} = -\frac{C_{1,1}(b^2+c,b)}{C_{1,0}(b^2+c,b)} \le -\frac{C_{0,0}(b^2+c,b)}{C_{0,1}(b^2+c,b)} = \frac{\sum_{j=0}^{k}\binom{2k}{2j} b^{2j}(b^2+c)^{k-j}}{\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{2j+1} b^{2j+1}(b^2+c)^{k-j-1}} = \left(b;\overline{\frac{2b}{c},2b}\right)_{(2k-1)} \le \sqrt{b^2+c}$$

eşitsizliklerindeki alt sınırlara göre yine (1.2.62)'deki (ya da (1.2.6)) Babil sürekli kesirleri elde edilir. Bu iterasyonları bu şekilde bulduktan sonra duyurusunu web sitemde 5.8.2002, 04:00'da "*Arşimet'in Sırrı*"nda yapmıştım!

1.2. $\sqrt{a} \le b$ ise: $0 \le \left(\sqrt{a}-b\right)^{2k}$ ve $\left(\sqrt{a}-b\right)^{2k+1} \le 0$ olduğundan (1.3.55)'e göre

$$(1.3.60) \quad \begin{aligned} &0 \le \left(\sqrt{a}-b\right)^{2k} = C_{0,1}(a,b)\sqrt{a} + C_{0,0}(a,b) \Rightarrow -\frac{C_{0,0}(a,b)}{C_{0,1}(a,b)} \le \sqrt{a} \Rightarrow -\frac{C_{0,0}(a,b)}{C_{0,1}(a,b)} \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt{a}, \\ &\left(\sqrt{a}-b\right)^{2k+1} = C_{1,0}(a,b)\sqrt{a} + C_{1,1}(a,b) \le 0 \Rightarrow \sqrt{a} \le -\frac{C_{1,1}(a,b)}{C_{1,0}(a,b)} \Rightarrow \sqrt{a} \xleftarrow{m\to\infty} -\frac{C_{1,1}(a,b)}{C_{1,0}(a,b)} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerli olur ve $\exists b \in \mathbb{R}^+, c \in \mathbb{R}$ vardır ki $0 < a = b^2 - c$ için

$$(1.3.61) \quad \left(b;\overline{-\frac{2b}{c},2b}\right)_{(2k)} = \frac{\sum_{j=0}^{k}\binom{2k}{2j} b^{2j}(b^2-c)^{k-j}}{\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{2j+1} b^{2j+1}(b^2-c)^{k-j-1}} = -\frac{C_{0,0}(b^2-c,b)}{C_{0,1}(b^2-c,b)} \le \sqrt{b^2-c} \le -\frac{C_{1,1}(b^2-c,b)}{C_{1,0}(b^2-c,b)} = \frac{\sum_{j=0}^{k}\binom{2k+1}{2j+1} b^{2j+1}(b^2-c)^{k-j}}{\sum_{j=0}^{k}\binom{2k+1}{2j} b^{2j}(b^2-c)^{k-j}} = \left(b;\overline{-\frac{2b}{c},2b}\right)_{(2k-1)}$$

eşitsizlikleri elde edilir ki bu durumda aşağıdaki sonuca göz atmamız gerekir.

Sonuç 1.3.1 ($\sqrt{b^2+c} < b+1$ Eşitsizliğinden ve $b-1 \le \sqrt{b^2-c} < b$ Çifte Eşitsizliğinden Elde Edilen Sürekli Kesirler). Eğer $[\![\sqrt{a}]\!] = b$ olmak üzere $a = b^2 + c$ için üst sınır alınsaydı,

$$(1.3.62) \quad (b <)\sqrt{b^2+c} < b+1$$

eşitsizliği söz konusu olurdu ve bu eşitsizlikten hareketle **Babil sürekli kesirleri**ndeki gibi yani eşlenik alma işlemi yapılırsa,

$$(1.3.63) \quad \underbrace{b\cfrac{1}{\cfrac{2b}{c}\cfrac{1}{2b\cfrac{1}{\ddots\, 2b\cfrac{1}{\cfrac{2b+1}{c}}}}}}_{2k+1\ tane} < \sqrt{b^2+c} < \underbrace{b\cfrac{1}{\cfrac{2b}{c}\cfrac{1}{2b\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{2b}{c}\cfrac{1}{2b+1}}}}}_{2k\ tane}$$

sürekli kesirler elde edilir ki eğer **Babil sürekli kesirleri** ile birlikte bu sürekli kesirlerin yer aldığı ortak bir tabloyu göz önüne alırsak,

k	p_k	q_k
0	b	$b+1$
1	$b;\frac{2b+1}{c}$	$b;\frac{2b}{c}$
2	$b;\frac{2b}{c},2b$	$b;\frac{2b}{c},2b+1$
3	$b;\frac{2b}{c},2b,\frac{2b+1}{c}$	$b;\frac{2b}{c},2b,\frac{2b}{c}$
4	$b;\frac{2b}{c},2b,\frac{2b}{c},2b$	$b;\frac{2b}{c},2b,\frac{2b}{c},2b+1$
5	$b;\frac{2b}{c},2b,\frac{2b}{c},2b,\frac{2b+1}{c}$	$b;\frac{2b}{c},2b,\frac{2b}{c},2b,\frac{2b}{c}$
⋮	⋮	⋮

Tablo 1.3.1. $\sqrt{b^2+c}$ için $b \le \sqrt{b^2+c} < b+1$ tanım aralığından elde edilen sürekli kesirler.

tablosundaki p_{2k} alt sınır kesirleri ve q_{2k+1} üst sınır kesirlerinin (1.2.62)'deki (ya da (1.2.6)) Babil sürekli kesirleri ve p_{2k+1} alt sınır kesirleri ve q_{2k} üst sınır kesirlerinin (1.3.26)'daki sürekli kesirler olduğu görülür. Burada c negatif olduğunda, (1.3.62)'deki üst sınır seçimi nedeniyle, p_{2k+1} ve q_{2k} kesirleri kötü bir şekilde çalışırken p_{2k} ve q_{2k+1} Babil sürekli kesirlerinin bu durumda bile iyi çalıştığı görülür!

Şimdi bu son sonuçtaki gibi c negatif olduğunda $\sqrt{b^2+c}$'nin sınırlarının değişimiyle ilgili tarihi bir örneği ele alalım.

M. Kline, "*Eskiden Zamanlardan Modern Zamanlara Doğru Matematiksel Düşünce (Mathematical Thought From Ancient To Modern Times), Cilt 1*" kitabının 134. sayfasında

$$(1.3.64)\quad b \pm \frac{c}{2b \pm 1} < \sqrt{b^2 \pm c} < b \pm \frac{c}{2b}$$

çifte eşitsizliğini vermiş ve bu kesirlerle ***Arşimet***'in kesirlerine ulaşılabileceğini söylemişti (Bkz. (1.2.3). Aslında bunun hastası ***Thomas L. Heat***'tir. O, kendisini bu sınırlara göre ***Arşimet***'in kesirlerini bulmaya adamıştı. Bkz. S. 80-99). Bu kesir algoritmalarının pozitif işaretli olanlarının Tablo 1.3.1'den görüldüğü gibi $p_1 = b\frac{c}{2b+1}$ ve $q_1 = b\frac{c}{2b}$ olacak şekilde karşımıza çıkması, ***Kline***'nın tahmininin ***Arşimet***'in yaklaşım metodunun bir parçasını yakaladığını gösterir (ki $c < 0$ için p_1 bazen çalışmaz, bazen de kötü şekilde çalışırken Babillilerin ilk yaklaşım formülü olan q_1, performasını hiç düşürmeden çalışır!).

Diğer yandan $\sqrt{b^2-c}$ sayısının minumum aralığı maksimum $c = [b^2-(b-1)^2]-1 = 2(b-1)$ değeriyle ortaya çıkan

$$(1.3.65)\quad b-1 \le \sqrt{b^2-c} < b \quad (0 < c < 2b-1)$$

çifte eşitsizliğiyle belirlidir. Buradan

$$b-1 \le \sqrt{b^2-c} < b \Rightarrow 2b-1 \le b+\sqrt{b^2-c} = \frac{b+\sqrt{b^2-c}}{\underbrace{1}_{(b-\sqrt{b^2-c})}} = \frac{c}{b-\sqrt{b^2-c}} < 2b \Rightarrow b-\frac{c}{2b-1} \le \sqrt{b^2-c} < b-\frac{c}{2b}$$

işlemleri sonunda (1.3.64)'teki alt ve üst sınır kesir algoritmalarının negatif işaretli olanları şu şekilde elde edilmiş olurlar:

$$(1.3.66)\quad b-\frac{c}{2b-1} \le \sqrt{b^2-c} < b-\frac{c}{2b}.$$

Şu halde bu işleme aynı şekilde devam edilirse,

$$(1.3.67)\quad r_k \le \sqrt{b^2-c} < s_k$$

çifte eşitsizliğindeki r_k ve ve s_k sınırlarına ait sürekli kesirler şu şekilde ortaya çıkarlar:

k	r_k	s_k
0	$b-1$	b
1	$b;-\frac{2b-1}{c}$	$b;-\frac{2b}{c}$
2	$b;-\frac{2b}{c},2b-1$	$b;-\frac{2b}{c},2b$
3	$b;-\frac{2b}{c},2b,-\frac{2b-1}{c}$	$b;-\frac{2b}{c},2b,-\frac{2b}{c}$
4	$b;-\frac{2b}{c},2b,-\frac{2b}{c},2b-1$	$b;-\frac{2b}{c},2b,-\frac{2b}{c},2b$
5	$b;-\frac{2b}{c},2b,-\frac{2b}{c},2b,-\frac{2b-1}{c}$	$b;-\frac{2b}{c},2b,-\frac{2b}{c},2b,-\frac{2b}{c}$
⋮	⋮	⋮

Tablo 1.3.2. $\sqrt{b^2-c}$ için $b-1 \le \sqrt{b^2-c} < b$ tanım aralığından elde edilen sürekli kesirler.

Kolaylıkla görüldüğü gibi, bu son tabloda da s_k üst sınırları $c < 0$ için Babil sürekli kesirleridir.

Uyarı 1.3.1 ($\sqrt{a}$ İçin Diğer Lineer Algoritmalar Hakkında). $\sqrt{a}$ için diğer lineer algoritmalar BBP formüllerindeki gibi $2|q$ olacak şekilde herhangi bir q sayısı seçildikten sonra aynı işlemler tekrarlanarak elde edilir. Fakat elde edilen bu algoritmalar $p = 2 = q$'daki toplamların açılımlarına karşılık geldiklerinden, $\sqrt[p]{a}, \sqrt[p]{a^2}, \cdots, \sqrt[p]{a^{p-1}}$ için lineer algoritmalarını yalnızca p için bulmak yeterlidir!

Örneğin, $p = 2$ için $q = 4$ alınırsa $r, s = 0,1,2,3$ için (1.3.7)'den

$$(1.3.68)\quad C_{s,r}(a,b) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{k} \binom{4k+s}{4j+r} a^{2(k-j)} b^{4j+r}, & r \le s \text{ ise} \\ \sum_{j=0}^{k-1} \binom{4k+s}{4j+r} a^{2(k-j-1)} b^{4j+r}, & s < r \text{ ise} \end{cases}$$

polinomlarına göre (1.3.8)'den

$$(1.3.69)\quad \begin{aligned} (\sqrt{a}-b)^{4k} &= -C_{0,1}(a,b)a\sqrt{a} + C_{0,2}(a,b)a - C_{0,3}(a,b)\sqrt{a} + C_{0,0}(a,b), \\ (\sqrt{a}-b)^{4k+1} &= C_{1,2}(a,b)a\sqrt{a} - C_{1,3}(a,b)a + C_{1,0}(a,b)\sqrt{a} - C_{1,1}(a,b), \\ (\sqrt{a}-b)^{4k+2} &= -C_{2,3}(a,b)a\sqrt{a} + C_{2,0}(a,b)a - C_{2,1}(a,b)\sqrt{a} + C_{2,2}(a,b), \\ (\sqrt{a}-b)^{4k+3} &= C_{3,0}(a,b)a\sqrt{a} - C_{3,1}(a,b)a + C_{3,2}(a,b)\sqrt{a} - C_{3,3}(a,b) \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir ve bu sistemden $\sqrt{a}$ için rasyonel yaklaşıklıkların bulunması için yine aynı haller söz konusu olur:

1.1. $b \le \sqrt{a}$ ise: Bu durumda $0 \le (\sqrt{a}-b)^{4k}, (\sqrt{a}-b)^{4k+1}, (\sqrt{a}-b)^{4k+2}, (\sqrt{a}-b)^{4k+3}$ nedeniyle (1.3.69)'dan

$$(1.3.70) \quad \frac{C_{3,1}(a,b)a + C_{3,3}(a,b)}{C_{3,0}(a,b)a + C_{3,2}(a,b)}, \frac{C_{1,3}(a,b)a + C_{1,1}(a,b)}{C_{1,2}(a,b)a + C_{1,0}(a,b)} \le \sqrt{a}, \ \sqrt{a} \le \frac{C_{0,2}(a,b)a + C_{0,0}(a,b)}{C_{0,1}(a,b)a + C_{0,3}(a,b)}, \frac{C_{2,0}(a,b)a + C_{2,2}(a,b)}{C_{2,3}(a,b)a + C_{2,1}(a,b)}$$

eşitsizlikleri geçerli olur. Arzu edilirse burada da $a = b^2 + c$ alınabilinir.

1.2. $\sqrt{a} \le b$ ise: Bu durumda da $0 \le (\sqrt{a}-b)^{4k}, (\sqrt{a}-b)^{4k+2}$ ve $(\sqrt{a}-b)^{4k+1}, (\sqrt{a}-b)^{4k+3} \le 0$ nedeniyle (1.3.69)'dan

$$(1.3.71) \quad \sqrt{a} \le \frac{C_{0,2}(a,b)a + C_{0,0}(a,b)}{C_{0,1}(a,b)a + C_{0,3}(a,b)}, \frac{C_{1,3}(a,b)a + C_{1,1}(a,b)}{C_{1,2}(a,b)a + C_{1,0}(a,b)}, \frac{C_{2,0}(a,b)a + C_{2,2}(a,b)}{C_{2,3}(a,b)a + C_{2,1}(a,b)}, \frac{C_{3,1}(a,b)a + C_{3,3}(a,b)}{C_{3,0}(a,b)a + C_{3,2}(a,b)}$$

eşitsizlikleri bulunur ki burada yine $\exists b \in Z^+, c \in \mathbb{N}$ vardır ki $a = b^2 - c$ alınabilir.

İşte bu sonuçla (1.3.58) (ya da (1.3.60)) ve (1.3.70) (ya da (1.3.71))'deki algoritmalar için (ki paylar ve paydalar kendi aralarında birbirlerine eşittirler)

$$(1.3.72) \quad \begin{aligned} \frac{-C_{1,1}(2m;a,b)}{C_{1,0}(2m;a,b)} &= \frac{C_{1,3}(m;a,b)a + C_{1,1}(m;a,b)}{C_{1,2}(m;a,b)a + C_{1,0}(m;a,b)}, \\ \frac{-C_{1,1}(2m+1;a,b)}{C_{1,0}(2m+1;a,b)} &= \frac{C_{3,1}(m;a,b)a + C_{3,3}(m;a,b)}{C_{3,0}(m;a,b)a + C_{3,2}(m;a,b)}, \\ \frac{C_{0,0}(2m;a,b)}{-C_{0,1}(2m;a,b)} &= \frac{C_{0,2}(m;a,b)a + C_{0,0}(m;a,b)}{C_{0,1}(m;a,b)a + C_{0,3}(m;a,b)}, \\ \frac{C_{0,0}(2m+1;a,b)}{-C_{0,1}(2m+1;a,b)} &= \frac{C_{2,0}(m;a,b)a + C_{2,2}(m;a,b)}{C_{2,3}(m;a,b)a + C_{2,1}(m;a,b)} \end{aligned}$$

eşitlikleri mevcuttur!

Not 1.3.2. Eğer (1.3.70) ya da (1.3.71)'deki algoritmalarda $b \to b_n$ dönüşümü yapılırsa her bir rasyonel iterasyon yüksek mertebeden olurlar. Fakat bu rasyonel iterasyonlardaki toplamlar (1.3.72)'den görüldüğü üzere $q = 2p$ için (1.3.73)'teki rasyonel iterasyonlardaki toplamlardan elde edilebildiklerinden bunları yazmayı gerek görmedim. Fakat bunların uygulamasını "*ATA M Ver. 1.nb*" adlı Mathematica dosyasında vereceğim!

1.3.2.1.2. $\sqrt{a}$ İçin Süperlineer Algoritmalar. $\sqrt{a}$ için süperlineer algoritmalar (1.3.58) (ya da (1.3.60))'deki lineer algoritmalardan tıpkı (1.2.68)'deki (ya da (1.2.12)) gibi $b \to b_n$ alınmasıyla

$$(1.3.73) \quad b_{n+1} = -\frac{C_{0,0}(a,b_n)}{C_{0,1}(a,b_n)} = \frac{\sum_{j=0}^{k}\binom{2k}{2j}a^{k-j}b_n^{2j}}{\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{2j+1}a^{k-j-1}b_n^{2j+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{a} \xleftarrow{n\to\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k}\binom{2k+1}{2j+1}a^{k-j}b_n^{2j+1}}{\sum_{j=0}^{k}\binom{2k+1}{2j}a^{k-j}b_n^{2j}} = -\frac{C_{1,1}(a,b_n)}{C_{1,0}(a,b_n)} = b_{n+1}$$

olarak derhal elde edilirler. Alt ve üst sınır iterasyonların mertebeleri sırasıyla 2k ve 2k + 1 olup birleşimleri (1.2.68) (ya da (1.2.12)) veya (1.2.82)'deki (ya da (1.2.26)) algoritmayı verir.

1.3.2.2. $\sqrt[3]{a}$ İçin Süperlineer Algoritmalar. Yine metoda göre bu algoritmalardan önce lineer olanlarının, sonra da bu lineer algoritmalardan süperlineer algoritmaların nasıl elde edildiklerine bir bakalım.

1.3.2.2.1. $\sqrt[3]{a}$ İçin Lineer Algoritmalar. $p = 3 = q$ için (1.3.7)'ye göre

$$(1.3.74) \quad \begin{aligned} &C_{0,0}(a,b) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{3k}{3j}a^{k-j}b^{3j}, && C_{0,1}(a,b) = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{3k}{3j+1}a^{k-j-1}b^{3j+1}, && C_{0,2}(a,b) = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{3k}{3j+2}a^{k-j-1}b^{3j+2}, \\ &C_{1,0}(a,b) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{3k+1}{3j}a^{k-j}b^{3j}, && C_{1,1}(a,b) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{3k+1}{3j+1}a^{k-j}b^{3j+1}, && C_{1,2}(a,b) = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{3k+1}{3j+2}a^{k-j-1}b^{3j+2}, \\ &C_{2,0}(a,b) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{3k+2}{3j}a^{k-j}b^{3j}, && C_{2,1}(a,b) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{3k+2}{3j+1}a^{k-j}b^{3j+1}, && C_{2,2}(a,b) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{3k+2}{3j+2}a^{k-j}b^{3j+2} \end{aligned}$$

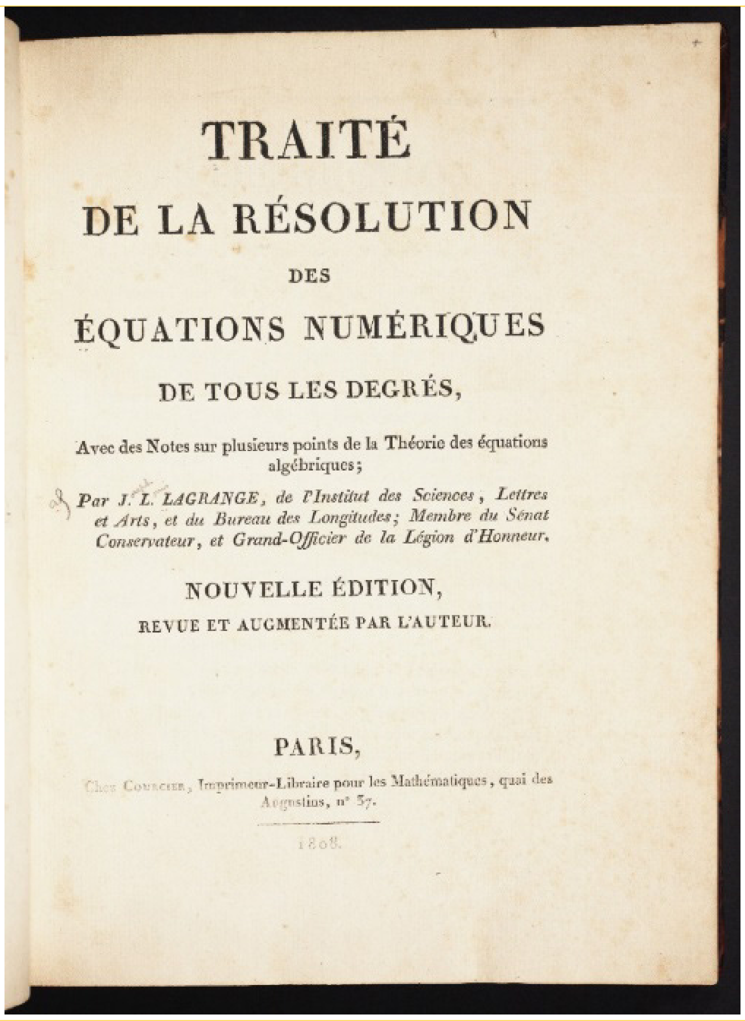
olmak üzere (1.3.8)'den

$$(1.3.75) \quad \begin{aligned} (\sqrt[3]{a}-b)^{3k} &= C_{0,0}(a,b) - C_{0,1}(a,b)\sqrt[3]{a^2} + C_{0,2}(a,b)\sqrt[3]{a}, \\ (\sqrt[3]{a}-b)^{3k+1} &= C_{1,0}(a,b)\sqrt[3]{a} - C_{1,1}(a,b) + C_{1,2}(a,b)\sqrt[3]{a^2}, \\ (\sqrt[3]{a}-b)^{3k+2} &= C_{2,0}(a,b)\sqrt[3]{a^2} - C_{2,1}(a,b)\sqrt[3]{a} + C_{2,2}(a,b) \end{aligned}$$

sistemi elde edilir (Bkz. İlişkili yöntem için "*Lagrange Yöntemi*"). ***Lagrange***'a (1770) göre, kübik denklemin kökleri ve onlarla çarpım halinde bulunan birimin köklerinin lineer kombinezonlarından oluşan ifadeler küp altında aynı kalırlar. Buradaki metot da öyledir. Fakat birimin kökleri yerine $1, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^2}$ gelir ve yukarıdaki sistemde bunların sübstitüsyonları oluşur.

Şimdi ***Metot***'un daha iyi anlaşılabilinmesi için burada ***Lagrange***'ın yöntemine kısaca da olsa bir göz atmakta fayda var.

Lagrange Yöntemi. ***Lagrange***'ın 1770'de verdiği çözüme göre,



TRAITÉ
DE LA RÉSOLUTION
DES
ÉQUATIONS NUMÉRIQUES
DE TOUS LES DEGRÉS,
Avec des Notes sur plusieurs points de la Théorie des équations algébriques;
Par J. L. LAGRANGE, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, et du Bureau des Longitudes; Membre du Sénat Conservateur, et Grand-Officier de la Légion d'Honneur.
NOUVELLE ÉDITION,
REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.
PARIS,
Chez Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.
1808.

Resim 1.3.5. ***Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) "Giuseppe Lodovico Lagrangia"*** olarak Torino'da doğdu. ***Lagrange***, Soyut Cebir'in başlangıcı da dahil olmak üzere matematiğin çeşitli dallarına katkıda bulundu. Yukarıda ilkin 1798'de yayınlanan *"Traité de la Résolution des Equations Numérique de tous les degrés"*'in 1808 baskısından başlık sayfasının bir görüntüsüdür. ***"Noevelle (Yeni)"*** baskısı olarak yayınlanan bu baskıda revizyonlar ve daha fazla not içeriyordu ve bu da onu daha yaygın olarak kullanılan baskı haline getirdi. Başlık, *"kitabın denklemlere sayısal çözümlerle ilgilendiğini gösteren, her derecedeki sayısal denklemlerin çözümü üzerine bir inceleme"* olarak çevrilebilir. Bununla birlikte, ***Lagrange***'ın çığır açan 1770 tarihli *"Réflexions sur la résolution algébrique des équations"* (Berlin Bilimler Akademisi'nin anılarında yayınlanan) makalesinin bir özeti de dahil olmak üzere, polinom denklemlerine kesin çözümler de tartışıldı. Tarihçi ***Israel Kleiner***, bu kitabı *"grup teorisinin evrimindeki 4 ana kaynaktan"* biri olarak adlandırır.

$$(1.3.76)\quad a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

kübik (3. derece) denklemin kökleri (ki $a_3\neq 0$'dır ve birimin kökleri $w^3=1$ denkleminden elde edilen köklerdir)

$$(1.3.77)\quad y_i=\sum_{j=1}^{3}w^{i+j-1}x_j=w^ix_1+w^{i+1}x_2+w^{i+2}x_3$$

ya da

$$(1.3.78)\quad \begin{aligned} y_1&=wx_1+w^2x_2+w^3x_3=wx_1+w^2x_2+x_3,\\ y_2&=w^2x_1+w^3x_2+w^4x_3=w^2x_1+x_2+wx_3,\\ y_3&=w^3x_1+w^4x_2+w^5x_3=x_1+wx_2+w^2x_3\end{aligned}$$

şeklinde alındıktan sonra bu yeni kökler küp altında aynı olurlar (ki burada $w,w^2,1$ birimin köklerinin devresel olarak değiştiğine dikkat ediniz):

$$(1.3.79)\quad \begin{aligned} y_1^3,y_2^3,y_3^3&=x_1^3+x_2^3+x_3^3+3(x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_1x_3^2)w+3(x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_1^2x_3)w^2\\ &+6x_1x_2x_3.\end{aligned}$$

Sabit kalması yani (köklerin elemanter simetrik polinomlarıyla) katsayılara göre yazılması için bunlardan herhangi ikisinin toplamı ya da çarpımının alınması gerekir (Bkz. "*Réflexions sur la résolution algébrique des équations (Denklemlerin Cebirsel Çözümü Hakkında Düşünceler)*").

1.3.2.2.1.1. Şu halde $\left(\sqrt[3]{a}-b\right)^{3k},\left(\sqrt[3]{a}-b\right)^{3k+1}$ ve $\left(\sqrt[3]{a}-b\right)^{3k+2}$ pozitif ya da negatif olduğundan, örneğin pozitif olmaları için $b\leq\sqrt[3]{a}$ alırsak (1.3.75)'ten $\sqrt[3]{a^2}$'lerin $C_{s,r}(a,b)$ ve $\sqrt[3]{a}$'lar cinsinden çözümlerini

$$(1.3.80)\quad \begin{aligned} &\sqrt[3]{a^2}\leq\frac{C_{0,0}(a,b)+C_{0,2}(a,b)\sqrt[3]{a}}{C_{0,1}(a,b)},\\ &\frac{C_{1,1}(a,b)-C_{1,0}(a,b)\sqrt[3]{a}}{C_{1,2}(a,b)}\leq\sqrt[3]{a^2},\\ &\frac{C_{2,1}(a,b)\sqrt[3]{a}-C_{2,2}(a,b)}{C_{2,0}(a,b)}\leq\sqrt[3]{a^2}\end{aligned}$$

şeklinde verebiliriz.

Şimdi $\sqrt[3]{a}$'ların $C_{s,r}(a,b)$'ler cinsinden çözümleri için $\sqrt[3]{a^2}$'lere ait ifadeleri (1.3.75)'te sırasıyla yerlerine koyarsak, örneğin (1.3.80)'deki sıralamadan yani (1.3.80)'deki ilk eşitsizlikteki ifadeyi (1.3.75)'teki 2. eşitsizlikte yerine koyarsak ya da (1.3.80)'deki ilk 2 eşitsizlikten

$$(1.3.81)\quad \frac{C_{1,1}(a,b)-C_{1,0}(a,b)\sqrt[3]{a}}{C_{1,2}(a,b)}\leq\frac{C_{0,0}(a,b)+C_{0,2}(a,b)\sqrt[3]{a}}{C_{0,1}(a,b)}\Rightarrow\frac{C_{1,1}(a,b)C_{0,1}(a,b)-C_{0,0}(a,b)C_{1,2}(a,b)}{C_{1,0}(a,b)C_{0,1}(a,b)+C_{0,2}(a,b)C_{1,2}(a,b)}\leq\geq\sqrt[3]{a}$$

eşitsizliğini elde ediliriz.

Aynı şekilde (1.3.80)'deki 1. ve 3. eşitsizliklerden

$$(1.3.82)\quad \frac{C_{2,1}(a,b)\sqrt[3]{a}-C_{2,2}(a,b)}{C_{2,0}(a,b)}\leq\frac{C_{0,0}(a,b)+C_{0,2}(a,b)\sqrt[3]{a}}{C_{0,1}(a,b)}\Rightarrow\frac{C_{2,2}(a,b)C_{0,1}(a,b)+C_{0,0}(a,b)C_{2,0}(a,b)}{C_{2,1}(a,b)C_{0,1}(a,b)-C_{0,2}(a,b)C_{2,0}(a,b)}\leq\geq\sqrt[3]{a}$$

ile 2. ve 3. eşitsizliklerden

$$(1.3.83)\quad \frac{C_{2,1}(a,b)\sqrt[3]{a}-C_{2,2}(a,b)}{C_{2,0}(a,b)}\leq\frac{C_{1,1}(a,b)-C_{1,0}(a,b)\sqrt[3]{a}}{C_{1,2}(a,b)}\Rightarrow\frac{C_{2,2}(a,b)C_{1,2}(a,b)+C_{1,1}(a,b)C_{2,0}(a,b)}{C_{2,1}(a,b)C_{1,2}(a,b)+C_{1,0}(a,b)C_{2,0}(a,b)}\leq\geq\sqrt[3]{a}$$

eşitsizliklerini buluruz.

1.3.2.2.2. $\sqrt[3]{a}$ İçin Süperlineer Algoritmalar. Metotta söylendiğim gibi bulduğum bu ilk algoritmalarda $b\to b_n$ dönüşümü yapılırsa (1.3.24) (ya da (1.3.25))'e göre (1.3.81), (1.3.82) ve (1.3.83)'teki algoritmalar $\sqrt[3]{a}$ için birer süperlineer algoritma iken $\sqrt[3]{a^2}$ için elde edilen algoritmalarda doğrudan böyle bir özellik yoktur!

Şimdi bu tür algoritmalara örnek olarak $\sqrt[3]{a^2}$'lerin $C_{s,r}(a,b)$'ler cinsinden çözümleri için $\sqrt[3]{a}$'ların $C_{s,r}(a,b)$'ler cinsinden çözüldükleri (1.3.81), (1.3.82) ve (1.3.83)'teki ifadeleri sırasıyla (1.3.33)'te yerlerine koyar ve gerekli hesapları yaparsak şu çözümleri elde ederiz:

İlkin (1.3.80)'deki ilk eşitsizlikteki $\sqrt[3]{a}$ yerine (1.3.81)'deki algoritmayı yerine koyarsak $\sqrt[3]{a^2}$ için şu algoritmayı elde ederiz:

$$(1.3.84)\quad \sqrt[3]{a^2}\leq\frac{C_{0,0}(a,b)+C_{0,2}(a,b)\sqrt[3]{a}}{C_{0,1}(a,b)}\leq\geq\frac{C_{0,0}(a,b)+C_{0,2}(a,b)\dfrac{C_{1,1}(a,b)C_{0,1}(a,b)-C_{0,0}(a,b)C_{1,2}(a,b)}{C_{1,0}(a,b)C_{0,1}(a,b)+C_{0,2}(a,b)C_{1,2}(a,b)}}{C_{0,1}(a,b)}\Rightarrow\frac{C_{0,0}(a,b)C_{1,0}(a,b)+C_{1,1}(a,b)C_{0,2}(a,b)}{C_{0,1}(a,b)C_{1,0}(a,b)+C_{0,2}(a,b)C_{1,2}(a,b)}\leq\geq\sqrt[3]{a^2}.$$

İkinci olarak, yine (1.3.80)'deki ilk eşitsizlikteki $\sqrt[3]{a}$ yerine (1.3.82)'deki algoritmayı yerine koyar ve gerekli hesapları yaparsak,

$$(1.3.85)\quad \sqrt[3]{a^2} \leq \frac{C_{0,0}(a,b)+C_{0,2}(a,b)\sqrt[3]{a}}{C_{0,1}(a,b)} \leq\geq \frac{C_{0,0}(a,b)+C_{0,2}(a,b)\dfrac{C_{2,2}(a,b)C_{0,1}(a,b)+C_{0,0}(a,b)C_{2,0}(a,b)}{C_{2,1}(a,b)C_{0,1}(a,b)-C_{0,2}(a,b)C_{2,0}(a,b)}}{C_{0,1}(a,b)} \Rightarrow \frac{C_{0,0}(a,b)C_{2,1}(a,b)+C_{2,2}(a,b)C_{0,2}(a,b)}{C_{0,1}(a,b)C_{2,1}(a,b)-C_{2,0}(a,b)C_{0,2}(a,b)} \leq\geq \sqrt[3]{a^2}$$

algoritmasını bulmuş oluruz.

Üçüncü olarak, yine (1.3.80)'deki ilk eşitsizlikteki $\sqrt[3]{a}$ yerine bu sefer (1.3.83)'teki algoritmayı yerine koyar ve gerekli hesapları yaparsak şu algoritmaya ulaşırız:

$$(1.3.86)\quad \sqrt[3]{a^2} \leq \frac{C_{0,0}(a,b)+C_{0,2}(a,b)\sqrt[3]{a}}{C_{0,1}(a,b)} \leq\geq \frac{C_{0,0}(a,b)+C_{0,2}(a,b)\dfrac{C_{2,2}(a,b)C_{1,2}(a,b)+C_{1,1}(a,b)C_{2,0}(a,b)}{C_{2,1}(a,b)C_{1,2}(a,b)+C_{1,0}(a,b)C_{2,0}(a,b)}}{C_{0,1}(a,b)} \Rightarrow \frac{\begin{vmatrix} C_{2,0}(a,b) & 0 & C_{1,2}(a,b) \\ C_{2,2}(a,b) & C_{0,0}(a,b) & -C_{1,1}(a,b) \\ -C_{2,1}(a,b) & C_{0,2}(a,b) & C_{1,0}(a,b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{2,0}(a,b) & 0 & C_{1,2}(a,b) \\ 0 & C_{0,1}(a,b) & 0 \\ -C_{2,1}(a,b) & 0 & C_{1,0}(a,b) \end{vmatrix}} \leq\geq \sqrt[3]{a^2}.$$

Şimdi de (1.3.80)'deki 2. eşitsizlikteki $\sqrt[3]{a}$ yerine (1.3.81), (1.3.82) ve (1.3.83)'teki algoritmaları yerlerine koyar ve gerekli hesapları yaparsak $\sqrt[3]{a^2}$ için sırasıyla

$$(1.3.87)\quad \frac{C_{1,1}(a,b)-C_{1,0}(a,b)\dfrac{C_{1,1}(a,b)C_{0,1}(a,b)-C_{0,0}(a,b)C_{1,2}(a,b)}{C_{1,0}(a,b)C_{0,1}(a,b)+C_{0,2}(a,b)C_{1,2}(a,b)}}{C_{1,2}(a,b)} \leq\geq \frac{C_{1,1}(a,b)-C_{1,0}(a,b)\sqrt[3]{a}}{C_{1,2}(a,b)} \leq \sqrt[3]{a^2} \Rightarrow \frac{C_{0,0}(a,b)C_{1,0}(a,b)+C_{1,1}(a,b)C_{0,2}(a,b)}{C_{0,1}(a,b)C_{1,0}(a,b)+C_{0,2}(a,b)C_{1,2}(a,b)} \leq\geq \sqrt[3]{a^2},$$

$$(1.3.88)\quad \frac{C_{1,1}(a,b)-C_{1,0}(a,b)\dfrac{C_{2,2}(a,b)C_{0,1}(a,b)+C_{0,0}(a,b)C_{2,0}(a,b)}{C_{2,1}(a,b)C_{0,1}(a,b)-C_{0,2}(a,b)C_{2,0}(a,b)}}{C_{1,2}(a,b)} \leq\geq \frac{C_{1,1}(a,b)-C_{1,0}(a,b)\sqrt[3]{a}}{C_{1,2}(a,b)} \leq \sqrt[3]{a^2} \Rightarrow \frac{\begin{vmatrix} C_{2,0}(a,b) & -C_{0,1}(a,b) & 0 \\ C_{2,2}(a,b) & C_{0,0}(a,b) & -C_{1,1}(a,b) \\ -C_{2,1}(a,b) & C_{0,2}(a,b) & C_{1,0}(a,b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{2,0}(a,b) & -C_{0,1}(a,b) & 0 \\ C_{2,2}(a,b) & C_{0,0}(a,b) & -C_{1,2}(a,b) \\ -C_{2,1}(a,b) & C_{0,2}(a,b) & 0 \end{vmatrix}} \leq\geq \sqrt[3]{a^2}$$

ve

$$(1.3.89)\quad \frac{C_{1,1}(a,b)-C_{1,0}(a,b)\dfrac{C_{2,2}(a,b)C_{1,2}(a,b)+C_{1,1}(a,b)C_{2,0}(a,b)}{C_{2,1}(a,b)C_{1,2}(a,b)+C_{1,0}(a,b)C_{2,0}(a,b)}}{C_{1,2}(a,b)} \leq\geq \frac{C_{1,1}(a,b)-C_{1,0}(a,b)\sqrt[3]{a}}{C_{1,2}(a,b)} \leq \sqrt[3]{a^2} \Rightarrow \frac{C_{1,1}(a,b)C_{2,1}(a,b)-C_{2,2}(a,b)C_{1,0}(a,b)}{C_{1,2}(a,b)C_{2,1}(a,b)+C_{2,0}(a,b)C_{1,0}(a,b)} \leq\geq \sqrt[3]{a^2}$$

algoritmalarını elde ederiz.

Son olarak (1.3.80)'deki 3. eşitsizlikteki $\sqrt[3]{a}$ yerine sırasıyla (1.3.81), (1.3.82) ve (1.3.83)'teki algoritmaları yerlerine koyup gerekli hesapları yaptığımızda $\sqrt[3]{a^2}$ için

$$(1.3.90)\quad \frac{C_{2,1}(a,b)\dfrac{C_{1,1}(a,b)C_{0,1}(a,b)-C_{0,0}(a,b)C_{1,2}(a,b)}{C_{1,0}(a,b)C_{0,1}(a,b)+C_{0,2}(a,b)C_{1,2}(a,b)}-C_{2,2}(a,b)}{C_{2,0}(a,b)} \leq\geq \frac{C_{2,1}(a,b)\sqrt[3]{a}-C_{2,2}(a,b)}{C_{2,0}(a,b)} \leq \sqrt[3]{a^2} \Rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 0 & C_{2,1}(a,b) & -C_{2,2}(a,b) \\ C_{1,2}(a,b) & C_{1,0}(a,b) & -C_{1,1}(a,b) \\ -C_{0,1}(a,b) & C_{0,2}(a,b) & C_{0,0}(a,b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & C_{2,0}(a,b) \\ C_{1,2}(a,b) & C_{1,0}(a,b) & 0 \\ -C_{0,1}(a,b) & C_{0,2}(a,b) & 0 \end{vmatrix}} \leq\geq \sqrt[3]{a^2},$$

$$(1.3.91)\quad \frac{C_{2,1}(a,b)\dfrac{C_{2,2}(a,b)C_{0,1}(a,b)+C_{0,0}(a,b)C_{2,0}(a,b)}{C_{2,1}(a,b)C_{0,1}(a,b)-C_{0,2}(a,b)C_{2,0}(a,b)}-C_{2,2}(a,b)}{C_{2,0}(a,b)} \leq\geq \frac{C_{2,1}(a,b)\sqrt[3]{a}-C_{2,2}(a,b)}{C_{2,0}(a,b)} \leq \sqrt[3]{a^2} \Rightarrow \frac{C_{0,0}(a,b)C_{2,1}(a,b)+C_{2,2}(a,b)C_{0,2}(a,b)}{C_{0,1}(a,b)C_{2,1}(a,b)-C_{2,0}(a,b)C_{0,2}(a,b)} \leq\geq \sqrt[3]{a^2}$$

ve

$$(1.3.92)\quad \frac{C_{2,1}(a,b)\dfrac{C_{2,2}(a,b)C_{1,2}(a,b)+C_{1,1}(a,b)C_{2,0}(a,b)}{C_{2,1}(a,b)C_{1,2}(a,b)+C_{1,0}(a,b)C_{2,0}(a,b)}-C_{2,2}(a,b)}{C_{2,0}(a,b)} \leq\geq \frac{C_{2,1}(a,b)\sqrt[3]{a}-C_{2,2}(a,b)}{C_{2,0}(a,b)} \leq \sqrt[3]{a^2} \Rightarrow \frac{C_{1,1}(a,b)C_{2,1}(a,b)-C_{2,2}(a,b)C_{1,0}(a,b)}{C_{1,2}(a,b)C_{2,1}(a,b)+C_{2,0}(a,b)C_{1,0}(a,b)} \leq\geq \sqrt[3]{a^2}$$

algoritmalarını buluruz. Bunlardan (1.3.84) ile (1.3.87), (1.3.85) ile (1.3.91) ve (1.3.89) ile (1.3.92)'nin aynı oldukları görülür ve aynı işlemler yapıldığı takdirde $\sqrt[3]{a} \leq b$ için de yine bu çözümler elde edilir. Fakat bu algoritmalar $b \to b_n$ dönüşümüne rağmen (1.3.81)-(1.3.83)'teki gibi $\sqrt[3]{a^2}$'ye yüksek mertebeden yakınsamazlar. Neden?

Alın size başka bir bomba daha: $\sqrt[p]{a}$'ya yakınsayan bir algoritmayı (1.3.9)'daki sistemden bulabilmek için neden Cramer yöntemini kullanamıyoruz?

Çünkü (1.3.9)'daki soldaki matristeki her bir eleman $k \to \infty$ için sıfıra yakınsar. Eğer buna rağmen çözmeye çalışırsanız (1.3.80)'dekinden daha karmaşık bir sistemle uğraşır ve içinden çıkamazsınız. Özetle (1.3.80)'den elde ettiğim (1.3.81), (1.3.82) ve (1.3.83)'teki çözümler tam biçilmiş kaftandır. Yani biz burada denklem çözmekten ziyade, $\sqrt[p]{a}$'ya yakınsayan (1.3.75)'teki sistemden iterasyonlar arıyoruz! Peki sizce bu iterasyonların sayısı kaçtır?

Şu halde (1.3.81), (1.3.82) ve (1.3.83)'ten elde edilen

$$(1.3.93)\quad \begin{aligned} b_{n+1}(a,b_n) &= \frac{C_{1,1}(a,b_n)C_{0,1}(a,b_n)-C_{0,0}(a,b_n)C_{1,2}(a,b_n)}{C_{1,0}(a,b_n)C_{0,1}(a,b_n)+C_{0,2}(a,b_n)C_{1,2}(a,b_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[3]{a}, \\ b_{n+1}(a,b_n) &= \frac{C_{2,2}(a,b_n)C_{0,1}(a,b_n)+C_{0,0}(a,b_n)C_{2,0}(a,b_n)}{C_{2,1}(a,b_n)C_{0,1}(a,b_n)-C_{0,2}(a,b_n)C_{2,0}(a,b_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[3]{a}, \\ b_{n+1}(a,b_n) &= \frac{C_{2,2}(a,b_n)C_{1,2}(a,b_n)+C_{1,1}(a,b_n)C_{2,0}(a,b_n)}{C_{2,1}(a,b_n)C_{1,2}(a,b_n)+C_{1,0}(a,b_n)C_{2,0}(a,b_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[3]{a} \end{aligned}$$

iterasyonlarından ilkinin mertebesi $3.1=3, 3.2+1=7, 3.3=9, 3.4+1=13, \cdots, 3k, 3(k+1)+1, \cdots$, ikincisinin mertebesi $3.1=3, 3.2=6, 3.3=9, \cdots, 3k, \cdots$ ve üçüncüsünün mertebesi $3.1+1=4, 3.2+1=7, 3.3+1=10, \cdots, 3k+1, \cdots$ dir. Çünkü bu iterasyonlara sırasıyla $A_1(a,b_n), A_2(a,b_n)$ ve $A_3(a,b_n)$ dersek rekürsif özelliği nedeniyle (ki ilkinde $k\in\mathbb{Z}_T^+$ iken diğerlerinde $k\in\mathbb{Z}^+$'dir)

$$(1.3.94)\quad \begin{aligned} A_1^3(a,b_n)-a &= \rho_1(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k,3k+4},\\ A_2^3(a,b_n)-a &= \rho_2(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k},\\ A_3^3(a,b_n)-a &= \rho_3(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k+1} \end{aligned}$$

özdeşlikleri mevcuttur. Burada ρ_1, ρ_2 ve ρ_3 ifadeleri $\mathbb{Q}[a,b_n]$'nun elemanıdırlar, yani tam katsayılı 2 polinomun bölümünden oluşan rasyonel polinomlardır.

İşte bu sonuçla $\forall m\in\mathbb{Z}^+$ için

$$(1.3.95)\quad A_\ell(a^m,b_n)\xrightarrow{n\to\infty}\sqrt[3]{a^m}\quad (\ell=1,2,3)$$

yakınsaklıkları mevcut olur!

Diğer taraftan (1.3.84), (1.3.85), (1.3.86), (1.3.88), (1.3.89) ve (1.3.90)'daki algoritmalara sırasıyla $A_4(a,b_n), A_5(a,b_n), A_6(a,b_n), A_7(a,b_n), A_8(a,b_n)$ ve $A_9(a,b_n)$ dersek,

$$(1.3.96)\quad \begin{aligned}
A_4(a,b_n) &= \frac{C_{0,0}(a,b_n)C_{1,0}(a,b_n)+C_{1,1}(a,b_n)C_{0,2}(a,b_n)}{C_{0,1}(a,b_n)C_{1,0}(a,b_n)+C_{1,2}(a,b_n)C_{0,2}(a,b_n)}, \quad
A_7(a,b_n) = \frac{\begin{vmatrix} C_{2,0}(a,b_n) & -C_{0,1}(a,b_n) & 0\\ C_{2,2}(a,b_n) & C_{0,0}(a,b_n) & -C_{1,1}(a,b_n)\\ -C_{2,1}(a,b_n) & C_{0,2}(a,b_n) & C_{1,0}(a,b_n)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{2,0}(a,b_n) & -C_{0,1}(a,b_n) & 0\\ C_{2,2}(a,b_n) & C_{0,0}(a,b_n) & -C_{1,2}(a,b_n)\\ -C_{2,1}(a,b_n) & C_{0,2}(a,b_n) & 0\end{vmatrix}},\\
A_5(a,b_n) &= \frac{C_{0,0}(a,b_n)C_{2,1}(a,b_n)+C_{2,2}(a,b_n)C_{0,2}(a,b_n)}{C_{0,1}(a,b_n)C_{2,1}(a,b_n)-C_{2,0}(a,b_n)C_{0,2}(a,b_n)}, \quad
A_8(a,b_n) = \frac{C_{1,1}(a,b_n)C_{2,1}(a,b_n)-C_{2,2}(a,b_n)C_{1,0}(a,b_n)}{C_{1,2}(a,b_n)C_{2,1}(a,b_n)+C_{2,0}(a,b_n)C_{1,0}(a,b_n)},\\
A_6(a,b_n) &= \frac{\begin{vmatrix} C_{2,0}(a,b_n) & 0 & C_{1,2}(a,b_n)\\ C_{2,2}(a,b_n) & C_{0,0}(a,b_n) & -C_{1,1}(a,b_n)\\ -C_{2,1}(a,b_n) & C_{0,2}(a,b_n) & C_{1,0}(a,b_n)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{2,0}(a,b_n) & 0 & C_{1,2}(a,b_n)\\ 0 & C_{0,1}(a,b_n) & 0\\ -C_{2,1}(a,b_n) & 0 & C_{1,0}(a,b_n)\end{vmatrix}}, \quad
A_9(a,b_n) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & C_{2,1}(a,b_n) & -C_{2,2}(a,b_n)\\ C_{1,2}(a,b_n) & C_{1,0}(a,b_n) & -C_{1,1}(a,b_n)\\ -C_{0,1}(a,b_n) & C_{0,2}(a,b_n) & C_{0,0}(a,b_n)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & C_{2,0}(a,b_n)\\ C_{1,2}(a,b_n) & C_{1,0}(a,b_n) & 0\\ -C_{0,1}(a,b_n) & C_{0,2}(a,b_n) & 0\end{vmatrix}}
\end{aligned}$$

iterasyonları lineer olarak yakınsarlar:

$$(1.3.97)\quad A_\ell(a,b_n)\xrightarrow{k\to\infty}\sqrt[3]{a^2}\quad (\ell=4,5,6,7,8,9).$$

Bu algoritmaların yakınsaklıklarına ilişkin (1.3.27)'ye göre şu eşitlikler mevcuttur: $\forall k\in\mathbb{Z}^+, k\in\mathbb{Z}_T^+, k\in\mathbb{Z}^+, k\in\mathbb{Z}_T^+, k\in\mathbb{Z}_T^+, k\in\mathbb{Z}_T^+$ için

$$(1.3.98)\quad \begin{aligned}
A_4^3(a,b_n)-a^2 &= \rho_4(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k}, & A_7^3(a,b_n)-a^2 &= \rho_7(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k,3k+2},\\
A_5^3(a,b_n)-a^2 &= \rho_5(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k+1,3k+3}, & A_8^3(a,b_n)-a^2 &= \rho_8(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k+2,3k+4},\\
A_6^3(a,b_n)-a^2 &= \rho_6(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k}, & A_9^3(a,b_n)-a^2 &= \rho_9(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k+1,3k+4}.
\end{aligned}$$

Resim 1.3.6. *Atatürk*'ün Kara Harp Okulu'na girişinin 124. yılı. Törene, Bakan ***Akar*** ve TSK'nin komuta kademesi katıldı. Törende, geleneksel yoklama da yaptırıldı. ***Atatürk***'ün öğrencilik dönemindeki numarası 1283'e (asal sayı) gelindiğinde, tüm Harbiyeliler, geleneklere uygun olarak ayağa kalkarak ***"İçimizde!"*** dedi. Sonrasında Harbiyeliler, *"**Atatürk**'ün ilke ve inkılapları ışığında mensubu olmaktan gurur duyduğumuz yüce Türk milleti için canımızı feda etmeye daima hazırız. **Atatürk**'ün ifadesiyle Türk milleti çalışkandır, Türk milleti zekidir, Türk ulusu güçlüdür. Türkiye Cumhuriyeti sonsuza kadar yaşayacaktır. Ne mutlu Türküm diyene!"* ifadelerini kullandı. Törende, Harbiyeliler Kara Harp Okulu Marşı'nı okudu.

Bu durum 2008'de böyleydi. Ama şimdi, (1.3.28)'de gördüğünüz bu tür algoritmaları basit bir limit işlemiyle (1.3.29)'da $\sqrt[3]{a}$'ya nasıl yakınsattığımı açık bir şekilde görebilirsiniz. Çünkü bunun doğru olduğunu ***Carl Sagan***'ın sözüne bir yanıt olarak (1.3.30)'da ispatlı olarak gösterdim. Yani bu noktadan anlaşılacağı üzere bu makale, 2008'dekinin genişletilmişi olup yeni (Noevelle) baskısıdır. Tabii ki 2008'de ağırlığı ***ATA M Algoritmaları***'nın 2. ve 3. versiyonlara verdiğim için bu ilk versiyona gereken ağırlıkta önem veremedim. Ama şimdi bu çalışmayı tekrar ele alarak tam olarak mahiyetini ortaya çıkardığıma göre sorun yok!

Çünkü (1.3.29)'dan

$$(1.3.99)\quad \frac{a}{A_\ell(a,b_n)}\xrightarrow{n\to\infty}\sqrt[3]{a}$$

yakınsaklığı için (1.3.30)'a göre şu eşitlikler geçerlidir:

$$(1.3.100)\quad \begin{aligned} &\left(\frac{a}{A_4(a,b_n)}\right)^3-a=-\frac{a\rho_4(a,b_n)}{a^2+\rho_4(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k}}.(b_n^3-a)^{3k}=\mu_4(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k}, && \left(\frac{a}{A_7(a,b_n)}\right)^3-a=-\frac{a\rho_7(a,b_n)}{a^2+\rho_7(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k,3k+2}}.(b_n^3-a)^{3k,3k+2}=\mu_7(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k,3k+2},\\ &\left(\frac{a}{A_5(a,b_n)}\right)^3-a=-\frac{a\rho_5(a,b_n)}{a^2+\rho_5(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k+1,3k+3}}.(b_n^3-a)^{3k+1,3k+3}=\mu_5(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k+1,3k+3}, && \left(\frac{a}{A_8(a,b_n)}\right)^3-a=-\frac{a\rho_8(a,b_n)}{a^2+\rho_8(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k+2,3k+4}}.(b_n^3-a)^{3k+2,3k+4}=\mu_8(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k+2,3k+4},\\ &\left(\frac{a}{A_6(a,b_n)}\right)^3-a=-\frac{a\rho_6(a,b_n)}{a^2+\rho_6(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k}}.(b_n^3-a)^{3k}=\mu_6(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k}, && \left(\frac{a}{A_9(a,b_n)}\right)^3-a=-\frac{a\rho_9(a,b_n)}{a^2+\rho_9(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k+1,3k+4}}.(b_n^3-a)^{3k+1,3k+4}=\mu_9(a,b_n)(b_n^3-a)^{3k+1,3k+4}. \end{aligned}$$

Sonuç 1.3.2. Yukarıda veremediğim diğer sonuçlar aşağıdadır:

1. **Sistemin Katsayılar Determinantı.** (1.3.75) sisteminin katsayılar determinantı, sistemden elde edilen

$$(1.3.101)\quad \begin{aligned} &C_{1,0}(a,b_n)=C_{0,0}(a,b_n)-b_nC_{0,2}(a,b_n), && C_{2,0}(a,b_n)=C_{0,0}(a,b_n)-b_n^2C_{0,1}(a,b_n)-2b_nC_{0,2}(a,b_n),\\ &C_{1,1}(a,b_n)=b_nC_{0,0}(a,b_n)+aC_{0,1}(a,b_n), && C_{2,1}(a,b_n)=2b_nC_{0,0}(a,b_n)+aC_{0,1}(a,b_n)-b_n^2C_{0,2}(a,b_n),\\ &C_{1,2}(a,b_n)=b_nC_{0,1}(a,b_n)+C_{0,2}(a,b_n), && C_{2,2}(a,b_n)=b_n^2C_{0,0}(a,b_n)+2ab_nC_{0,1}(a,b_n)+aC_{0,2}(a,b_n) \end{aligned}$$

özdeşlikleri ve $w^3=1$ için şöyledir:

$$(1.3.102)\quad |\Delta_3|=\begin{vmatrix}-C_{0,1}(a,b_n) & C_{0,2}(a,b_n) & C_{0,0}(a,b_n)\\ C_{1,2}(a,b_n) & C_{1,0}(a,b_n) & -C_{1,1}(a,b_n)\\ C_{2,0}(a,b_n) & -C_{2,1}(a,b_n) & C_{2,2}(a,b_n)\end{vmatrix}=-\prod_{s=0}^{2}\left(C_{0,0}(a,b_n)w^{3s}-C_{0,1}(a,b_n)\sqrt[3]{a^2}w^{2s}+C_{0,2}(a,b_n)\sqrt[3]{a}w^{s}\right)=-\left(C_{0,0}^3(a,b_n)-a^2C_{0,1}^3(a,b_n)+aC_{0,2}^3(a,b_n)+3aC_{0,0}(a,b_n)C_{0,1}(a,b_n)C_{0,2}(a,b_n)\right)=-(a-b_n^3)^{3k}\xrightarrow{k,n\to\infty}0.$$

2. **İterasyonların Birbirlerinden Elde Edilmesi.** (1.3.96)'daki $A_4(a,b_n),A_5(a,b_n),A_6(a,b_n),A_7(a,b_n),A_8(a,b_n)$ ve $A_9(a,b_n)$ iterasyonlarını birbirlerinden şu şekilde elde edebiliriz:

$$\left[\underbrace{A_5}_{C_{1,0}},\underbrace{A_8}_{C_{0,2}}\right]=\frac{C_{1,0}\left(C_{0,0}C_{2,1}+C_{2,2}C_{0,2}\right)+C_{0,2}\left(C_{1,1}C_{2,1}-C_{2,2}C_{1,0}\right)}{C_{1,0}\left(C_{0,0}C_{2,1}+C_{2,2}C_{0,2}\right)+C_{0,2}\left(C_{1,1}C_{2,1}-C_{2,2}C_{1,0}\right)}=A_4,$$

$$\left[\underbrace{A_7}_{\begin{vmatrix}0 & C_{2,1} & C_{2,0}\\ C_{1,2} & C_{1,0} & -C_{1,2}\\ -C_{0,1} & C_{0,2} & 0\end{vmatrix}},\underbrace{A_9}_{\begin{vmatrix}0 & C_{2,1} & -C_{2,0}\\ C_{1,2} & C_{1,0} & C_{1,2}\\ C_{0,1} & C_{0,2} & 0\end{vmatrix}}\right]=\frac{\begin{vmatrix}0 & C_{2,1} & C_{2,0}\\ C_{1,2} & C_{1,0} & -C_{1,2}\\ -C_{0,1} & C_{0,2} & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}C_{2,0} & -C_{0,1} & 0\\ C_{2,2} & C_{0,0} & -C_{1,1}\\ -C_{2,1} & C_{0,2} & C_{1,0}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & C_{2,1} & -C_{2,0}\\ C_{1,2} & C_{1,0} & C_{1,2}\\ C_{0,1} & C_{0,2} & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & C_{2,1} & -C_{2,2}\\ C_{1,2} & C_{1,0} & -C_{1,1}\\ -C_{0,1} & C_{0,2} & C_{0,0}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0 & C_{2,1} & C_{2,0}\\ C_{1,2} & C_{1,0} & -C_{1,2}\\ -C_{0,1} & C_{0,2} & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}C_{2,0} & -C_{0,1} & 0\\ C_{2,2} & C_{0,0} & -C_{1,2}\\ -C_{2,1} & C_{0,2} & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & C_{2,1} & -C_{2,0}\\ C_{1,2} & C_{1,0} & C_{1,2}\\ C_{0,1} & C_{0,2} & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 0 & C_{2,0}\\ C_{1,2} & C_{1,0} & 0\\ -C_{0,1} & C_{0,2} & 0\end{vmatrix}}=A_6,$$

$$(1.3.103)\quad \left[\underbrace{A_4}_{C_{2,1}},\underbrace{A_8}_{-C_{0,2}}\right]=\frac{C_{2,1}\left(C_{0,0}C_{1,0}+C_{1,1}C_{0,2}\right)-C_{1,0}\left(C_{1,1}C_{2,1}-C_{2,2}C_{1,0}\right)}{C_{2,1}\left(C_{0,1}C_{1,0}+C_{1,2}C_{0,2}\right)-C_{1,0}\left(C_{1,1}C_{2,1}-C_{2,2}C_{1,0}\right)}=A_5,$$

$$\left[\underbrace{A_6}_{\begin{vmatrix}C_{2,0} & -C_{0,1} & 0\\ 0 & C_{0,1} & -C_{1,2}\\ -C_{2,1} & C_{0,2} & C_{1,0}\end{vmatrix}},\underbrace{A_9}_{-\begin{vmatrix}C_{2,0} & -C_{0,1} & 0\\ 0 & C_{0,1} & C_{1,2}\\ -C_{2,1} & C_{0,2} & C_{1,0}\end{vmatrix}}\right]=\frac{\begin{vmatrix}C_{2,0} & -C_{0,1} & 0\\ 0 & C_{0,1} & -C_{1,2}\\ -C_{2,1} & C_{0,2} & C_{1,0}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}C_{2,0} & 0 & C_{1,2}\\ C_{2,2} & C_{0,0} & -C_{1,1}\\ -C_{2,1} & C_{0,2} & C_{1,0}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}C_{2,0} & -C_{0,1} & 0\\ 0 & C_{0,1} & C_{1,2}\\ -C_{2,1} & C_{0,2} & C_{1,0}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & C_{2,1} & -C_{2,2}\\ C_{1,2} & C_{1,0} & -C_{1,1}\\ -C_{0,1} & C_{0,2} & C_{0,0}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}C_{2,0} & -C_{0,1} & 0\\ 0 & C_{0,1} & -C_{1,2}\\ -C_{2,1} & C_{0,2} & C_{1,0}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}C_{2,0} & 0 & C_{1,2}\\ 0 & C_{0,1} & 0\\ -C_{2,1} & 0 & C_{1,0}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}C_{2,0} & -C_{0,1} & 0\\ 0 & C_{0,1} & C_{1,2}\\ -C_{2,1} & C_{0,2} & C_{1,0}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 0 & C_{2,0}\\ C_{1,2} & C_{1,0} & 0\\ -C_{0,1} & C_{0,2} & 0\end{vmatrix}}=A_7,$$

$$\left[\underbrace{A_4}_{C_{2,1}},\underbrace{A_5}_{-C_{1,0}}\right]=\frac{C_{2,1}\left(C_{0,0}C_{1,0}+C_{1,1}C_{0,2}\right)-C_{1,0}\left(C_{0,0}C_{2,1}+C_{2,2}C_{0,2}\right)}{C_{2,1}\left(C_{0,1}C_{1,0}+C_{1,2}C_{0,2}\right)-C_{1,0}\left(C_{0,1}C_{2,1}-C_{2,0}C_{0,2}\right)}=A_8,$$

$$\left[\underbrace{A_6}_{\begin{vmatrix}C_{2,0} & -C_{0,1} & 0\\ C_{2,0} & 0 & -C_{1,2}\\ -C_{2,1} & C_{0,2} & C_{1,0}\end{vmatrix}},\underbrace{A_7}_{-\begin{vmatrix}C_{2,0} & -C_{0,1} & 0\\ C_{2,0} & 0 & -C_{1,2}\\ C_{2,1} & C_{0,2} & C_{1,0}\end{vmatrix}}\right]=\frac{\begin{vmatrix}C_{2,0} & -C_{0,1} & 0\\ C_{2,0} & 0 & -C_{1,2}\\ -C_{2,1} & C_{0,2} & C_{1,0}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}C_{2,0} & 0 & C_{1,2}\\ C_{2,2} & C_{0,0} & -C_{1,1}\\ -C_{2,1} & C_{0,2} & C_{1,0}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}C_{2,0} & -C_{0,1} & 0\\ C_{2,0} & 0 & -C_{1,2}\\ C_{2,1} & C_{0,2} & C_{1,0}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}C_{2,0} & -C_{0,1} & 0\\ C_{2,2} & C_{0,0} & -C_{1,1}\\ -C_{2,1} & C_{0,2} & C_{1,0}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}C_{2,0} & -C_{0,1} & 0\\ C_{2,0} & 0 & -C_{1,2}\\ -C_{2,1} & C_{0,2} & C_{1,0}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}C_{2,0} & 0 & C_{1,2}\\ 0 & C_{0,1} & 0\\ -C_{2,1} & 0 & C_{1,0}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}C_{2,0} & -C_{0,1} & 0\\ C_{2,0} & 0 & -C_{1,2}\\ C_{2,1} & C_{0,2} & C_{1,0}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}C_{2,0} & -C_{0,1} & 0\\ C_{2,2} & C_{0,0} & -C_{1,2}\\ -C_{2,1} & C_{0,2} & 0\end{vmatrix}}=A_9.$$

Bu türetme (1.3.93)'teki $A_1(a,b_n),A_2(a,b_n)$ ve $A_3(a,b_n)$ iterasyonları arasında da geçerlidir (ki bunların türetilmesi yukarıdaki soldaki sütundaki $A_4(a,b_n),A_5(a,b_n)$ ve $A_8(a,b_n)$ iterasyonlarındaki gibidirler. Bu nedenle bunların keşfini size bırakıyorum); ama bu iterasyonları aynı türetmeden elde edemezsiniz. Neden? Çünkü yakınsaklıklar bozulur!

1.3.2.2.1.2. (1.3.75)'teki $\left(\sqrt[3]{a}-b\right)^{3k},\left(\sqrt[3]{a}-b\right)^{3k+1}$ ve $\left(\sqrt[3]{a}-b\right)^{3k+2}$ pozitif ya da negatif olmalarından hareketle bu 3 eşitsizliği 2'şer 2'şer karşılaştırıp $\sqrt[3]{a^2}$'leri $\sqrt[3]{a}$'lara göre çözersek $\binom{3}{2}=3$ tane rasyonel ifade ve onları da kendi aralarında 2'şer 2'şer karşılaştırıp $\sqrt[3]{a}$'ları $C_{s,r}(a,b)$'lerin rasyonel polinomları olarak çözersek $\binom{3}{2}=3$ tane rasyonel iterasyon söz konusu olur. Fakat bu iterasyonların hepsi aynı olduğundan sadece şu iterasyon kalır:

$$(1.3.104)\quad b_{n+1}(a,b_n)=\frac{C_{1,1}(a,b_n)\Big(C_{0,1}(a,b_n)+C_{2,0}(a,b_n)\Big)-C_{0,0}(a,b_n)\Big(C_{1,2}(a,b_n)-C_{2,0}(a,b_n)\Big)+C_{2,2}(a,b_n)\Big(C_{0,1}(a,b_n)+C_{1,2}(a,b_n)\Big)}{C_{1,0}(a,b_n)\Big(C_{0,1}(a,b_n)+C_{2,0}(a,b_n)\Big)+C_{0,2}(a,b_n)\Big(C_{1,2}(a,b_n)-C_{2,0}(a,b_n)\Big)+C_{2,1}(a,b_n)\Big(C_{0,1}(a,b_n)+C_{1,2}(a,b_n)\Big)}\xrightarrow{n\to\infty}\sqrt[3]{a}.$$

Bu iterasyon aynı türetmeye göre (1.3.93)'teki iterasyonlardan oluşur. Yani (1.3.93)'teki iterasyonlardaki payların toplamını paya ve paydaların toplamını paydaya yazarsanız bu iterasyonu elde edersiniz.

Şimdi bu iterasyonu $\sqrt[3]{a}$ için ilkinde yerlerine koyarsak $\sqrt[3]{a^2}$ için de sadece şu iterasyon elde edilmiş olur:

$$(1.3.105)\quad A_{11}(a,b_n)=\frac{C_{1,1}(a,b_n)\Big(C_{0,2}(a,b_n)+C_{2,1}(a,b_n)\Big)+C_{0,0}(a,b_n)\Big(C_{1,0}(a,b_n)+C_{2,1}(a,b_n)\Big)+C_{2,2}(a,b_n)\Big(C_{0,2}(a,b_n)-C_{1,0}(a,b_n)\Big)}{-C_{0,2}(a,b_n)\Big(C_{2,0}(a,b_n)-C_{1,2}(a,b_n)\Big)+C_{2,1}(a,b_n)\Big(C_{0,1}(a,b_n)+C_{1,2}(a,b_n)\Big)+C_{1,0}(a,b_n)\Big(C_{2,0}(a,b_n)+C_{0,1}(a,b_n)\Big)}\xrightarrow{k\to\infty}\sqrt[3]{a^2}.$$

Bu da yine aynı türetmeye göre (1.3.96)'daki $A_4(a,b_n), A_5(a,b_n)$ ve $A_8(a,b_n)$ iterasyonlarından yukarıdaki gibi elde edilir.

Bu iterasyonu yine (1.3.29) nedeniyle şu şekilde yakınsatabiliriz:

$$(1.3.106)\qquad \frac{a}{A_{11}(a,b_n)}\xrightarrow{n\to\infty}\sqrt[3]{a}.$$

Sonuç 1.3.3 (İterasyonların Türetilmesi Hakkında). Teoride $\sqrt[3]{a}$ ve genelde $\sqrt[p]{a}$ için sonsuz sayıda iterasyon türetilebilir ve bunlardan 11'ini yukarıda verdim. Çünkü burada kullandığım iterasyon türetme yöntemi ***"ATA M Algoritmaları Ver. 2, 3"***'ten gelir! Örneğin, RİK 4'ün 46. sayfasındaki mavi tablolardaki ilk 2 iterasyon olan $A_4(x_i)$ ve $B_4(x_i)$ ***ATA M Ver. 2 (Cebrik Yöntem)***'den ve $D_4(x_i)$ onlardan buradaki türetme yoluyla elde edilen iterasyon, son 2 iterasyon olan $F_4(x_i)$ ve $G_4(x_i)$ ***ATA M Ver. 3 (Türeve Dayalı Yöntem)***'ten ve $E_4(x_i)$ onlardan aynı yolla elde edilen iterasyonlardır. Tüm bu iterasyonları Mathematica 5.1 ile Mathematica 6.0'da yarıştırdığım zaman ilk 2 iterasyonun diğerlerinden kalite (yakınsaklık ve hesaplama hızı) bakımından daha iyi olduğu sonucu çıktı!

Hep merak etmişimdir: ***Atatürk***, 10. Yıl Nutku'nda *"Çünkü Türk milletinin karakteri yüksektir. Türk milleti çalışkandır. Türk milleti zekidir (ki dikkat ederseniz yüklemlerde vurgulama yapıldığı için yankılar oluşuyor)"* derken bizi güdülemek için mi söylemişti, yoksa gerçekten öyle miydik?

Çünkü bu sözlerin sırrına eriştiğim zaman, ***Atatürk***'ü tam olarak anlamış olacağım. Yani bu sır ***Atatürk***'ün kendisinde mi, sözlerinde mi?

D. PAMUKTULUM

DERYA PAMUKTULUM

Dijital olarak imzalayan DERYA PAMUKTULUM
Tarih: 2023.04.05 17:41:09 +03'00'