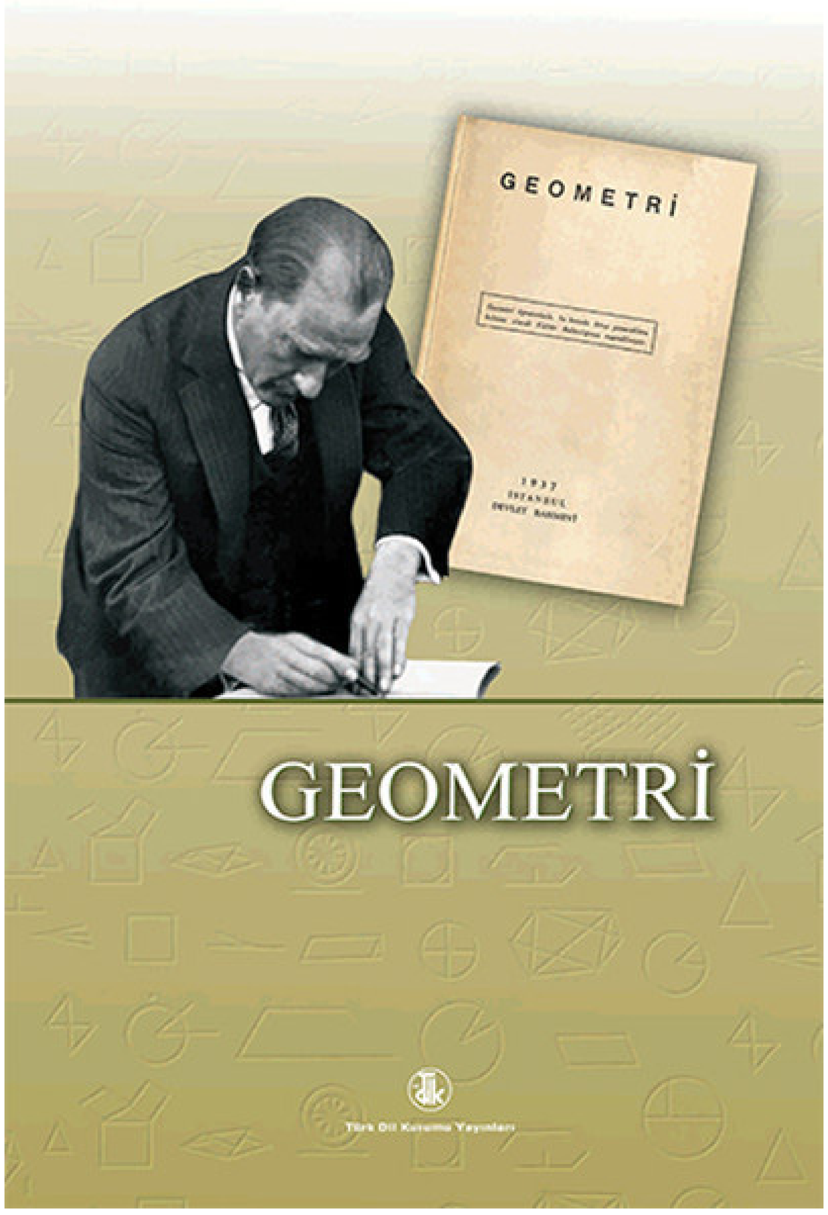
§1. Bir Üçgenin Köşelerindeki Kuvvetlerin Vektörel Tanımı ve Sonuçları



Teorem 1.1 (ATA Formülü, 7. Oluşturma Tarihi: 26.05.2004, 19:54, 8. ve Son Oluşturma Tarihi: 14.06.2004, 21:00). K cismi üzerinde tanımlı ABC üçgeninin alanı,

$$(1.1)\quad A(ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{k_A k_B + k_A k_C + k_B k_C}$$

dir. Burada k_A, k_B, k_C ifadeleri ABC üçgeninin köşelerinin karşı kenarları birer çap olarak kabul eden n-boyutlu kürelere göre kuvvetleridir.

15 Temmuz 2000'de keşfettiğim ve adıma kayıtlı olan bu formülü Büyük Önderimiz ve Kurtarıcımız ***ATATÜRK***'e, ölümünün 65., 1937'de **"Geometri öğrenenlerle, bu konuda kitap yazacaklar"** için bizzat kendi elleriyle hazırladığı Geometri kitapçığının 66., Dil Bayramı'mızın 71., Harf Devrimi'mizin 75., Cumhuriyetimizin 80. Yıldönümü nedeniyle 29.10.2003, 20:00'da armağan ettim ve bu formülden kendi adımı silip O'nun adını, kısaltılmış olarak, ***"ATA Formülü"*** adını verdim. Formülüm kendisine, kendisi de bize kutlu olsun! (Bkz. Yurtdışındaki *About The Area of A General Simple Polygon* ve yurtiçindeki *Basit Bir Poligonın Alanı Hakkında 12.05.2001, 04:26:01*, *Re: HERON veya ARŞİMET FORMÜLÜ ile YENİ FORMÜL ve ARASINDAKİ İLİŞKİLER 13.05.2001, 04:27:21*, *Re: Yeni Formülle Birlikte Gelen Problemler 14.05.2001, 02:51:36* vb. linklerine).

Geometri Kitabı Hakkında

ATATÜRK'ün, 10.01-09.03.1937'de yazdığı *"GEOMETRİ"* adlı kitap MEB tarafından 1937'de İstanbul'da Devlet Basımevi tarafından basıldı. Bu kitapta "GEOMETRİ" adının altına, kitabın amacının belirtildiği şu kayıt düşülmüştür: **"Geometri öğrenenlerle, bu konuda kitap yazacaklara kılavuz olarak Kültür Bakanlığınca neşredilmiştir".**

48 sayfadan oluşan bu kitap *"Başlangıç Tarifler"* ile başlar ve boyut kavramı gereğince 3 kısma ayrılır. Buna göre ***ATATÜRK***, üçgenleri I. kısımdaki *"VI. Üçgenler"*de anlatır. Bu kısımdaki **"Üçgen"** ve kitaptaki diğer bütün terimleri Osmanlıca'dan Türkçe-Yunanca-Fransızca sayesinde Türkçe'ye dönüştürerek kendisi keşfeder!

Üçgen ve Diğer Çokgen Adlarını Keşfetmesi Hakkında

ATATÜRK, daha I. Türk Dil Kurultayı'nın bitiminde şöyle diyordu: *"Batı dillerinin hiçbirinden aşağı olmamak üzere, onlardaki kavramları anlatacak keskinliğe ve açıklığa haiz Türk bilim dili terimleri tespit edilecektir"*. Hemen ardından felsefe, matematik, gök bilimleri, yer bilimleri, fizik, hayat bilimleri, kimya, ruh bilim, sanatlar, spor ve oyunlar, askerlik ve teknik konularındaki Türkçe terimlerin tespitine geçildi. Kendisi bu kollardan askerlik ve matematikteki terimleri Türkçe'nin derinliklerinden çıkarıp bize armağan etti (Bkz. *"ATATÜRK VE TÜRK BİLİM DİLİ"*). Örneğin, okullarımızdan Arapça ve Farsça kaldırılmış olduğundan, öğrenci **"Müselles"**i bir kütle halinde görecek; **"Üç"** aklına gelmeyecektir. Ama **"Müselles"** yerine **"Üçgen"** dersek, bir ipucu yani bir **"Üç"** var. İşte ***ATATÜRK***, Osmanlıcadaki **"Müselles"** kelimesini **"Üçgen (3-gen)"** olarak çevirirken, Göktürkçedeki "Üç" sayısı [1] ve Fransızca'da **"Çokgen"** anlamına gelen "poly-gone" terimindeki son eki birleştirerek keşfeder. Ona göre **"Gen"**, **"Genişlik"**ten alınmış olup bir ipucu vardır. Yine ona göre **"Dörtgen"** terimi **"Dört"**ten gelmiştir.

Bilindiği üzere Batı dillerinde **"Üs (Kuvvet)"** ve **"Çokgen"** adlarında ilk 4'ünün özel isimleri varken sonrakilerde özel isim yoktur. Çünkü Grek-Roma anlayışına göre, eğer İngilizceden hareket edersek, Cebir'de üs 2 olduğunda **"Kare (Square.** Bu kelime kare şeklinden gelir**)"** ve 3 olduğunda **"Küp (Cube.** Bu kelime de küp şeklinden gelir**)"** denirken (ki polinom ve denklem adları bunlardan gelir), Geometri'de **"Üçgen"** için "Triangle (Üç Açılı)" ve **"Dörtgen"** yerine "Quadrilateral. Dört köşesi ve kenarı olan bir çokgen" denilmektedir. Fakat ***ATATÜRK***, Batıdaki bu anlayışı reddederek Geometri'deki çokgenlerin hepsini tek bir anlayışta, günümüzdeki modern anlayışa göre, Türkçe'ye çevirdi ve Fransızca'daki "poly-gone" teriminden hareketle *"V. Poligonlar"* ve *"VIII. Düzgün Poligonlar"* dedikten sonra, bu parçalarda Göktürkçe'deki sayıları kullanarak [2] **"3-gen, 4-gen, 5-gen, 6-gen, 7-gen, 8-gen"** terimlerini türetti. Günümüzde Geometri'de kullandığımız terimler bunlardır (Bkz. *"n-gon"*). Buna göre ***ATATÜRK***, Geometri'de yalnızca Türkçe'ye değil diğer tüm dillere de isim babalığı yapmıştır (Bkz. *"Vanden Circkel"*, *"Cylometricus"*, *"De Circuli Magnitudine Inventa"* vb. Bu kitaplarda Yunancadan Latinceye geçen çokgen adları kullanılır). Bu nedenle ***Oktay Sinanoğlu***, Türkçe'nin matematik yapısını keşfettikten sonra, matematik için en iyi bilim dilinin Türkçe olduğunu söyler (Bkz. *"Bilim Dili Türkçe"*).

ATATÜRK tabii ki bu kitabı durduk yere yazmadı; 13 Kasım 1937'de Sivas'a gider ve 4-11 Eylül 1919'da Sivas Kongresi'nin yapıldığı lise binasında geometri dersine girdiğinde *"Bu anlaşılmaz terimlerle bilgi verilemez. Dersler Türkçe terimlerle anlatılmalıdır!"* diyerek kendi buluşu olan Türkçe terimler ve çizimlerle şöyle anlatır:

Osmanlıca: *"Müsellesin sathı yatalay, dikeley zarbının müsavatına müsavidir."*
Türkçe: *"Üçgenin alanı, tabanı ile yüksekliğinin çarpımının yarısına eşittir."*

Osmanlıca: *"Müsellesin, zaviyetan-ı dahiletan mecmu'ü 180 derece ve müselles-i mütesaviyü'l-adla, zaviyeleri birbirine müsavi müselles demektir."*
Türkçe: *"Üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir ve eşkenar üçgen, açıları birbirine eşit üçgen demektir."*

Girişimin neden başarılı olduğu açıktır. Çünkü bu teoremler Osmanlıcada tekerlemeyle formüle edilmişti ama Türkçemize uymuyordu (Bkz. *"YBC 7289 No'lu Tableti ve 2. Çözüm"*, *"Dikeyin Çap Karesi"*, S.10-13. Orada ***ATATÜRK***'ün Pisagor teoremini nasıl anlattığını görmediğim halde sanki yanındaymışım gibi anlattım ve şu

---

[1] Orhun yazıtlarında açık bir kanıt vardır: "***eçim kagan birle ilgerü yaşıl ögüz şantung yazıka tegi süledimiz... kamagı biş otuz süledimiz üç yigirmi süngüşdimiz illigig ilsiretdimiz kaganlıgıg kagansıratdımız tizligig sökürtimiz başlıgıg yüküntürtimiz:*** Amcam kağan ile birlikte doğuda Yeşil (Sarı) Irmağa (ve) Şantung Ovası'na kadar sefer ettik... Tamamı 25 (kez) sefer ettik; 13 (kez) savaştık. Devletliyi devletsiz; kağanlıyı kağansız bıraktık. Dizlilere diz çöktürdük; başlılara baş eğdirdik (BK D 15). ***men tokuz yigirmi yıl şad olurtum:*** Ben 19 yıl şad (olarak) hüküm sürdüm (BK G 9).

[2] Bunların bazıları Orhun yazıtlarında da geçer ve bu sayıların tamamı Türk Cumhuriyetleri'nce günümüze kadar taşınmışlardır. Bkz. Türkmence, Azerice, Özbekçe vd.

sözünü yerine getirdim: *"Beni görmek demek mutlaka yüzümü görmek değildir. Benim fikirlerimi, duygularımı anlıyor ve hissediyorsanız, bu yeterlidir"*). İşte ***ATA-TÜRK***'ün itirazı buna idi. Kaldı ki kendisi Selanik'te Askeri Rüştiyesi'nde okurken matematik dersinde başarılı bir öğrenciydi ve bu yüzden öğretmeni O'na "Kemal" adını vermişti (ki Manastır Askeri İdadisi'nde de bütün hayatı matematik ve askerlik derslerinde geçmişti). Yani okurken bu sıkıntıyı bizzat görüyor ve çözümünü arıyordu. Bugün bu sözcükleri ne kadar çok kullandığımızı düşününce, Geometri'ye katkılarından dolayı ***ATATÜRK***'e teşekkür ediyor ve yukarıdaki formülümün kendisine kutlu olmasını diliyoruz!

"Dil çalışmalarını sakın gevşetmeyin!"

Burada ***ATATÜRK***'ün 1928-1938 arası 10 yılda en büyük eforu Türk dili üzerinde harcadığına dikkat edelim. Öyle ki, ölüm döşeğindeyken görmek istediği kişilerin başında ***Dilaçar*** geliyordu. TDK Kol Başkanları görüşmeye geldiklerinde ***ATATÜRK*** komadaydı. ***Hasan Reşit Tankut***'u orada bırakarak ayrıldılar. Son 3 gündür komada kalan ***ATATÜRK***, uyanıp kendine geldiğinde, acı içinde, *"Arkadaşlara selam, dil çalışmalarını sakın gevşetmeyin!"* deyip kendinden geçti (Bkz. "*ATATÜRK'ÜN VEDASI*", S. 79-80). ***Dilaçar***, bunu ***ATATÜRK***'ün vasiyeti olarak üzerine aldı, hayatını bu uğurda harcadı ve İlk Dil Kurultayı'nın 40. yıl dönümünde şu anlamlı konuşmayı yaptı (Bkz. "*ATATÜRK'ün Keşfettiği Bilim Adamı: Agop Dilaçar*"): "**Atatürk***'ün yadırgadığı 'fasih Türkçe', 'orta Türkçe', 'kaba Türkçe' ayrılığı yok olmuş. Herkes; kentlisi de, yaşlısı da, genci de yayımlarımızın, yazarlarımızın, gazetelerimizin dilini anlıyor. Yararlı ve olumlu yeniliklerin arkasında hep* **Atatürk***'ü gördüğüm gibi hele bugün 40. yılımızda, birer birer bütün yeni sözcüklerimizin arkasında O'nun gölgesini görüyorum."*

Buna göre 15 Temmuz 2000'de keşfettiğim ve 29 Ekim 2003'te "ATA" adını verdiğim formülün 26.05-14.06.2004'te en son şeklini verirken tam da ***ATATÜRK***'ün istediği şekilde şöyle yazmıştım:

$$(1.1)\quad \mathrm{A(ABC)} = \frac{1}{2}\sqrt{k_A k_B + k_A k_C + k_B k_C}$$

C köşesinin [AB] kenarını çap kabul eden küreye (düzlemde çember) göre kuvveti.
B köşesinin [AC] kenarını çap kabul eden küreye (düzlemde çember) göre kuvveti.
ABC üçgeninin alanı
A köşesinin [BC] kenarını çap kabul eden küreye (düzlemde çember) göre kuvveti.

İspat. Öncelikle bu teoremin ispatı için Fizik'te de geçerli olan şu teoremi kanıtlamamız gerekiyor:

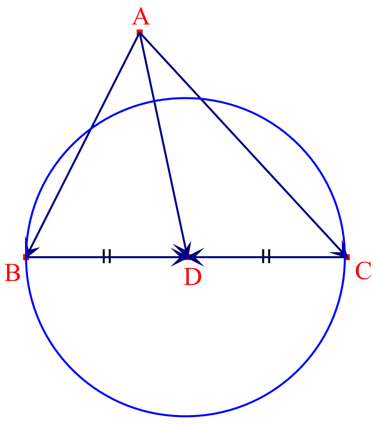
Teorem 1.2 (Kuvvet Almanın İç Çarpımla İfadesi, 15.06.2004, 03:49). K cismi üzerinde 2 vektörün iç çarpımı, bu 2 vektörün ortak başlangıç noktasının bitim noktalarını çap kabul eden küreye göre kuvveti demektir. Buna göre A noktasının D merkezli ve [BC] çaplı küreye göre kuvveti şu olur:

$$(1.2)\quad k_A = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$$

İspat. Öncelikle K cismi üzerinde tanımlı A noktasının D merkezli ve [BC] çaplı küreye göre kuvvetini alırken Analitik Geometri'de bilinen vektörel ifadesi,

$$(1.3)\quad k_A = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BD}$$

dür ve bunun Fizik'teki ifadesi için



Şekil 1.1. A noktasının D merkezli ve [BC] çaplı küreye göre kuvvetindeki iç çarpım ifadesi için vektörlerin yerleşimi.

şeklindeki vektörleri göz önüne almamız gerekiyor.

Buna göre A noktasının kuvvetini (1.2) bağıntısından ve iç çarpımda değişme özelliğinden yararlanırsak,

$$k_A = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right).\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right) - \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BD}$$
$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \Bigg(\underbrace{\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}_{=\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}}\Bigg).\overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

eşitliklerinden yeni bir tanıma ulaşmış oluruz. Bu tanım teoremin ifadesi olmakla birlikte matematiğin fiziğe yeni bir uygulamasını gösterir:

$$(1.4)\quad k_A = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$$

2. Yol. Temel tanıma ya da Fizik'te çokça kullanılan bu tanıma göre, K cismi üzerinde tanımlı $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ vektörlerinin iç çarpımı için A noktasının [BC] çaplı küreye kuvveti,

$$(1.5)\quad k_A = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\frac{\overrightarrow{BC}}{2}\right\|^2 = v_a^2 - r_a^2$$

dir. Burada

$$(1.6)\quad \overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$$

olduğundan bir vektörün normunun iç çarpım tanımı ve $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ eşitliği kullanılırsa,

$$k_A=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2-\left\|\frac{\overrightarrow{BC}}{2}\right\|^2=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\right]=\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}\right.$$
$$\left.+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\right]=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

eşitliklerinden

$$(1.7)\quad k_A=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

şeklinde yine (1.4) bağıntısı elde edilir.

Şu halde ABC üçgeninin köşelerinin karşı kenarları birer çap olarak kabul eden kürelere göre k_A, k_B, k_C kuvvetleri pozitif (ya da negatif) yönde

$$(1.8)\quad \begin{cases}k_A=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB},\\ k_B=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC},\\ k_C=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}\end{cases}$$

şeklinde olur.

Şimdi burada k_A, k_B, k_C kuvvetlerini bu şekilde yazdığımıza göre, (1.1)'deki formül için bir ikinci teoreme daha gerek var:

Teorem 1.3 (Lagrange Özdeşliği). Genel olarak K cismi üzerindeki $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri için Lagrange özdeşliği,

$$(1.9)\quad \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2-(\vec{u}.\vec{v})^2$$

Pisagor bağıntısıdır. Burada $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin iç çarpımı ve $\vec{u}\wedge\vec{v}$, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin dış çarpımıdır.

Eğer burada $\overrightarrow{AC}$'nün normunun karesini hesaplamak istersek, ABC üçgeni üzerinde,

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=k_A+k_B$$

olur ve genelde de

$$(1.10)\quad \begin{cases}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=k_A+k_B,\\ \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2=k_B+k_C,\\ \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2=k_C+k_A\end{cases}$$

bağıntıları geçerli olur (Bkz. "*ATA Formülü ve Uygulamaları-2003*", (4) no'lu bağıntılar).

Şu halde Şekil 1.1'deki ABC üçgenini paralelkenara tamamlarsak, ardışık 2 kenarı üzerine kurulu paralelkenarın alanı bu kenarlar üzerindeki vektörlerin dış çarpımının normu ve ABC üçgeninin alanı da bu paralelkenarın alanının yarısı olduğundan (ki ABC üçgeninin 3. kenarı bu paralelkenarın bir köşegeni olur ve bu köşegen de paralelkenarın alanını 2 eşit parçaya ayırır), ABC üçgenin alanı için

$$(1.11)\quad A(ABC)=\frac{\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|}{2},\frac{\left\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|}{2},\frac{\left\|\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{CA}\right\|}{2}$$

bağıntıları geçerli olur.

Buna göre bu bağıntılardan ilkinden

$$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2=(k_A+k_B)(k_C+k_A)-k_A^2=k_Ak_C+k_A^2+k_Bk_C+k_Bk_A-k_A^2=k_Ak_B+k_Ak_C+k_Bk_C$$

ve diğer ikisinden de aynı sonuç elde edildiğinden

$$(1.12)\quad \left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{CA}\right\|=\sqrt{k_Ak_B+k_Ak_C+k_Bk_C}$$

eşitlikleri, dolayısıyla ABC üçgeninin alanı için

$$(1.13)\quad A(ABC)=\frac{1}{2}\sqrt{k_Ak_B+k_Ak_C+k_Bk_C}$$

bağıntısı geçerli olur. Bu ise baştan beri ispatlamak istediğimiz biricik simetrik formül yani ATA formülü idi. Bu formülü 15 Temmuz 2000'de keşfetmiştim (Bkz. "*ATA Formülü ve Uygulamaları-2003*", Teorem 1).

Teorem 1.4. A, B ve C noktalarının kuvvetlerinin metrik ve kutupsal tanımları şu şekildedir:

$$(1.14)\quad \begin{cases} k_A = \dfrac{\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2}{2} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\mathrm{Cos}A, \\ k_B = \dfrac{\|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{CA}\|^2}{2} = \|\overrightarrow{BC}\|\|\overrightarrow{BA}\|\mathrm{Cos}B, \\ k_C = \dfrac{\|\overrightarrow{CA}\|^2 + \|\overrightarrow{CB}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2}{2} = \|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CB}\|\mathrm{Cos}C. \end{cases}$$

İspat. A noktasının kuvvetinin (1.5)'teki metrik tanımda (1.6) bağıntısı ve (1.2)'deki kuvvet tanımı kullanılırsa,

$$k_A = \|\overrightarrow{AD}\|^2 - \left\|\frac{\overrightarrow{BC}}{2}\right\|^2 = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\left[(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}\right] = \frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right] = \frac{1}{4}\left[\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2 + 2k_A\right]$$

eşitliklerinden

$$(1.15)\quad k_A = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2}{2}$$

metrik tanımı ve benzer şekilde diğer bağıntılar elde edilir. Burada (1.14)'teki ikinci eşitliklerdeki kutupsal bağıntılar aksiyom gibi açık birer tanım olduklarından, bunları ayrıca kanıtlamaya gerek yoktur!

Teorem 1.5 (Üçgenin Kuvvet ve Kutupsal Olarak Alanı). K cismi üzerinde tanımlı ABC üçgeninin alanının kuvvet ve kutupsal ifadeleri şu şekildedirler:

$$(1.16)\quad A(ABC) = \frac{1}{2}k_A\mathrm{Tan}A, \frac{1}{2}k_B\mathrm{Tan}B, \frac{1}{2}k_C\mathrm{Tan}C.$$

İspat. Bu formüllerin elde ediliş şekli doğrudan ABC üçgeni üzerindeki 2 vektörün dış çarpımının normunun iç çarpımına oranından kolaylıkla elde edilebilir. Örneğin, K cismi üzerinde tanımlanmış $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ vektörlerin dış çarpımının normunu iç çarpımına oranlar ve bu orandaki ifadelerde (1.2) ve (1.11)'deki bağıntıları kullanırsak,

$$\frac{2A(ABC)}{k_A} = \frac{\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}\|}{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\mathrm{Sin}A}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\mathrm{Cos}A} = \mathrm{Tan}A$$

eşitliklerinden

$$(1.17)\quad A(ABC) = \frac{1}{2}k_A\mathrm{Tan}A$$

ve aynı şekilde (1.16)'daki diğer bağıntılar elde edilmiş olur.

Söz konusu bu bağıntılar ABC üçgeninde Kotanjant Teoremi olarak bilinen (ki burada $S \coloneqq A(ABC)$'dir),

$$(1.18)\quad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 4S\mathrm{Cot}A, \\ b^2 = c^2 + a^2 - 4S\mathrm{Cot}B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 4S\mathrm{Cot}C \end{cases}$$

bağıntılarından da elde edilebilir. Çünkü bu bağıntılarda (1.14)'e göre k_A, k_B, k_C kuvvetleri

$$(1.19)\quad \begin{cases} k_A = \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}, \\ k_B = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2}, \\ k_C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \end{cases}$$

şeklinde açık bir şekilde görülmektedir (bkz. "*ATA Formülü ve Uygulamaları-2003*", (1) no'lu bağıntılar) ve bu bağıntıların (1.18)'de yerlerine konulmasıyla (1.16) bağıntıları da derhal elde edilmektedir. Çünkü (1.18) zaten (1.16) demektir!

Sonuçlar 1.1. Bu son teoremden birçok sonuç çıkar ve bunlar ABC üçgeninin anlaşılmasını en mükemmel şekilde sağlar:

1. **Sinüs Teoremi'nin Kuvvetler ve Kutupsal Olarak İfadesi.** ABC üçgenindeki

$$(1.20)\quad \frac{a}{\mathrm{Sin}A} = \frac{b}{\mathrm{Sin}B} = \frac{c}{\mathrm{Sin}C} = \frac{abc}{2S}$$

Sinüs Teoremi'ne göre (1.16)'daki

$$(1.21)\quad k_A\mathrm{Tan}A = k_B\mathrm{Tan}B = k_C\mathrm{Tan}C = 2S$$

ve (1.14)'teki

$$(1.22)\quad \frac{ak_A}{CosA}=\frac{bk_B}{CosB}=\frac{ck_C}{CosC}=abc$$

bağıntıları elde edilir. Yani (1.20) derhal (1.21) ve (1.22)'ye dönüşür. Arzu edilirse bu son bağıntıdaki a, b, c kenar uzunlukları k_A, k_B, k_C kuvvetleri cinsinden, dolayısıyla (1.22) bağıntıları (1.21)'deki salt kuvvetler ve kutupsal şeklinde de ifade edilebilir. Ama kareköklü ifadeler nedeniyle bu uygulamayı yapmayı gerek görmedim!

Not 1.1. Teorem 1.1 ile ilgili ***Conway***'in notasyon çalışması şöyledir (Bkz. ***Max Schindler*** ve ***Evan Chen***'in 13 Temmuz 2012 tarihli *"Barycentric Coordinates in Olimpiad Geometry"* makalesininin 14. sayfası. Daha fazla bilgi için *"Conway triangle notation"* sayfasına bakınız):

4.4 Conway's Formula

Conway's Formula gives a nice way to work with (some) angles in a triangle. Most of the results here are from [4].

We start by defining some notation:

Definition (Conway's Notation). Let S be twice the area of the triangle. Define $S_\theta = S\cot\theta$, and define the shorthand notation $S_{\theta\phi} = S_\theta S_\phi$.

Fact. We have $S_A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2} = bc\cos A$ and its cyclic variations. (We also have $S_\omega = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$, where ω is the Brocard angle. This follows from $\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$.)

Fact. We have the identities

$$S_B + S_C = a^2$$

and

$$S_{AB} + S_{BC} + S_{CA} = S^2$$

14

Evet, ***Conway***'in çalışması bu ve burada sadece **Teorem 1.1**'in notasyonel yani sembolik bir ifadesi vardır. Bunlardan ***Conway***'in son eşitliği buradaki $S = S_A + S_B + S_C$ açık eşitliğine denk gelir. Çok ilginçtir, ***Conway***, tüm matematik literatürlerinde S_A alanını gösterirken $S_A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}$ şeklinde ve notasyonun devamında S_B, S_C'yi de benzer şekilde göstererek (1.19)'daki gibi ifade etmiştir. Oysa söz konusu bu bağıntılar (1.19)'daki şekliyle 12 Nisan 2006 tarihli 07592 noter no'lu ***"ATA FORMÜLÜ VE UYGULAMALARI"*** çalışmamda kayıtlıdır. Ona göre, S_A, S_B, S_C notasyonları yukarıdaki son eşitlikte yerlerine konulduğunda, elde edilen sonuç (1.1)'deki ATA formülünü verir. Bu da aynı çalışmamda kayıtlıdır!

Özetle, ***Conway***, şüphesiz ABC üçgeninin Brocard noktasıyla ile ilgili bu notasyonları kullanmak istemiş ve $Cotw = CotA + CotB + CotC$ geçerli olan eşitliğiyle yeni bir açılımda bulunmak istemiş, ama bunun için notasyonlar aracılığıyla kullandığı formüller bana aittir. Yani oradaki **"Conway's Formula"** ifadesi doğru değildir!

Bu konuda dünyaca ünlü Ölü diller uzmanı ***Zekeriya Sitchin***, **"Gökyüzüne Merdiven"** adlı kitabındaki **"Firavun Adıyla Oynamak"** bölümüne şu sözlerle başlar: *"Sahtecilik, bir ün ve servet aracı olarak ticaret ve sanatta, bilimde ve antikacılıkta alışılmadık bir şey değildir. Açığa çıktığında kayıplara ve utanca yol açar. Açığa çıkmadığında ise tarihi değiştirir.*

*Büyük Piramit'in ve kurucusu olduğu varsayılan **Khufu** adlı firavunun başına gelenin bu olduğuna inanıyoruz!"*

Sitchin, bu girişten sonra 40 sayfada Büyük Piramit'in ***KHUFU*** tarafından yaptırılmamış olduğunu kanıtlarıyla birlikte anlatır ve sahtekarlığın ne kadar kötü bir şey olduğunu dile getirir. Bununla birlikte, matematikteki keşifler genelde birbirinden bağımsız olarak birden fazla kişi tarafından yapılır ama telif hakkı ilk bulan kişiye aittir. Örnekse Richardson ekstrapolasyonu (Bkz. *"Romberg İntegrali Kronolojim 3", Bölüm 2, S. 21-22.* Ama Richardson ekstrapolasyonu da ***Takebe***'den geliyor!). İşte bu sonuçlara göre ***Conway***'in yaptığı şeyin kötü bir davranış olduğunu söylemem yeterli olur sanırım. Bu durumu ***Conway*** amcanın yaşına veriyorum!

2. **ATA Formülü'nün İkinci Formu.** Eğer (1.22)'deki oranları sırasıyla a, b, c ile genişletir, paylar ve paydaları kendi aralarında toplarsak oran değişmeyeceğinden, $a^2k_A + b^2k_B + c^2k_C = abc(aCosA + bCosB + cCosC)$ özdeşliğini elde ederiz. Bu özdeşliğin sol tarafındaki ifade (1.16)'ya göre $a^2CotA + b^2CotB + c^2CotC = 4S$ özdeşliğinde mevcut olduğundan,

$$(1.23)\quad A(ABC)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2k_A+b^2k_B+c^2k_C}{2}}$$

bağıntısını elde etmiş oluruz. Bu formülü de Teorem 1.1'deki formülle birlikte aynı tarihte, 15 Temmuz 2000, keşfetmiştim! (Bkz. *"ATA Formülü ve Uygulamaları-2003"*, (62) no'lu formül)

3. **ATA Formülü İçin Favori İspatım.** Genel olarak ATA Formülü'nün ispatı için birçok yol vardır ama benim favori ispatım şu teoremden gelir:

Teorem 1.6. ABC üçgeninin iç açılarının tanjantları arasında şu eşitlik geçerlidir:

$$(1.24)\quad TanA + TanB + TanC = TanATanBTanC.$$

Bu şık bağıntı (1.16)'daki bağıntılarla kullanıldığında (ki burada yine hesabı kolaylaştırmak için $S \coloneqq A(ABC)$ olarak alınırsa),

$$\frac{2S}{k_A}+\frac{2S}{k_B}+\frac{2S}{k_C}=\frac{2S}{k_A}\cdot\frac{2S}{k_B}\cdot\frac{2S}{k_C}$$

eşitliğinden derhal

$$(1.25)\quad A(ABC)=\frac{1}{2}\sqrt{k_Ak_B+k_Ak_C+k_Bk_C}$$

şeklinde yine (1.1) elde edilir (Bkz. "ATA Formülü ve Uygulamaları-2003", Teorem 8).

4. **ABC Üçgeninin Kuvvetlere Göre Sınıflandırılması.** Genel olarak bir ABC üçgeninin ne tür bir üçgen olduğunu yalnızca k_A, k_B, k_C kuvvetlerine bakarak derhal anlayabilir, dolayısıyla bu kuvvetlere göre ABC üçgenini sınıflandırabiliriz (Bkz. "ATA Formülü ve Uygulamaları-2003", *5. Üçgenlerin ATA Formülü'ndeki p, q, r'ye Göre Sınıflandırılması*).

4.1. **Çeşitkenar Üçgenler.** ABC üçgeninde iç açıları ve kenarları arasında

$$(1.26)\quad A \neq B \neq C \Leftrightarrow a \neq b \neq c$$

eşitsizlikleri geçerli olduğundan, (1.16)'ya göre

$$k_A \mathrm{Tan}A = k_B \mathrm{Tan}B = k_C \mathrm{Tan}C \Rightarrow \mathrm{Tan}A \neq \mathrm{Tan}B \neq \mathrm{Tan}C \Leftrightarrow k_A \neq k_B \neq k_C$$

nedeniyle aynı eşitsizlikler kuvvetler arasında da geçerli olur:

$$(1.27)\quad k_A \neq k_B \neq k_C.$$

4.2. **İkizkenar Üçgenler.** Bu durumda ABC üçgeninde hangi kenarlar birbirine eşitse bunlara karşılık gelen iç açılar, dolayısıyla bu köşelere ait kuvvetler de birbirine eşit olurlar.

Örneğin, ABC üçgeninde iç açıları ve kenarları arasında

$$(1.28)\quad A = B \neq C \Leftrightarrow a = b \neq c$$

ise bu, (1.16)'ya göre

$$k_A \mathrm{Tan}A = k_B \mathrm{Tan}B = k_C \mathrm{Tan}C \Rightarrow \mathrm{Tan}A = \mathrm{Tan}B \neq \mathrm{Tan}C \Leftrightarrow k_A = k_B \neq k_C$$

nedeniyle ABC üçgeninin kuvvetleri arasında da

$$(1.29)\quad k_A = k_B \neq k_C$$

bağıntıları geçerli olur. Aynı şekilde diğer 2 durumda da kuvvetler arasında bu bağıntı geçerli olur ve bu durumda sadece kuvvetler altındaki köşeler değişir!

4.2.1. **Eşkenar Üçgenler.** Bu durumda ABC üçgenindeki iç açılar ve kenarlar kendi aralarında

$$(1.30)\quad A = B = C \Leftrightarrow a = b = c$$

şeklinde birbirine eşit olduklarından, (1.16)'ya göre

$$k_A \mathrm{Tan}A = k_B \mathrm{Tan}B = k_C \mathrm{Tan}C \Rightarrow \mathrm{Tan}A = \mathrm{Tan}B = \mathrm{Tan}C \Leftrightarrow k_A = k_B = k_C$$

nedeniyle ABC üçgeninin kuvvetleri arasında da

$$(1.31)\quad k_A = k_B = k_C$$

eşitlikleri geçerli olur.

4.3. **Dik Üçgenler.** ABC üçgeninin hangi köşesindeki açı dikse, o köşedeki kuvvet sıfır olur.

Bunun için (1.16)'daki ilk bağıntı kullanırsa,

$$(1.32)\quad A = 90^\circ \Rightarrow S = \frac{1}{2}k_A \mathrm{Tan}A = \frac{1}{2}k_A \mathrm{Tan}90^\circ = \frac{1}{2}k_A.\frac{1}{0} \Rightarrow k_A = 0$$

ve genelde de şu sonuçlar geçerli olur:

$$(1.33)\quad \begin{cases} A = 90^\circ \Leftrightarrow k_A = 0, \\ B = 90^\circ \Leftrightarrow k_B = 0, \\ C = 90^\circ \Leftrightarrow k_C = 0. \end{cases}$$

Bu sonuçlar Analitik Geometri'den de bilindiği üzere o köşedeki vektörlerin birbirine dik olmasından ileri gelir. Çünkü birbirine dik 2 vektörün iç çarpımı sıfırdır!

Not 1.3 (Heron Formülü'ndeki Elemanlara Göre Dik Üçgenlerin Sınıflandırılması). Heron formülündeki elemanlara göre üçgenlerin sınıflandırılması kolay değildir. Çünkü ABC dik üçgenindeki (ki burada $u = \frac{a+b+c}{2}$'dir)

$$(1.34)\quad \begin{cases} A = 90^\circ \Leftrightarrow k_A = u(u-a) - (u-b)(u-c) = 0, \\ B = 90^\circ \Leftrightarrow k_B = u(u-b) - (u-c)(u-a) = 0, \\ C = 90^\circ \Leftrightarrow k_C = u(u-c) - (u-a)(u-b) = 0 \end{cases}$$

bağıntılarından bu işin kolay olmadığı görülür!

DERYA PAMUKTULUM Dijital olarak imzalayan DERYA PAMUKTULUM
Tarih: 2022.12.12 07:04:26 +03'00'